Применение теории вычетов для вычисления интегралов Римана

П.Ю. Глазырина

Уральский федеральный университет

$C_R(z_0) = \{z_0 + Re^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$ – окружность, радиуса R с центром в точке z_0, ориентированная против часовой стрелки, $C_R = C_R(0) = \{Re^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$.

1 Тригонометрические интегралы по отрезку $[0, 2\pi]$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt, \tag{1}$$

где $R(u, v) = \dfrac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ – рациональная функция, $P(u, v)$, $Q(u, v)$ – многочлены двух переменных. Этот интеграл можно представить как интеграл по окружности C_1. Параметризуем окружность: $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, тогда $1/z = e^{-it}$,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$$dz = ie^{it}dt$$

и

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_{C_1} F(z)\frac{dz}{iz},$$

где

$$F(z) = R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Поскольку R – рациональная функция, то F определена в $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа устранимых особых точек и полюсов. Интеграл $\displaystyle\int_1 F(z)\frac{dz}{iz}$ считается по теореме Коши о вычетах.

В некоторых случаях интегралы по промежуткам, длиной меньше 2π удается свести к интегралам вида (1), например,

$$\int_0^{\pi} R(\cos t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R(\cos t)dt, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R(\sin t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R(\sin t)dt.$$

Пример 1. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t + \alpha},$$

здесь α – фиксированное вещественное число, $|\alpha| > 1$. Перейдем к интегралу по окружности C_1:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\alpha} \cdot \frac{1}{iz}dz = \frac{2}{i}\int_{C_1} \frac{1}{z^2+2\alpha z+1}dz.$$

Для вычисления интеграла по теореме Коши о вычетах нужно определить изолированные особые точки подынтегральной функции, лежащие внутри C_1 (т. е. в круге $|z| < 1$). Многочлен $z^2+2\alpha z+1$ обращается в нуль в точках

$$z_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}, \quad z_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}.$$

Поскольку $z_1 z_2 = 1$, и $|z_1| < |z_2|$, то $|z_1|$ меньше 1, а $|z_2|$ больше 1. Подынтегральная функция представляется в виде

$$F(z) = \frac{1}{z^2+2\alpha z+1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

поэтому она имеет внутри C_1 единственную особую точку – простой полюс z_1. Считаем вычет

$$\operatorname*{Выч}_{z_1} F = \lim_{z\to z_1} f(z)(z-z_1) = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

И наконец,

$$I = \frac{2}{i}\cdot 2\pi i \cdot \operatorname*{Выч}_{z_1} F = \frac{4\pi}{2\sqrt{\alpha^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

2 Несобственные интегралы

2.1 Две леммы о пределе интеграла по дуге окружности

Лемма 1 (О пределе интеграла по дуге окружности)**.** Пусть $0 < \alpha \leqslant 2\pi$, $R_0 > 0$.

1) $D = \{z \mid |z| \geqslant R_0,\ \varphi_0 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_0+\alpha\}$, $R > R_0$,

$$L_R = C_R \cap D = \{Re^{it} \mid \varphi_0 \leqslant t \leqslant \varphi_0+\alpha\},$$

f непрерывна в D и

$$zf(z) \to A \quad \text{при} \quad R \to +\infty. \tag{2}$$

Тогда

$$\int_{L_R} f(z)dz \to Ai\alpha \quad \text{при} \qquad R\to\infty.$$

2) $z_0 \in \mathbb{C}$, $D = \{z \mid 0 < |z-z_0| \leqslant R_0,\ \varphi_0 \leqslant \arg(z-z_0) \leqslant \varphi_0+\alpha\}$, $0 < R < R_0$,

$$L_R = C_R(z_0) \cap D = \{z_0 + Re^{it} \mid \varphi_0 \leqslant t \leqslant \varphi_0+\alpha\},$$

