Свойства функций, непрерывных на отрезке

Лекция для групп МК-160001, МК-160002, МК-160005
по курсу "Математический анализ" (08.11.2016)
Институт математики и компьютерных наук
Лектор А.А. Шабуров
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
г. Екатеринбург

Определение 1. Функция f называется *непрерывной справа в т. a*, если $f(a+0) = f(a)$. Функция f называется *непрерывной слева в т. a*, если $f(a-0) = f(a)$. Непрерывность функции в точке равносильна её непрерывности в этой точке и справа и слева.

Определение 2. Функцию называют *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна во всех точках интервала (a, b), т. е. во внутренних точках отрезка, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций обозначают $C[a, b]$ и, если f непрерывна на $[a, b]$, пишут $f \in C[a, b]$.

Наряду с непрерывностью на отрезке рассматривают непрерывность функций на интервале, на полуотрезке, полуоси и всей оси. Множество функций, непрерывных на интервале (a, b), обозначают $C(a, b)$. Обозначения в остальных случаях аналогичны.

Понятно, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то на $[a, b]$ непрерывны функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, а если $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, то непрерывна и функция $f(x)/g(x)$.

Сформулируем следующий вопрос: если функция непрерывна на отрезке, будет ли она ограничена на этом отрезке? Ответ на этот вопрос следует из следующей теоремы.

Теорема 1 (Первая теорема Вейерштрасса). *Если* $f(x) \in C[a, b]$, *то* $f(x)$ *– ограничена на* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $f \in C[a, b]$. Докажем, что f ограничена на $[a, b]$, т. е.

$$\exists\, L\ \forall\, x \in [a, b] : |f(x)| \leq L.$$

Докажем теорему от противного. Предположим, что функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$, т. е.

$$\forall\, L\ \exists\, x = x_L \in [a, b] : |f(x)| > L.$$

Тогда, в частности, для любого натурального n найдется точка $x = x_n \in [a, b]$ такая, что $|f(x_n)| > n$:

$$L = 1\ \exists\, x_1 \in [a, b] : |f(x_1)| > 1,$$

$$L = 2\ \exists\, x_1 \in [a, b] : |f(x_2)| > 2, \ldots$$

$$L = n\ \exists\, x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n \ldots$$

Рассмотрим получившуюся последовательность $\{x_n\}$. Она ограничена, т. к. все её члены принадлежат отрезку $[a, b]$. По теореме Больцано – Вейерштрасса, последовательность $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\} : x_{n_k} \to c$.

Поскольку $a \leq x_{n_k} \leq b$, то и $a \leq c \leq b$, т. е. $c \in [a, b]$. По построению имеем

$$|f(x_{n_k})| > n_k, \quad \text{поэтому} \quad \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty.$$

С другой стороны, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = c$, поэтому по определению Гейне

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c).$$

Получили противоречие. Теорема доказана. $\square$

Домашнее задание. Будет ли теорема 1 справедлива для $f \in C(a, b)$?

Оказывается, что функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, в некоторых точках отрезка достигает точную верхнюю и точную нижнюю грани своих значений на $[a, b]$. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 2 (Вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть функция $f(x) \in C[a, b]$. Обозначим*

$$M := \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad m := \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Тогда существуют точки $c, d \in [a, b]$ такие, что

$$f(c) = M, \quad f(d) = m.$$

Доказательство. Заметим, что точная верхняя (точная нижняя) грань значений функции существует, так как согласно теореме 1 из непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следует её ограниченность. Значит M, m – конечные числа.

Итак, нужно доказать, что существует точка c на отрезке $[a, b]$ такая, что $f(c) = M$. Рассуждаем от противного. Предположим, что точная верхняя грань не достигается:

$$\forall\, x \in [a, b] : f(x) < M,$$

т. е. $\forall\, x \in [a, b] : M - f(x) > 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\phi(x) := \dfrac{1}{M - f(x)}$, определенную на отрезке $[a, b]$. Функция $\phi(x) \in C[a, b]$, как частное двух непрерывных функций. Значит, к ней можно применить первую теорему Вейерштрасса. Имеем

$$\exists\, L > 0\ \forall\, x \in [a, b] : \phi(x) = \frac{1}{M - f(x)} \le L,$$

Последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$M - f(x) \ge \frac{1}{L} \ \Rightarrow\ f(x) \le M - \frac{1}{L}.$$

Выходит, что $M - \frac{1}{L}$ – верхняя граница функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, чего быть не может, ибо M – наименьшая из всех верхних границ. Полученное противоречие доказывает, что на отрезке $[a, b]$ существует точка c такая, что $f(c) = M$.

Существование точки d со свойством $f(d) = m$ доказывается аналогично. Теорема 2 доказана. ☐

Таким образом, можно говорить о максимальном значении функции, непрерывной на отрезке, и писать в этом случае не $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, а $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$,

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Домашнее задание. Покажите, что для интервала теорема, вообще говоря, не верна. Приведите пример функции, ограниченной на интервале (a, b), которая не достигает своих точных граней.

Теорема 3 (Коши о промежуточных значениях). *Пусть функция $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого числа C, заключенного между значениями $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $C = f(\xi)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $C = 0$, а числа $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, т. е. $f(a)f(b) < 0$. Попробуем “поймать точку”, т. е. найти эту точку методом деления отрезка пополам. Точку “удалось поймать”, если на k – том шаге $f(\xi_k) = C$.

