Вопросы к экзамену по ТФКП
МТ-3 (2014–2015)

1. Поле комплексных чисел. Комплексная плоскость. Функция $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Алгебраическая, тригонометрическая, экспоненциальная формы записи комплексного числа.
2. Норма в $\mathbb{C}$. Сходимость последовательности комплексных чисел, связь со сходимостью последовательностей вещественной и мнимой частей, последовательностей модулей и аргументов. Критерий Коши сходимости последовательности.
3. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция, сфера Римана. Образы прямых и окружностей при стереографической проекции на сферу Римана. Метрика в $\overline{\mathbb{C}}$.
4. Пути и кривые в $\mathbb{C}$ (определения).
5. Связность и линейная связность множеств. Эквивалентность связности и линейной связности для открытого множества. Область, многосвязные и односвязные области. Теорема Жордана (формулировка).
6. Комплекснозначные функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функции в точке.
7. Дифференцируемость функции в точке. Критерий дифференцируемости функции в точке, условия Коши–Римана.
8. Гармонические функции. Гармоничность вещественной и мнимой частей аналитической функции. Восстановление аналитической функции в односвязной области по ее вещественной или мнимой части.
9. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Определение конформного отображения.
10. Функция e^z. Определение; свойства; отображения, осуществляемые e^z; области однолистности.
11. Общие соображения относительно обращения аналитических функций. Однолистность. Теорема о сохранении области и существовании обратной функции при однолистном отображении.
12. Функция $\operatorname{Ln} z$. Определение; свойства; однозначные ветви. Взаимодействие ветвей $\operatorname{Ln} z$.
13. Функция z^n. Определение; свойства; отображения, осуществляемые z^n; области однолистности.
14. Функция $\sqrt[n]{z}$. Определение; свойства; однозначные ветви. Взаимодействие ветвей $\sqrt[n]{z}$ и поверхность Римана.
15. Общее степенное выражение. Определение, свойства.
16. Тригонометрические функции. Определение, периодичность, нули. Определение и однозначные ветви обратных тригонометрических функций.

17. Функция Жуковского.
18. Дробно-линейное отображение. Свойства: множество значений, групповое свойство, конформность, круговое свойство, сохранение симметрии точек, отображение круговых областей, построение по трем точкам, существование дробно-линейного отображения одной кругово области на другую.
19. Общий вид дробно-линейного отображения верхней полуплоскости на единичный круг с центром в нуле, единичного круга на единичный круг, верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость.

Интегрирование функций комплексного переменного

20. Интегрирование функций комплексного переменного. Связь интеграла от функции по кривой с криволинейными интегралами второго рода от вещественной и мнимой частей функции. Свойства интеграла.
21. Лемма об аппроксимации интеграла по кривой интегралом по ломаной.
22. Интегрирование функций комплексного переменного. Связь интеграла от функции по кривой с криволинейными интегралами второго рода от вещественной и мнимой частей функции.
23. Первообразная, формула Ньютона – Лейбница.
24. Эквивалентность свойств существования первообразной, равенства нулю интеграла по замкнутому пути и независимости интеграла от пути интегрирования.

Интегральная теорема Коши

25. Интегральная теорема Коши для треугольного контура. Интегральная теорема Коши для односвязной области.
26. Обобщенная интегральная теорема Коши (для интеграла по границе односвязной области, формулировка). Интегральная теорема Коши для звездной области.
27. Интегральная теорема Коши для системы контуров (формулировка и идея доказательства).
28. Интегральная формула Коши. Обобщенная интегральная формула Коши (формулировка). интегральная формула Коши для системы контуров (с доказательством на основе интегральной теоремы Коши для системы контуров).
29. Теорема о среднем для аналитической функции.
30. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость интеграла типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.
31. Теорема Морера.

Степенные ряды, ряды Лорана

32. Ряды комплексных чисел. Функциональные ряды. Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов.
33. Равномерная сходимость функционального ряда внутри области. Критерий равномерной сходимости внутри области.
34. Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов.
35. Теорема Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций.
36. Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда. Теорема Коши – Адамара.
37. Теорема Коши о разложении аналитической (голоморфной) функции в степенной ряд.
38. Теорема Лиувилля для целых функций.
39. Свойства функции комплексного переменного, эквивалентные аналитичности.
40. (Внутренняя) теорема единственности для аналитических функций.
41. Ряды Лорана. Кольцо сходимости. Характер сходимости и свойства суммы ряда Лорана в кольце сходимости.
42. Теорема Лорана о разложении аналитической в кольце функции в ряд Лорана.

Изолированные особые точки аналитической функции. Теорема Коши о вычетах

43. Изолированные особые точки аналитической функции. Характеризация устранимой особой точки.
44. Характеризация полюса.
45. Нули аналитической функции. Характеризация нуля (вместе со вспомогательными утверждениями). Связь между нулями и полюсами.
46. Характеризация существенно особой точки. Теорема Сохоцкого. Большая теорема Пикара (формулировка).
47. Бесконечность как изолированная особая точка.
48. Вычеты. Теорема Коши о вычетах.
49. Вычисление вычета относительно полюса. Теорема о сумме вычетов.
50. Утверждение о пределе интеграла по дуге окружности, когда радиус окружности стремится к 0 или к ∞. Лемма Жордана.
51. Вычисление интегралов вида $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$.
52. Логарифмический вычет. Принцип аргумента.