f непрерывна в D и

$$(z - z_0)f(z) \to A \quad \text{при} \quad R \to +0. \tag{3}$$

Тогда

$$\int_{L_R} f(z)dz \to Ai\alpha \quad \text{при} \quad R \to 0.$$

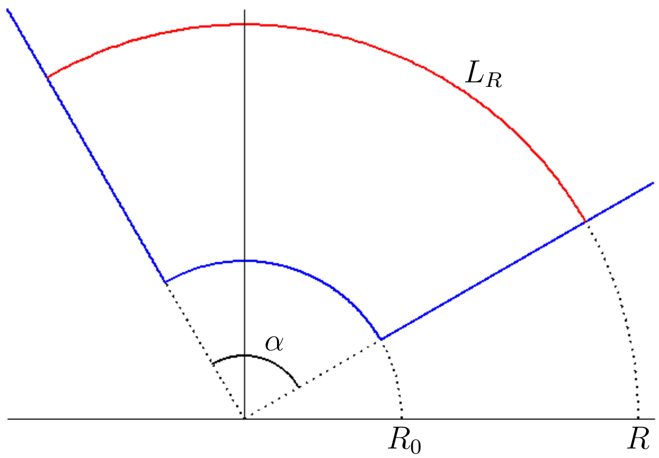

Рис. 1: Множество D в случае 1)

Замечание 1. Если f аналитична в $O(\infty)$, то условие (2) эквивалентно тому, что $f(z) \to 0$, $z \to \infty$, и точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой $f(z)$. В частности, для $f(z) = P(z)/Q(z)$, P, Q – многочлены и $deg(P) + 1 \leqslant deg(Q)$, то (2) выполняется.

Замечание 2. Если f аналитична в $\check{O}(z_0)$, то при $A \neq 0$ условие (3) означает, что z_0 – простой полюс f, при $A = 0$ условие (3) означает, что z_0 – точка аналитичности или устранимая особая точка f.

Доказательство. 1)

$$\int_{L_R} f(z)dz = \int_{L_R} \frac{zf(z)}{z}dz = \int_{L_R} \frac{zf(z) - A}{z}dz + \int_{L_R} \frac{A}{z}dz = I_1(R) + I_2(R).$$

В силу (2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $z \in D$, $|z| > \Delta$, выполняется неравенство $|zf(z) - A| < \varepsilon$. Поэтому для $R > \Delta(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|I_1(R)| \leqslant |L_R|\frac{\varepsilon}{R} = \alpha R\frac{\varepsilon}{R} = \alpha\varepsilon.$$

Параметризуем L_R: $z = Re^{it}$, $t \in [\varphi_0, \varphi_0 + \alpha]$, тогда $dz = Rie^{it}$ и

$$I_2(R) = A\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\alpha} \frac{Rie^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} = Ai\alpha.$$

Утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) доказывается аналогично.

Лемма 2 (Лемма Жордана)**.** Пусть $b \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$,

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant b,\ |z| \geqslant R_0\},$$

