Вопросы к коллоквиуму № 2 по математическому анализу МТ-101, 102 (I семестр, 2016–2017)

Числовые последовательности

1. Определение последовательности, ограниченной последовательности, предела последовательности.
2. Свойства сходящихся последовательностей:

   1) единственность предела;

   2) ограниченность сходящейся последовательности;

   3) сохранение свойства сходимости последовательности при изменении , отбрасывании, добавлении, конечного числа членов последовательности;

   4) сохранение знака членов последовательности с ненулевым пределом;

   5) неравенства между пределами;

   6) правило двух милиционеров.
3. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.
4. Бесконечно малая и бесконечно большая последовательности, их свойства.
5. Предел монотонной последовательности.
6. Критерий Коши сходимости последовательности.
7. Определение подпоследовательности, частичного предела последовательности.
8. Характеризация частичного предела.
9. Теорема Больцано – Вейерштрасса для последовательностей.
10. Теорема о верхнем пределе. (Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху и не сходится к $-\infty$. Тогда точная верхняя грань множества ее частичных пределов сама является частичным пределом)

Некоторые топологические понятия на числовой прямой

1. Внутренняя, внешняя, граничная, изолированная, предельная, точка множества.
2. Открытое множество, открытость объединения произвольного семейства открытых множеств, открытость пресечения конечного семейства открытых множеств.
3. Замкнутое множество, замкнутость пересечения произвольного семейства замкнутых множеств, замкнутость пресечения конечного семейства замкнутых множеств.
4. Характеризация предельной точки множества.
5. Теорема Больцано – Вейерштрасса для множеств.

Задачи

1. Докажите, что определение (1) сходимости последовательности $\{x_n\}$ к числу $a \in \mathbb{R}$ равносильно определениям (2) и (3):

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \quad \forall\, n > N \qquad (|x_n - a| < \varepsilon) \tag{1}$$

$$\forall\, \alpha < a < \beta \quad \exists\, N_1 \quad \forall\, n > N_1 \qquad (x_n \in (\alpha, \beta)) \tag{2}$$

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \quad \exists\, N_2 \quad \forall\, n > N_2 \qquad (|x_n - a| < \frac{1}{m}) \tag{3}$$

2. Запишите в кванторах следующие утверждения:

   (a) последовательность $\{x_n\}$ ограничена;

   (b) последовательность $\{x_n\}$ неограничена;

   (c) последовательность $\{x_n\}$ не сходится к (данному) числу $a \in \mathbb{R}$;

   (d) последовательность $\{x_n\}$ расходится (т. е. не сходится ни к какому числу $a \in \mathbb{R}$);

   (e) последовательность $\{x_n\}$ не является бесконечно малой;

   (f) последовательность $\{x_n\}$ не является бесконечно большой;

   (g) последовательность $\{x_n\}$ не удовлетворяет критерию Коши.

3. Какое свойство последовательности $\{x_n\}$ и числа a описывает следующее высказывание:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon?$$

4. Какое свойство последовательности $\{x_n\}$ и числа a описывает следующее высказывание:
$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon?$$

5. Докажите, что отбрасывание конечно числа членов последовательности не влияется на свойство сходимости и значение предела.

6. Докажите, что если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$. Верно ли обратное (т. е если $|x_n| \to |a|$, то $x_n \to a$)?

   Докажите, что если $x_n \to a$, то $x_n^2 \to a^2$, $x_n^3 \to a^3$.

   Докажите, что если $x_n \to a$, $y_n \to b$ и $a < b$, то $\exists\, n_0$, $n > n_0$ $x_n < y_n$.

7. Докажите, что если $x_n \to \infty$, то $\{x_n\}$ неограниченна. Верно ли обратное?

8. Докажите, что последовательность $x_n \to a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n - a\}$ – бесконечно малая.

9. Докажите, что свойства 5) и 6) последовательностей, сходящихся к конечному пределу, справедливы и для последовательностей, сходящихся с конечному пределу или к $+\infty$, $-\infty$.

10. Докажите по определению, что последовательность $x_n \to +\infty$, если
$$x_n = n^6+1, \qquad x_n = n^6+n+1, \qquad x_n = n^6-n^5+1, \qquad x_n = n\cos\frac{1}{n}, \qquad x_n = \frac{n^2+\sqrt{n}+1}{n+1}.$$

11. Докажите по определению, что последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, если
$$x_n = -n^6+10, \qquad x_n = n^6-100n+1, \qquad x_n = (-1)^n(n^6-n^5+1), \qquad x_n = (-1)^n n\cos 1/n.$$

12. Докажите по определению, что последовательность x_n является бесконечно малой, если
$$x_n = \frac{1}{n^6+1}, \qquad x_n = \frac{n}{n^6+\sqrt{n}+1}, \qquad x_n = \frac{n}{n^{5/2}+n+1}\cos 1/n, \qquad x_n = \frac{n}{3^n}.$$

13. Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, а последовательность $\{y_n\}$ сходится к числу $a \neq 0$, то $\{x_n y_n\}$ является бесконечно большой.

14. Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ стремится к $+\infty$, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ стремится к $+\infty$.
15. Приведите примеры последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ со следующими свойствами:

    1) $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ и
    $$x_n - y_n \to 0, \quad x_n - y_n \to 3, \quad x_n - y_n \to +\infty, \quad x_n - y_n \to -\infty,$$
    $$x_n - y_n \text{ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела,}$$
    $$\frac{x_n}{y_n} \to 0, \quad \frac{x_n}{y_n} \to 3, \quad \frac{x_n}{y_n} \to +\infty,$$
    $$\frac{x_n}{y_n} \text{ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.}$$

    2) $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ и
    $$\frac{x_n}{y_n} \to 0, \quad \frac{x_n}{y_n} \to 3, \quad \frac{x_n}{y_n} \to +\infty,$$
    $$\frac{x_n}{y_n} \text{ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.}$$

    3) $x_n \to \infty$, $y_n \to 0$ и
    $$x_n y_n \to 0, \quad x_n y_n \to \infty, \quad x_n y_n \text{ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.}$$

16. Сформулируйте и докажите теорему о пределе убывающей последовательности.
17. Докажите, что последовательность $x_n = (1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, строго возрастает.
18. Приведите пример последовательности, множество частичных пределов которой есть
    1) $\{1, 2, 3\}$;
    2) $\mathbb{N}$;
    3) $[0, 2]$;
    4) $\mathbb{R}$;
    5) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.
19. Существует ли последовательность, имеющая множеством (всех) частичных пределов
    1) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
    2) $[0, 1)$?
20. Докажите, что множество частичных пределов последовательности замкнуто.
21. Докажите, что неограниченная последовательность содержит бесконечно большую подпоследовательность.
22. Найдите внутренние, внешние, граничные, изолированные, предельные, точки множества E
    1) $E = (0, 1]$;
    2) $E = (0, 1] \cup \{10\}$;
    3) $E = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
    4) $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$;
    5) $E = \{\sin 1/x \mid x \in [-1, 1]$;
    6) $E = \left\{\frac{m}{2^k} \mid k \in \mathbb{N},\ 0 < m < 2^k\right\}$.

23. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Докажите, что

    множество предельных точек E замкнуто;

    множество граничных точек E замкнуто;

    множество внутренних точек E открыто.

24. Пусть E' – множество предельных точек E, а E'' – множество предельных точек E'. Как связаны E' и E''?

25. Как связано множество частичных пределов последовательности и множество предельных точек множества значений последовательности?