

# Типовые задачи по функциональному анализу

## II семестр

Лектор А. Р. Данилин  
Составлено П. Ю. Глазыриной

1. Установление ограниченности линейных операторов (функционалов) и нахождение норм линейных операторов (функционалов).
2. Продолжение линейного непрерывного функционала с одномерного подпространства в двумерном нормированном пространстве с сохранением нормы.
3. Исследование линейных операторов на непрерывную обратимость, нахождение спектра линейного оператора.
4. Нахождение сопряженных операторов в гильбертовых пространствах.
5. Решение интегральных уравнений.
6. Нахождение обобщенных производных.

### 1. Установление ограниченности линейных операторов (функционалов) и нахождение норм линейных операторов (функционалов)

1. Линейный функционал  $\varphi \in \ell_2^\#$  (или, например,  $\varphi \in m^\#$ ) задан формулой

$$\varphi(x) = x_5 - 3x_7, \quad x = (x_1, x_2, \dots).$$

Показать, что  $\varphi$  ограничен и найти его норму.

2. Линейный функционал  $\varphi \in C[0, 1]^\#$  (или, например,  $\varphi \in L_{1.5}[0, 1]^\#$ ) задан формулой

$$\varphi(x) = \int_0^1 \sin(\pi t)x(t) dt.$$

Показать, что  $\varphi$  ограничен и найти его норму.

3. Линейный оператор  $A : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  задан формулой

$$Ax = \left( 0, \frac{4}{3}x_1, \dots, \frac{2k+2}{k+2}x_k, \dots \right), \quad x = (x_1, x_2, \dots).$$

Показать, что  $A$  ограничен и найти его норму. Будет ли она достижима?

4. Линейный оператор  $A : C[0, 2] \rightarrow L_2[0, 2]$  (или, например,  $A : C[0, 2] \rightarrow C[0, 2]$ ) задан формулой

$$(Ax)(t) = (t^2 - 1)x(t^2/4).$$

Показать, что  $A$  ограничен и найти его норму. Будет ли она достижима?

5. Линейный оператор  $A : L_2[1, 2] \rightarrow L_2[1, 2]$  задан формулой

$$(Ax)(t) = t^2 \cdot \int_1^2 sx(s) ds.$$

Показать, что  $A$  ограничен и найти его норму.

6. Линейный оператор  $A : L_2[1, 2] \rightarrow L_2[1, 2]$  задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_1^t sx(s) ds.$$

Показать, что  $A$  ограничен и найти его норму.

7. Линейный оператор  $A : C[1, 3] \rightarrow L_2[1, 3]$  задан формулой

$$(Ax)(t) = x(2) + \int_1^t s^2x(s) ds.$$

Показать, что  $A$  ограничен и найти его норму.

8. Линейный оператор  $A : C[1, 3] \rightarrow C[1, 3]$  задан формулой

$$(Ax)(t) = x(1) + \int_1^t x(s) ds.$$

Показать, что  $A$  ограничен и найти его норму.

## 2. Продолжение линейного непрерывного функционала с одномерного подпространства в двумерном нормированном пространстве с сохранением нормы

1. Пусть  $X = \langle \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| = \sqrt{4x^2 + y^2} \rangle$ ,  $L = \{(2x, 3x), x \in \mathbb{R}\}$ ,  $\varphi_0 \in L^*$ :  $\varphi_0(2x, 3x) = -2x$ . Продолжить  $\varphi_0$  на  $X$  с сохранением нормы.
2. Пусть  $X = \langle \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| = 2|x| + 3|y| \rangle$ ,  $L = \{(0, 2x), x \in \mathbb{R}\}$ ,  $\varphi_0 \in L^*$ :  $\varphi_0(0, 2x) = -2x$ . Продолжить  $\varphi_0$  на  $X$  с сохранением нормы.
3. Пусть  $X = \langle \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| = \max\{2|x|, 3|y|\} \rangle$ ,  $L = \{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\}$ ,  $\varphi_0 \in L^*$ :  $\varphi_0(x, 2x) = 4x$ . Продолжить  $\varphi_0$  на  $X$  с сохранением нормы.

## 3. Исследование линейных операторов на непрерывную обратимость, нахождение спектра линейного оператора

1. Оператор  $A \in \mathcal{L}(L_1[0, 1])$  задан формулой

$$(Ax)(t) = x(t)\text{sign } t.$$

Найти его спектр.

2. Оператор  $A \in \mathcal{L}(C[0, 2])$  (или, например,  $A \in \mathcal{L}(L_2[0, 2])$ ) задан формулой

$$(Ax)(t) = x(t) \cos 2t.$$

Найти его спектр.

3. Оператор  $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$  (или, например,  $A \in \mathcal{L}(m)$ ) задан формулой

$$Ax = (0, x_1 - x_2, 0, -x_3, x_4, \dots, (-1)^k x_k, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots).$$

Найти его спектр.

4. Оператор  $A \in \mathcal{L}(\ell_1)$  (или, например,  $A \in \mathcal{L}(m)$ ) задан формулой

$$Ax = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2, x_3/3, \dots, x_k/k, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots).$$

Будет ли  $A$  непрерывно обратим? Принадлежит ли число 0 множеству регулярных точек оператора  $A$ ?

5. Оператор  $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$  (или, например,  $A \in \mathcal{L}(m)$ ) задан формулой

$$Ax = \left( x_1 - x_2, x_1 + 2x_2, x_3 \frac{2}{3}, \dots, x_k \frac{k-1}{k}, \dots \right), \quad x = (x_1, x_2, \dots).$$

Принадлежит ли число 0 множеству регулярных точек оператора  $A$ ? Будет ли  $A$  непрерывно обратим?

#### 4. Нахождение сопряженных операторов в гильбертовых пространствах

1. Оператор  $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$  задан формулой

$$Ax = (2x_2 - x_3, 2x_3 - x_4, x_3/3, x_4/4, \dots, x_k/k, \dots).$$

Найти  $A^*$ .

2. Оператор  $A \in \mathcal{L}(L_2[0, 1], L_2[0, 2])$  задан формулой

$$(Ax)(t) = tx(2t^2).$$

Найти  $A^*$ .

3. Оператор  $A \in \mathcal{L}(L_2[0, 2], L_2[0, 2])$  задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_t^2 e^\tau x(\tau) d\tau.$$

Найти  $A^*$ .

#### 5. Решение интегральных уравнений

1. Решить интегральное уравнение и найти спектр соответствующего интегрального оператор

$$x(t) = -1 + t^2 + \int_0^2 e^{t+s} x(s) ds.$$

2. Решить интегральное уравнение и найти спектр соответствующего интегрального оператор

$$x(t) = -1 + t^2 + \int_0^t sx(s) ds.$$

#### 6. Нахождение обобщенных производных

1. Найти обобщенную производную второго порядка от распределения

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ e^{3x} - 1, & x < 0. \end{cases}$$

2. Найти обобщенную производную второго порядка от распределения

$$f(x) = x \cdot |\operatorname{arctg} x - 1|.$$