Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции многочленами

Лекция по курсу «Математический анализ»

П.Ю. Глазырина

Уральский федеральный университет

2013

Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной на отрезке функции многочленами

Немецкого математика
Карла Теодора Вильгельма
Вейерштрасса (1815–1897 гг.)
называют одним из основоположников
современного анализа.

Теорема (Вейерштрасс, 1885 г.).
Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P со свойством

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

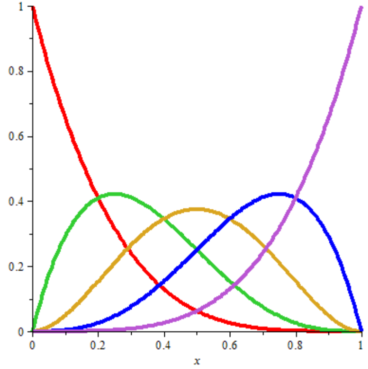
Многочлены Бернштейна

Пусть $\mathcal{P}_n$ есть пространство многочленов степени n. С.Н. Бернштейн рассмотрел базис этого пространства, состоящий из многочленов вида

$$B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

$B_{n,k}(x)$ называются базисными многочленами Бернштейна.

Многочлены
$B_{4,0}$, $B_{4,1}$, $B_{4,2}$, $B_{4,3}$, $B_{4,4}$



Свойства многочленов Бернштейна

1. $B_{n,k}(x) = B_{n,k}(1-x)$
2. Наименьшее значение на $[0,1]$: $B_{n,k}(0) = B_{n,k}(1) = 0$. Наибольшее значение $B_{n,k}(x)$ на $[0,1]$ достигается в точке $x = k/n$.
3. Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_{n,k}(x) = n(x-x^2) \leqslant \frac{n}{4}.$$

Доказательство теоремы Вейерштрасса

Докажем теорему для отрезка $[0,1]$.
По функции f построим многочлены

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Многочлены P_n называются многочленами Бернштейна для f.

Доказательство теоремы Вейерштрасса. Пример

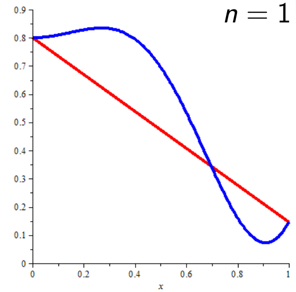
Функция

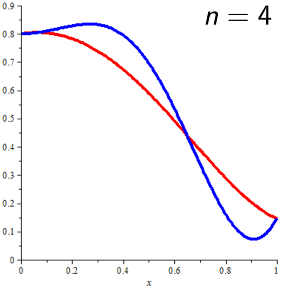
$f(x) = x^2 \cos(4x) + 0.8$

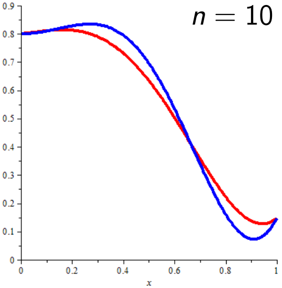
и ее многочлены

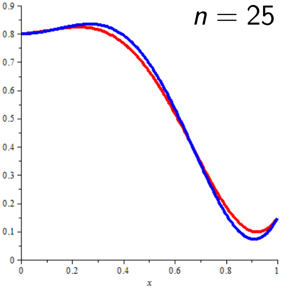
$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$

для $n = 1,\ 4,\ 10,\ 25$









Доказательство теоремы Вейерштрасса

$$f(x) - P_n(x) = f(x)\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x).$$

Необходимо получить оценку, равномерную по $x \in [0,1]$.
Разделим индексы суммирования $k = 0, \dots, n$ на два множества

$$K_1 = K_1(x) = \left\{k : \left|\tfrac{k}{n} - x\right| \leqslant \tfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\} = \left\{k : (k - nx)^2 \leqslant n^{3/2}\right\},$$
$$K_2 = K_2(x) = \left\{k : \left|\tfrac{k}{n} - x\right| > \tfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\} = \left\{k : (k - nx)^2 > n^{3/2}\right\}.$$

$$f(x) - P_n(x) = \sum_{k \in K_1} \left(f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x) + \sum_{k \in K_2} \left(f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x).$$

Доказательство теоремы Вейерштрасса

$$K_2 = K_2(x) = \left\{k: \; \left|\tfrac{k}{n} - x\right| > \tfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\} = \left\{k: \; (k - nx)^2 > n^{3/2}\right\}.$$

$$S_2(x) = \sum_{k \in K_2} \left(f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x), \qquad |f(x)| \leqslant M$$

$$|S_2(x)| \leqslant 2M \sum_{k \in K_2} B_{n,k}(x) = 2M \sum_{k \in K_2} \frac{(k - nx)^2}{(k - nx)^2} B_{n,k}(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{k \in K_2} \frac{(k - nx)^2 B_{n,k}(x)}{n^{3/2}} = 2M \frac{n(x - x^2)}{n^{3/2}} \leqslant \frac{M}{2n^{1/2}}.$$

