

Функциональный анализ

2011/12 уч. год

1. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Примеры.
2. Норма оператора. Продолжение операторов по непрерывности. Примеры
3. Примеры ограниченных и неограниченных операторов.
4. Принцип равномерной ограниченности.
5. Сходимость последовательности операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.
6. Теорема Банаха-Штейнгауза для функционалов. Примеры последовательностей функционалов, сходящихся поточечно и расходящихся.
7. Сопряженные пространства. Рефлексивные пространства. Примеры.
8. Примеры сопряженных пространств к пространствам последовательностей.
9. Теорема Рисса о функционалах на гильбертовом пространстве. Примеры функционалов на лебеговом и соболевском пространствах.
10. Теорема Рисса о функционалах на пространстве $C[a, b]$. Пространство, сопряженное к $C[a, b]$.
11. Слабая сходимость в нормированных пространствах. Применение теоремы Банаха-Штейнгауза к исследованию слабой сходимости. Примеры.
12. Теорема Хана-Банаха.
13. Следствия из теоремы Хана-Банаха. Примеры применения.
14. Обратные операторы. Существование ограниченного обратного. Примеры.
15. Операторы вида $(\lambda I - A)^{-1}$, $(B + A)^{-1}$. Применение к решению интегральных уравнений.
16. Замкнутые операторы. График оператора. Примеры.
17. Теорема Банаха об обратном операторе.
18. Теорема Банаха о замкнутом графике. Связь между теоремами Банаха.
19. Следствия из теоремы Банаха. Примеры применения теорем Банаха.
20. Спектр оператора. Резольвента. Примеры.
21. Сопряженные операторы (ограниченные и неограниченные), примеры.
22. Самосопряженные операторы. Примеры. Свойства спектра.
23. Компактные множества. Свойства функционалов на компактных множествах.

24. Теорема Хаусдорфа. Примеры компактных и некомпактных множеств.
25. Компактность и конечномерность.
26. Теорема Арцелла. Примеры компактных и некомпактных множеств в пространствах непрерывных функций.
27. Вполне непрерывные операторы. Свойства. Примеры.
28. Примеры вполне непрерывных операторов в $C[a, b]$, $L_2[a, b]$.
29. Спектральные свойства вполне непрерывных операторов.
30. Теорема Гильберта-Шмидта. Применение к решению интегральных уравнений.
31. Нормально разрешимые операторы. Нормальная разрешимость оператора $(\lambda - A)$.
32. Теория разрешимости операторных уравнений второго рода (теоремы Фредгольма).
33. Разрешимость уравнений первого рода. Регуляризация некорректных задач.
34. Принцип сжимающих отображений. Применение к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра.
35. Методы решения интегральных уравнений. Примеры.
36. Пространства Соболева. Определение обобщенных производных в пространствах Соболева. Примеры дифференциальных операторов, область определения которых может быть задана с использованием пространств Соболева.
37. Теоремы вложения в пространствах Соболева.