53. Теорема Руше о нулях аналитической функции.

Геометрические вопросы ТФКП

54. Принцип сохранения области (вместе с леммой).
55. Принцип максимума модуля для аналитической функции. Следствие. Принцип максимума–минимума для гармонических функций.
56. Критерий локальной однолистности.
57. Достаточное условие однолистности. Соответствие границ при конформном отображении.
58. Понятие о теореме Римана.
59. Принцип симметрии Римана – Шварца.
60. Непосредственное аналитическое продолжение. Правильные и особые точки функции, аналитической в круге. Существование особой точки суммы степенного ряда на границе круга сходимости.
61. Отображение полуплоскости на прямоугольник.

Для тех, кто сдал коллоквиум, с экзамена снимаются доказательства вопросов 1–6, 9–21.

Примеры обязательных задач на вычисление интегралов

1. $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{z dz}{(e^z-1)^2}$

2. $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{dz}{\sin z(\operatorname{ch} 2z+1)}$

3. $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{dz}{\cos z(1-\sin z)}$

4. $\displaystyle\int_{|z|=2} z\cos\frac{z}{z+1}\,dz$

5. $\displaystyle\int_{|z|=1} z\cdot\sin z\cdot\sin\frac{1}{2z}\,dz$

6. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z+1}e^{1/z}\,dz$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\varphi}{1-a\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad 0<a<1$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+a^2)^2}\,dx, \quad a>0$

11. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x-2)}{(x-1)(x^2+a^2)}\,dx, \quad a>0$

12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3(x^2+1)}\,dx$

Дополнительные задачи

1. Пусть функции $f(z)$, $g(z)$ – аналитические в точке a и $f(a) = g(a) = 0$. Докажите, что
$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}, \tag{1}$$
$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{g'(z)f^2(z)}{f'(z)g^2(z)}.$$
Верно ли равенство (1), если точка a является полюсом f и g?

2. Докажите, что если $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$, то
$$\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg} z = \frac{2}{\pi}\arg\frac{i-z}{i+z} = \operatorname{sign}\cos\varphi.$$

3. Выделите однозначные аналитические ветви функции $(z^2-1)^{1/2}$ в области $|z| > 1$. Докажите, что функция $(z^2-1)^{1/3}$ не имеет однозначных аналитических ветвей в этой области.

4. Докажите, что функция $f(z) = z^2 + 2z + 7$ однолистна в круге $|z| < 1$.

5. Найдите число корней уравнения $z^6 - 6z + 10 = 0$ в области $|z| > 1$.

6. Доказать, что как бы мало ни было $\rho > 0$, при достаточно большом n все нули функции
$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n}$$
находятся в круге $|z| < \rho$.

7. Пусть $h(z)$ – полином степени точно m, $h(z) \neq 0$, $|z| = 1$, при обходе $|z| = 1$ в положительном направлении $\operatorname{Arg} h(z)z^{-m/2}$ увеличивается на $m\pi$. Докажите, что h имеет все m корней в круге $|z| < 1$.

8. Докажите лемму Шварца. Пусть функция f аналитична в круге $K : |z| < 1$, $f(0) = 0$ и $|f(z)| \le 1$, $|z| < 1$, тогда
$$|f(z)| \le |z|,\ |z| < 1, \quad |f'(0)| \le 1.$$
Равенство в первом неравенстве в точках $0 < |z| < 1$ и равенство во втором неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $f(z) = e^{i\alpha}z$.

9. Пусть f – целая функция и $\operatorname{Re} f(z) \le M$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Докажите, что $f \equiv \text{const}$ в $\mathbb{C}$.

10. Докажите теорему Лиувилля для гармонических функций. Если u гармонична в $\mathbb{C}$ и ограничена сверху (снизу), то $u \equiv \text{const}$ в $\mathbb{C}$.

11. Докажите, что если функция $u(x, y)$ гармонична в верхней полуплоскости $\Pi = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, непрерывна замкнутой полуплоскости $\overline{\Pi} = \{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$, ограничена в $\overline{\Pi}$ и $u(x, 0) = 0$, то u тождественно равна нулю в $\overline{\Pi}$.

12. Докажите теорему о среднем значении для гармонических функций: если функция $u(z) = u(x, u)$ гармонична в круге $|z - z_0| < r$, то для любого ρ, $0 < \rho < r$, выполняется равенство

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|z-z_0|=\rho} u(z) dz.$$

13. Докажите, что если $f(z)$ аналитична и не обращается в нуль в области G, то $\ln |f(z)|$ гармонична в G.

14. Получите основную теорему алгебры как следствие теоремы Лиувилля.