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если в точке деления значение функции равно нулю, то в качестве точки ξ можно взять эту точку деления, т. е. $\xi = \frac{b-a}{2}$. Разумеется, на этом доказательство теоремы заканчивается.

А если в точке деления значение функции $f(x)$ отлично от нуля, то в концах одного из получившихся отрезков значения $f(x)$ имеют разные знаки. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$, т. е. та половина, где $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Заметим, что $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$. Делим теперь отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и повторяем предыдущее рассуждение, т. е. если в точке деления функция обращается в нуль, то нужная точка найдена и теорема доказана. В противном случае выбираем тот из полученных отрезков, в концах которого функция принимает значения разных знаков. Обозначим этот отрезок $[a_2, b_2]$, его длина в два раза меньше длины отрезка $[a_1, b_1]$.

Продолжим этот процесс. Если мы не встретим нуль функции на каком-то шаге, то получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, длины которых $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ стремятся к нулю. Значит, согласно лемме Коши–Кантора о вложенных отрезках существует точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) = f^2(\xi) = C^2,$$

т. к. $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \xi,\ b_n \xrightarrow{n\to\infty} \xi$. С другой стороны, $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ и тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) = f^2(\xi) = C^2 \leq 0.$$

Значит $C = 0$.

Чтобы доказать теорему Коши о промежуточном значении в общем случае $f(a) < f(b)$, используем вспомогательную функцию $g(x) := f(x) - C$. Функция $g(x) \in [a, b]$ и в концах отрезка принимает значения разных знаков:

$$g(a) = f(a) - C < 0, \quad g(b) = f(b) - C > 0,$$

т. к. $f(a) < C < f(b)$. Значит, по доказанному существует точка $\xi \in [a, b]$, в которой $g(\xi) = 0$. Таким образом, $f(\xi) - C = 0$, следовательно, $f(\xi) = C$. Теорема 3 доказана. $\square$

Пример. *Доказать, что уравнение* $x^3 - 3x + 1 = 0$ *имеет корень на отрезке* $[0, 1]$.

Решение. Обозначим $f(x) = x^3 - 3 + 1$. Тогда $f(0) = 1, f(1) = -1$. Значит, $f(x)$ меняет знак на отрезке $[0, 1]$ и, очевидно, непрерывна. По теореме Коши о промежуточных значениях существует $\xi \in [0, 1]$ со свойством $f(\xi) = 0$. Заметим, что с помощью деления отрезка пополам можно уточнить положение корня, найти его с любой нужной точностью.

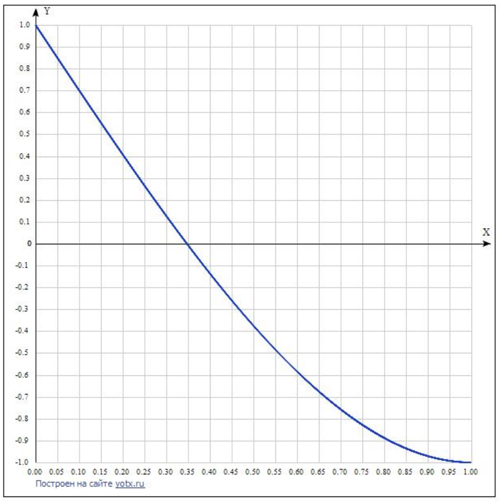

Рис. 1: График функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[0, 1]$.

Следствие 1. *Пусть X – некоторый промежуток, т.е. отрезок, интервал или полуинтервал, и функция $f(x)$ непрерывна на этом промежутке. Положим $M = \sup\limits_{x \in X} f(x)$, если значения $f(x)$ на X ограничены сверху, и $M := +\infty$ в противном случае. Аналогично $m = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ или $m := -\infty$. Тогда для каждого числа $C \in (m, M)$ существует точка ξ такая, что $f(\xi) = C$.*

Домашнее задание. На этой лекции мы не будем доказывать следствие из теоремы 3. Докажите следствие 1 самостоятельно.

Наряду с функциями, непрерывными на промежутке, рассматривают кусочно непрерывные функции.

Определение 3. Функция называется *кусочно непрерывной на промежутке,* если она непрерывна во всех точках промежутка, за исключением конечного множества точек, которые являются её точками разрыва первого рода.

Другими словами, промежуток, на котором функция кусочно непрерывна, можно разбить на конечное число интервалов, на которых функция непрерывна, а в концах этих интервалов имеет конечные односторонние пределы. Отметим, что теорема 1 верна и для функций кусочно непрерывных на отрезке, а в теоремах 2, 3 заменить непрерывность функции на кусочную нельзя.

Список литературы

[1] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.М. Математический анализ. В 2-х томах. / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х.М. Сендов. – Москва : Изд-во МГУ, Ч.1: 2-е изд., перераб., 1985. – 662 с.; Ч.2 – 1987. – 358 с.

[2] Киркинский А.С. Математический анализ: Учебное пособие для вузов / А.С. Киркинский. – Москва : Академический Проект, 2006. – 526 с.

[3] Рудин У. Основы математического анализа / У. Рудин. – Москва : Мир, 1976. – 320 с.

[4] Теляковский С.А. Лекционные курсы НОЦ : Вып. 11: Курс лекций по математическому анализу. Семестр I. С.А. Теляковский – Москва : Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (МИАН), 2009. – 212 с.