Доказательство теоремы Вейерштрасса

$$K_1 = K_1(x) = \left\{k: \ \left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\} = \left\{k: \ (k - nx)^2 \leqslant n^{3/2}\right\},$$

$$S_1(x) = \sum_{k \in K_1} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x), \qquad |f(x)| \leqslant M$$

$$\omega_n = \max\left\{\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| : \ x \in [0,1], \ \left|x - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}.$$

Функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, следовательно, равномерно непрерывна. Поэтому, если $n \to \infty$, то $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \to 0$ и $\omega_n \to 0$. Имеем

$$|S_1(x)| \leqslant \omega_n \sum_{k \in K_1} B_{n,k}(x) \leqslant \omega_n \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \omega_n.$$

Доказательство теоремы Вейерштрасса

Таким образом, мы получаем оценку

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \omega_n + \frac{M}{2n^{1/2}},$$

причем выражение справа не зависит от точки $x \in [a, b]$.
Поскольку $\omega_n \to 0$ при $n \to \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер n так, чтобы $\omega_n + \frac{M}{2n^{1/2}} < \varepsilon$.
Для отрезка $[0, 1]$ теорема доказана.

Доказательство теоремы Вейерштрасса

Докажем теорему для $[a, b]$.

Рассмотрим отображение $x = a + (b - a)t$ отрезка $[0, 1]$ на $[a, b]$ и функцию $g(t) = f(a + (b - a)t)$.

Для $\varepsilon > 0$ найдем многочлен $P(t)$, для которого

$$\max_{t \in [0,1]} |g(t) - P(t)| < \varepsilon.$$

Подставим $t = (x - a)/(b - a)$, получаем неравенство

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P((x - a)/(b - a))| < \varepsilon.$$

Заметим, что $P((x - a)/(b - a))$ является многочленом переменной x.

Всюду плотные множества. Сепарабельные пространства

$\langle X, \|\cdot\|\rangle$ – нормированное пространство.

Определение. Множество $A \subset X$ *плотно* во множестве $B \subset X$, если для любого $b \in B$ можно найти сколь угодно близкий к нему $a \in A$. А точнее, для любого $b \in B$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $a \in A$ такой, что $\|b - a\| < \varepsilon$.

Эквивалентная формулировка. Множество $A \subset X$ *плотно* в B, если замыкание A содержит B.

Если $B = X$, говорят, что A *всюду плотно* (в X).

Определение. Нормированное пространство X, в котором есть счетное всюду плотное множество, называется *сепарабельным пространством*.

Самый простой примером сепарабельного пространства – пространство $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = |x|$.

$C[a, b]$ – пространство вещественных непрерывных функций на $[a, b]$,

$$\|f\| = \|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Сходимость по этой норме есть равномерная сходимость на отрезке $[a, b]$.
Норму $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ называют равномерной нормой. Также используется название «чебышёвская норма» по имени известного российского математика Пафнутия Львовича Чебышёва, который одним из первых начал изучать приближение функций многочленами по этой норме.

Следствие. *Множество $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x]$ алгебраических многочленов с вещественными коэффициентами плотно в $C[a, b]$.*

Следствие. *Пространство $C[a, b]$ сепарабельно. В качестве счетного всюду плотного множества можно взять множество $\mathcal{Q}_n$ многочленов с рациональными коэффициентами.*

Задачи к лекции

1. Покажите, что если в нормированном пространстве $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ множество A плотно в B, а B плотно в X, то A плотно в X.

2. Покажите, что если A всюду плотно в $\langle X, \|\cdot\|\rangle$, то любой элемент $x \in X$ представляется в виде суммы

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad a \in A.$$

Сходимость ряда понимается в том смысле, что

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n} a_k \right\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Задачи к лекции

3. Пусть $\mathcal{R}[a,b]$ есть пространство функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$, наделенное нормой

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Докажите, что множество многочленов $\mathcal{P}$ всюду плотно в $\mathcal{R}[a,b]$, другими словами, докажите аналог теоремы Вейерштрасса для пространства $\mathcal{R}[a,b]$.

4. Пусть функция f дифференцируема на $[0,1]$, и модуль ее производной ограничен числом L. Оцените скорость приближения функции f многочленами P_n, т. е. получите оценку вида

$$\|f - P_n\|_{C[a,b]} \leqslant c_n(L),$$

где величина $c_n(L)$ зависит только от n и L, и стремится к 0 при $n \to \infty$.

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Гл. 4, § 5. М.: «Наука», 1974.

Список рекомендуемой литературы

Дополнительная

1. Бернштейн С.Н. Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей / Собрание сочинений. Т. 1. М. : АН СССР, 1952.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. Гл. 2, § 7, п. 4. М.: Изд-во МГУ, 1987.
3. http://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_Безье
4. http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-bezier
5. Биография Вейерштрасса на английском. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Indexes/W.html
6. Pinkus A. Weierstrass and Approximation Theory // J. Approx. Theory 107 (2000), 1-66. http://www.math.technion.ac.il/hat/fpapers/wap.pdf