$$L_R = C_R \cap D = \{Re^{it},\ t \in [-\varphi_R, \varphi_R]\},$$

функция $\widetilde{f}$ непрерывна в D,

$$\widetilde{f}(z) \to 0, \quad z \to \infty.$$

Тогда

$$\int_{L_R} \widetilde{f}(z) e^{i\alpha z} dz \to 0, \quad R \to +\infty.$$

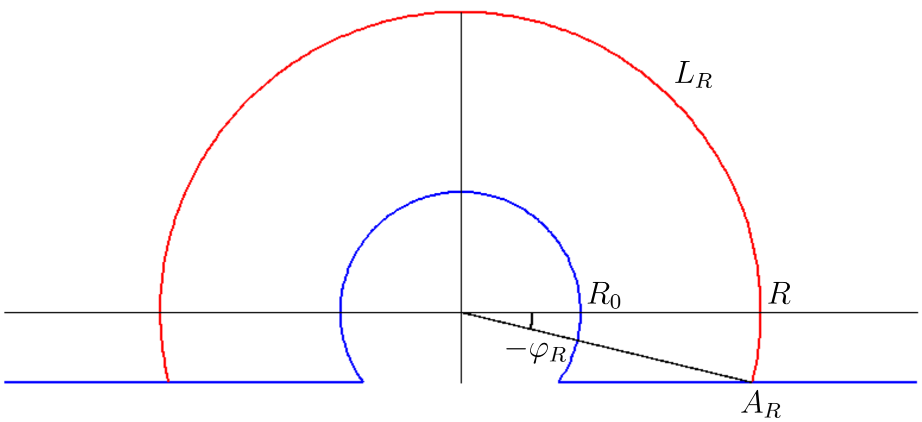

Рис. 2: Множество D

Доказательство. Обозначим $M(R) = \max\limits_{z \in L_R} |f(z)|$, по условию $M(R) \to 0$, при $R \to \infty$. В дальнейшем потребуются неравенства

$$\frac{2}{\pi} t \leqslant \sin t \leqslant t, \quad t \in [0, \pi/2], \tag{4}$$

$$\sin \varphi_R = \frac{|b|}{R}, \quad \varphi_R \leqslant \frac{\pi}{2} \sin \varphi_R \leqslant \frac{\pi |b|}{2R}. \tag{5}$$

Если $z \in L_R$, $z = Re^{it} = R\cos t + i \sin t$, то

$$\left| e^{i\alpha z} \right| = \left| e^{i\alpha R \cos t - \alpha R \sin t} \right| = e^{-\alpha R \sin t}.$$

$$|I(R)| = \left|\int_{L_R} f(z)e^{i\alpha z}dz\right| \leqslant \int_{L_R} |f(z)||e^{i\alpha z}||dz| =$$

[это криволинейный интеграл первого рода, $|dz| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = Rdt$]

$$\leqslant M(R)\int_{-\varphi_R}^{\pi+\varphi_R} e^{-\alpha R\sin t}Rdt = M(R)2R\int_{-\varphi_R}^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin t}dt =$$

$$= M(R)2R\left(\int_{-\varphi_R}^{0} e^{-\alpha R\sin t}dt + \int_{0}^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin t}dt\right). \tag{6}$$

Оценим интегралы, стоящие в скобках. Для первого интеграла, делая замену t на $-t$ и применяя второе неравенство из (4), получаем оценку

$$\int_{-\varphi_R}^{0} e^{-\alpha R\sin t}dt = \int_{0}^{\varphi_R} e^{\alpha R\sin t}dt \leqslant \int_{0}^{\varphi_R} e^{\alpha Rt}dt = \frac{1}{\alpha R}e^{\alpha Rt}\Big|_0^{\varphi_R} = \frac{e^{\alpha R\varphi_R}-1}{\alpha R}.$$

Далее используем неравенство (5):

$$\frac{e^{\alpha R\varphi_R}-1}{\alpha R} \leqslant \frac{e^{\alpha R\pi|b|/(2R)}-1}{\alpha R} = \frac{e^{\alpha\pi|b|/2}-1}{\alpha R}.$$

Для второго интеграла, применяя первое неравенство из (4), получаем оценку

$$\int_{0}^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin t}dt \leqslant \int_{0}^{\pi/2} e^{-\alpha R2t/\pi}dt = \frac{\pi}{-\alpha R2}e^{-\alpha R2t/\pi}\Big|_0^{\pi/2} \leqslant \frac{\pi}{2\alpha R}.$$

Подставляем эти оценки в (6):

$$|I(R)| \leqslant M(R)2R\left(\frac{e^{\alpha\pi|b|/2}-1}{\alpha R} + \frac{\pi}{2\alpha R}\right) = M(R)2\frac{e^{\alpha\pi|b|/2}-2+\pi}{\alpha} \to 0, \quad R\to\infty.$$

Лемма доказана.

Список литературы

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1. (Гл. 4, п. 3.4).

2. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного (Гл. 5, §2).

3. Saff E.B., Snider A.D. Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering, Science, and Mathematics (Chapter 6).