15. Пусть функция f аналитична в области G за исключением конечного множества E, состоящего из полюсов и с. о. т f, функция f однолистна в $G \setminus E$. Докажите, что в этом случае E состоит только из одного простого полюса.

16. Пусть f аналитична в области G и принимает в G вещественные значения. Докажите, что f тождественно равна константе в G.

17. Пусть f аналитична в области G и $|f(z)| \equiv \text{const}$ в G. Докажите, что тогда и f тождественно равна константе в G.

18. Пусть f аналитична в области G и для каждой точки $z \in G$ найдется такое n, что $f^{(n)}(z) = 0$. Докажите, что f – многочлен.

19. Пусть $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ и $|f(z)| \leq M$, $|z| = 1$. Докажите, что $|a_k| \leq M$, $0 \leq k \leq n$.

20. Пусть f – целая и $|f(z)| \leq |z|^2$ для достаточно больших z. Докажите, что f – многочлен второй степени.

21. Пусть Γ – замкнутая жорданова спрямляемая кривая, положительно ориентированная, проходящая через точку $2 + 3i$ и

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\cos \zeta}{\zeta - z} d\zeta.$$

Найдите значения следующих пределов

$$\lim_{\substack{z \to 2+3i \\ z \in V_\Gamma}} G(z), \qquad \lim_{\substack{z \to 2+3i \\ z \in \mathbb{C} \setminus \{\Gamma \cup V_\Gamma\}}} G(z).$$

(V_Γ – внутренность кривой Γ).

22. Пусть f аналитична и ограничена числом M в замкнутом круге $|z| \le 1$. Докажите, что

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!M}{(1-|z|)^n}, \quad |z| < 1.$$

23. Пусть f аналитична в области G и имеет нули $z_1, \dots z_m$ кратности $\nu_1, \dots, \nu_m$ соответственно. Докажите, что существует аналитическая в G функция g такая, что

$$f(z) = (z - z_1)^{\nu_1} \cdots (z - z_m)^{\nu_m} g(z).$$

24. (Формула Коши для бесконечной области) Пусть Γ – замкнутая, жордановая, спрямляемая кривая, положительно ориентированная относительно V_Γ, область D содержит $\mathbb{C} \setminus V_\Gamma$, функция f аналитична в области D и

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = A.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} -f(z) + A, & z \in \mathbb{C} \setminus \{V_\Gamma \cup \Gamma\}, \\ A, & z \in V_\Gamma. \end{cases}$$

25. Пусть f удовлетворяет условиям задачи 24 и ∞ есть нуль f, кратности не менее 2. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

26. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\, dx}{x^2 + 16}$

27. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{2/7}(x^2+1)}$

28. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx, \quad 0 < \alpha < 1$

29. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x + \pi^2)}, \quad a > 0$

30. На основании принципа симметрии Римана – Шварца постройте аналитическое продолжение функции $\ln|z| + i \arg z$, $0 \le \arg z \le \pi$ через луч $x < 0$.

31. Докажите следующее обобщение теоремы Руше. Пусть Γ есть замкнутая, жордановая, спрямляемая, положительно ориентированная кривая, лежащая в области G вместе со своей внутренностью V_Γ. Функции f, g мероморфны в G (т. е. аналитичны в G за исключением полюсов), не имеют полюсов на Γ и $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in \Gamma$. Тогда $N_f - P_f = N_{f+g} - P_{f+g}$, где N_f обозначает число нулей f в V_Γ с учетом кратности, N_f обозначает число полюсов f в V_Γ с учетом кратности.

32. Пусть $f(z)$ – рациональная функция с полюсами $a_1, \ldots, a_m$, среди которых нет целых чисел, $|f(z)| \le \frac{C}{z^2}$ при $z \to \infty$. Доказать, что

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=a_k}(f(z)\pi \operatorname{ctg} \pi z).$$

Указание. Пусть Γ_N есть граница квадрата с вершинами $(N+1/2)(1+i)$, $(N+1/2)(-1+i)$, $(N+1/2)(-1-i)$, $(N+1/2)(1-i)$, $N \in \mathbb{N}$.

1) Показать, что существует константа M такая, что $|\pi \operatorname{ctg}(\pi z)| \le M$ для всех N и всех $z \in \Gamma_N$.

2) Доказать, что

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{|z|=N+1/2} f(z)\pi \operatorname{ctg} \pi z dz = 0.$$

3) Вычислить интеграл из п. 2 по теореме Коши о вычетах.

33. Используя результат задачи 32, найти суммы рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

34. Пусть $a > 0$, $g \in L_2[-a, a]$,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} g(x) e^{izx} dx. \tag{2}$$

Докажите, что $f(z)$ – целая функция и для некоторого C

$$|f(z)| \le C e^{a|z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

(Это утверждение есть часть так называемой теоремы Винера – Пэли. Сама теорема утверждает, что целая функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству (3) и $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, тогда и только тогда, когда f можно представить в виде (2).)