Лекция по курсу «Математический анализ»

Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции многочленами

П.Ю. Глазырина
Уральский федеральный университет

Немецкого математика Карла Теодора Вильгельма Вейерштрасса (1815–1897 гг.) называют одним из основоположников современного математического анализа. В курсе мы уже несколько раз встречались с его результатами. Теорема 1, полученная Вейерштрассом, относится к фундаментальным результатам анализа. Она показывает, что множество многочленов достаточно богато, для того, чтобы описать любую непрерывную функцию с любой точностью посредством многочленов, а также позволяет выявить некоторые общие свойства пространства непрерывных функций.

Теорема 1 (Вейерштрасс, 1885 г.) *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P со свойством*

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Известно несколько доказательств этой теоремы. Мы приведем модифицированный вариант доказательства, предложенный украинским и советским математиком Сергеем Натановичем Бернштейном в 1912 году (С. Н. Бернштейн. Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей / Собрание сочинений. Т. 1. М. : АН СССР, 1952).

Многочлены Бернштейна

Пусть $\mathcal{P}_n$ есть пространство многочленов степени n. Бернштейн рассмотрел базис этого пространства, состоящий из многочленов вида

$$B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Сейчас эти многочлены называются базисными многочленами (полиномами) Бернштейна.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется несколько свойств многочленов Бернштейна, которые мы сейчас установим.

1. На концах отрезка $[0,1]$ многочлен $B_{n,k}$ принимает свое наименьшее на $[0,1]$ значение, $B_{n,k}(0) = B_{n,k}(1) = 0$. В точке $x = k/n$ многочлен $B_{n,k}$ принимает свое наибольшее значение.

2. Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n(x-x^2). \tag{3}$$

3. Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_{n,k}(x) = n(x-x^2) \leqslant \frac{n}{4}. \tag{4}$$

Свойство 1 проверяется стандартным способом нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой функции на отрезке. Его доказательство мы оставляем читателю.

Доказательство равенств (1)–(3) основано на формуле бинома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \big(x+y\big)^n. \tag{5}$$

Подставив в нее $y = 1-x$, получим равенство (1). Теперь продифференцируем (5) по x:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1} y^k = n\big(x+y\big)^{n-1},$$

умножим обе части этого выражения на x:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^k y^k = nx\big(x+y\big)^{n-1}, \tag{6}$$

и вновь подставим $y = 1-x$, мы получим соотношение (2). Продифференцируем (6) по x:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 x^{k-1} y^k = n\left(\big(x+y\big)^{n-1} + x(n-1)(x+y)^{n-2}\right),$$

умножим на x и и подставим $y = 1-x$:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 x^k (1-x)^k = nx(1+x(n-1)). \tag{7}$$

Чтобы получить (3) остается сложить $(7) - (2)\cdot 2nx + (1)\cdot(nx)^2$.

Наконец, неравенство (4) следует из (3) с помощью оценки $(x-x^2) \leqslant 1/4$.

Доказательство теоремы Вейерштрасса

1. Сначала докажем теорему для отрезка $[0,1]$. Для непрерывной на $[0,1]$ функции f построим многочлены

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) B_{n,k}(x), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Многочлены P_n называются многочленами Бернштейна для функции f. Оценим разность $f(x)-P_n(x)$ для $x\in[0,1]$. Применяя равенство (1), мы можем написать

$$f(x)-P_n(x)=f(x)\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)-\sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x).$$

Нам необходимо получить оценку последней суммы, равномерную по $x\in[0,1]$. Для этого разделим индексы суммирования $k=0,\ldots,n$ на два множества

$$K_1=K_1(x)=\left\{k:\ \left|\tfrac{k}{n}-x\right|\leqslant \tfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}=\left\{k:\ (k-nx)^2\leqslant n^{3/2}\right\},$$

$$K_2=K_2(x)=\left\{k:\ \left|\tfrac{k}{n}-x\right|> \tfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}=\left\{k:\ (k-nx)^2> n^{3/2}\right\}.$$

Запишем

$$f(x)-P_n(x)=S_1(x)+S_2(x), \qquad |f(x)-P_n(x)|\leqslant|S_1(x)|+|S_2(x)|,$$

$$S_1(x)=\sum_{k\in K_1}\left(f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x), \quad S_2(x)=\sum_{k\in K_2}\left(f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x).$$

Функция f непрерывна на отрезке $[0,1]$, а значит, ее модуль ограничен на нем некоторым числом M. Оценим сумму S_2 за счет ограниченности f и относительной малости многочленов $B_{n,k}$ в точке x при $k\in K_2$. Применяя неравенство (4), мы получим

$$\begin{aligned}|S_2(x)|&\leqslant 2M\sum_{k\in K_2} B_{n,k}(x)=2M\sum_{k\in K_2}\frac{(k-nx)^2}{(k-nx)^2}B_{n,k}(x)\leqslant\\&\leqslant 2M\sum_{k\in K_2}\frac{(k-nx)^2B_{n,k}(x)}{n^{3/2}}=2M\frac{n(x-x^2)}{n^{3/2}}\leqslant\frac{M}{2n^{1/2}}.\end{aligned}$$

Чтобы оценить сумму $S_1(x)$, рассмотрим величину

$$\omega_n=\max\left\{\left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|:\ x\in[0,1],\ \left|x-\tfrac{k}{n}\right|<\tfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}.$$

Функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, следовательно, равномерно непрерывна. Поэтому, если $n \to \infty$, то $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \to 0$ и $\omega_n \to 0$. Применяя (1), имеем

$$|S_1(x)| \leqslant \omega_n \sum_{k \in K_1} B_{n,k}(x) \leqslant \omega_n \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \omega_n.$$

Таким образом, мы получаем оценку

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \omega_n + \frac{M}{2n^{1/2}},$$

причем выражение справа не зависит от точки $x \in [a, b]$.

