

Типовые задачи по функциональному анализу I семестр

1. Будет ли заданная функция нормой, метрикой, будет ли соответствующее пространство полным; будет ли соответствующая норма (метрика) эквивалентна другой заданной.
2. Сходится ли заданная последовательность.
3. Является ли заданное отображение непрерывным.
4. Является ли заданное множество предкомпактным.
5. Найти ортогональное дополнение в ℓ_2 , найти ортогональную проекцию заданного элемента на заданное подпространство в ℓ_2 .

1. Будет ли заданная функция нормой, метрикой, будет ли соответствующее пространство полным; будет ли соответствующая норма (метрика) эквивалентна другой заданной

1. Пусть $X = \langle \mathbb{R}, \rho \rangle$, где $\rho(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$. Проверить, что ρ является метрикой. Будет ли метрическое пространство X полным? Если нет, то описать его пополнение.
2. Пусть $X = \langle \mathbb{R}, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство, а $\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$. Покажите, что метрики $\rho(x, y)$ и $\rho_1(x, y)$ эквивалентны. Будет ли $X = \langle \mathbb{R}, \rho_1 \rangle$ полным?
3. Показать, что

$$\|x\| = 4 \max_{t \in [0,3]} \{|x(t)|\} + \int_0^3 |x'(t)| dt$$

есть норма в $C^1[0, 3]$. Будет ли она эквивалентна стандартной норме в $C^1[0, 3]$?

Еще варианты (все в том же пространстве $C^1[0, 3]$)

$$\|x\| = |x(3)| + \max_{t \in [0,3]} \{|x'(t)|\},$$

$$\|x\| = \int_0^2 |x(t)| dt + \max_{t \in [0,3]} \{|x'(t)|\},$$

$$\|x\| = \left(\int_0^2 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \max_{t \in [0,3]} \{|x'(t)|\}.$$

2. Сходится ли заданная последовательность

1. При каких p последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в пространстве ℓ_p ($1 \leq p < \infty$), и если сходится, то к чему?

$$x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots), \quad x_{nk} = \begin{cases} \sqrt{e^n + 1} - \sqrt{e^n - 1}, & k \leq n, \\ e^{-n}, & k > n. \end{cases}$$

2. Сходится ли последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ в m и, если «да», то к чему?

$$x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots), \quad x_{nk} = \begin{cases} \sin(3/k)(3+k), & k \leq n, \\ \frac{\sin k}{k} + 3, & k > n. \end{cases}$$

3. Является ли заданное отображение непрерывным

1. Отображение $f : C[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ ($1 \leq p < \infty$) задано формулой $f(x)(t) = \cos(x(t))$. Является ли f непрерывным на $C[0, 1]$? Равномерно непрерывным на $C[0, 1]$?

Другие варианты $f : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $f : \tilde{L}_1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$; $f(x)(t) = \exp(x(t))$, $f(x)(t) = x^4(t)$, $f(x)(t) = |x(t)|$.

4. Является ли заданное множество предкомпактным

1. Пусть $M = \{x \in C[0, 1] : x(t) = \exp(t - n), n \in \mathbb{N}\}$. Является ли M предкомпактным в $C[0, 1]$? (Более сложный вопрос: является ли M предкомпактным в $\tilde{L}_1[0, 1]$?)

Еще варианты

$$M = \{x \in C[0, 1] : x(t) = t^a, a \in \mathbb{R}^+\},$$

$$M = \{x \in C[0, 1] : x(t) = \sin(t - a), a \in \mathbb{R}\},$$

$$M = \{x \in C[0, 1] : x(t) = \cos(at), a \in \mathbb{Z}\},$$

$$M = \{x \in C[0, 1] : x(t) = \cos(at), a \in [-2, 2]\},$$

$$M = \{x \in C[0, 1] : x(t) = 1 - 1/(at + 1), a \in \mathbb{R}\}.$$

2. Доказать, что множество $M = \{x = (x_1, x_2, \dots) : |x_k| \leq 1/k\}$ компактно в ℓ_2 , в c_0 .

5. Найти ортогональное дополнение в ℓ_2 , найти ортогональную проекцию заданного элемента на заданное подпространство в ℓ_2

1. В пространстве ℓ_2 найти ортогональную проекцию вектора $x = (1, 1/2, \dots, 1/k, \dots)$ на подпространство $\{x \in \ell_2 : x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 0\}$.
2. Найти в $L_2(0, 2\pi)$ элемент наилучшего приближения для $x(t) = e^{2t}$ подпространством $\langle y_1, y_2 \rangle$, $y = t$, $y_2 = \cos t$.
3. В ℓ_2 найти ортогональное дополнение до множества $M = \{x \in \ell_2 : x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 0\}$.

6. Задачи на различные свойства множеств: открытость, замкнутость, компактность и т. д.

1. Пусть X – нормированное пространство, $A, B \subset X$ и:
 - а) A, B компактны; доказать, что и $A + B$ компактно.
 - а) A компактно, B замкнуто; доказать, что $A + B$ замкнуто.
 - а) A, B компактны; доказать, что $A + B$ компактно.
 - а) A, B замкнуты; верно ли, что $A + B$ замкнуто?
2. X – нормированное пространство. Доказать, что $B(0, 1)$ – открытое, а $B[0, 1]$ – замкнутые множества.
3. Доказать, что параллелепипед $\{x \in \ell_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) : |x_k| < 1\}$ – открытое множество в ℓ_2 .
Будет ли множество $\{x \in \ell_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) : |x| \leq 1\}$ – замкнутым в ℓ_2 ?