Поскольку $\omega_n \to 0$ при $n \to \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер n так, чтобы $\omega_n + \frac{M}{2n^{1/2}} < \varepsilon$.

Для отрезка $[0, 1]$ теорема доказана.

2. Чтобы распространить утверждение теоремы на произвольный отрезок $[a, b]$, рассмотрим отображение $x = a + (b - a)t$ отрезка $[0, 1]$ на $[a, b]$ и функцию $g(t) = f(a + (b - a)t)$. Эта функция определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем многочлен $P(t)$, для которого

$$\max_{t \in [0,1]} |g(t) - P(t)| < \varepsilon.$$

Подставляя $t = (x - a)/(b - a)$, мы получаем неравенство

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P((x - a)/(b - a))| < \varepsilon.$$

Остается заметить, что $P((x - a)/(b - a))$ является многочленом переменной x. Таким образом, нужный многочлен найден.

Всюду плотные множества. Сепарабельные пространства

Определение. Пусть задано нормированное пространство $\langle X, \|\cdot\| \rangle$. Множество $A \subset X$ плотно во множестве $B \subset X$, если для любого элемента $b \in B$ можно найти сколь угодно близкий к нему элемент $a \in A$. А точнее, для любого $b \in B$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $a \in A$ такой, что $\|b - a\| < \varepsilon$.

Это же определение можно сформулировать и в такой форме. Множество $A \subset X$ плотно в B, если замыкание A содержит B.

Если $B = X$, говорят, что A всюду плотно (в X).

Определение. Нормированное пространство $\langle X, \|\cdot\| \rangle$, в котором есть счетное всюду плотное множество, называется сепарабельным пространством.

Самый простой примером сепарабельного пространства – пространство $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = |x|$. Счетным всюду плотным множество в этом пространстве является, например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Плотностью этого множества в $\mathbb{R}$ мы постоянно пользуемся, когда в расчетах заменяем иррациональные числа близкими к ним рациональными.

Рассмотрим пространство $C[a,b]$ непрерывных вещественных функций на отрезке $[a,b]$, наделенное нормой

$$\|f\| = \|f\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что сходимость по норме (8) есть равномерная сходимость на отрезке $[a,b]$. Поэтому норму (8) часто называют равномерной нормой. Также используется название «чебышёвская норма» по имени известного российского математика Пафнутия Львовича Чебышёва, который одним из первых начал изучать приближение функций многочленами по этой норме.

Из теоремы Вейерштрасса сразу же следует, что множество $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x]$ алгебраических многочленов с вещественными коэффициентами плотно в пространстве $C[a,b]$.

Следствие. *Пространство $C[a,b]$ сепарабельно. В качестве счетного всюду плотного множества можно взять множество $\mathcal{Q}$ многочленов с рациональными коэффициентами.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}_n$ – множество многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами, а $\mathcal{Q}_n$ – подмножество $\mathcal{P}_n$ многочленов с рациональными коэффициентами. Нетрудно проверить, что множество $\mathcal{Q}_n$ счетно и всюду плотно в $\mathcal{P}_n$ относительно равномерной нормы на $[a,b]$. Но тогда множество $\mathcal{Q}$ также счетно, как счетное объединение счетных множеств, и плотно в $\mathcal{P}$. Отсюда следует, что $\mathcal{Q}$ плотно и в $C[a,b]$.

Задачи к лекции

1. Покажите, что если в нормированном пространстве $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ множество A плотно в B, а B плотно в X, то A плотно в X.

2. Покажите, что если A всюду плотно в $\langle X, \|\cdot\|\rangle$, то любой элемент $x \in X$ представляется в виде суммы

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad a \in A.$$

Сходимость ряда понимается в том смысле, что

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n} a_k \right\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

3. Пусть $\mathcal{R}[a, b]$ есть пространство функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, наделенное нормой

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Докажите, что множество многочленов $\mathcal{P}$ всюду плотно в $\mathcal{R}[a, b]$, другими словами, докажите аналог теоремы Вейерштрасса для пространства $\mathcal{R}[a, b]$.

4. Пусть функция f дифференцируема на $[0, 1]$, и модуль ее производной ограничен числом L. Оцените скорость приближения функции f многочленами P_n, т. е. получите оценку вида

$$\|f - P_n\|_{C[a,b]} \leqslant c_n(L),$$

где величина $c_n(L)$ зависит только от n и L, и стремится к 0 при $n \to \infty$.

Список использованной литературы

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Гл. 4, § 5. М.: «Наука», 1974.

2. Бернштейн С.Н. Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей / Собрание сочинений. Т. 1. М. : АН СССР, 1952.

3. Зорич В.А. Математический анализ. Гл. 16, § 4. Математический анализ. Ч. 2. М.: «Наука», 1984.

4. Биография Вейерштрасса на английском.

   `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Indexes/W.html`

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Гл. 4, § 5. М.: «Наука», 1974.

Дополнительная

1. Бернштейн С.Н. Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей / Собрание сочинений. Т. 1. М. : АН СССР, 1952.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. Гл. 2, § 7, п. 4. М.: Изд-во МГУ, 1987.

3. `http://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_Безье`

4. `http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-bezier`

5. Биография Вейерштрасса на английском.

   `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Indexes/W.html`

6. Pinkus A. Weierstrass and Approximation Theory // J. Approx. Theory 107 (2000), 1-66.

   `http://www.math.technion.ac.il/hat/fpapers/wap.pdf`