Функциональный анализ. Программа коллоквиума.

1. Топологические, метрические, линейные нормированные пространства. Топология метрических пространств. Окрестность, открытый шар, открытое множество, замкнутое множество. Примеры.
2. Сходимость последовательности в метрическом и линейном нормированном пространствах. Свойства сходящихся последовательностей.
3. Примеры линейных нормированных пространств (пространства $l^{(n)}_p$, l_p, $c_ф$, c_0, c, m, C[a;b], L_p[a;b]). Сходимость последовательности в этих пространствах.
4. Предельная точка множества.
5. Замыкание множества, расстояние от точки до множества. Характеризация замыкания в терминах расстояния от точки до множества.
6. Свойства оператора замыкания.
7. Внутренность множества. Свойства.
8. Подпространства метрических пространств.
9. Непрерывные отображения метрических пространств, их свойства.
10. Полные пространства. Полнота конкретных пространств. Примеры неполных пространств. Замкнутость полного подпространства метрического пространства.
11. Пополнение метрического пространства. Теорема о пополнении.
12. Принцип вложенных шаров.
13. Теорема Бэра о категориях. Мощность полного метрического пространства без изолированных точек.
14. Принцип сжимающих отображений. Применение принципа сжимающих отображений.
15. Сепарабельные пространства, их свойства. Примеры.
16. Сепарабельность подпространства сепарабельного пространства.
17. Сравнение двух метрик в метрических пространствах, эквивалентность норм в линейных нормированных пространствах.

Примеры задач.

1. Доказать, что замкнутый шар является замкнутым множеством, открытый – открытым. Доказать, что сфера является замкнутым множеством.
2. Доказать, что замыкание открытого шара содержится в замкнутом шаре (с центром в той же точке, того же радиуса). Привести пример, когда это включение строгое. Доказать, что в ЛНП имеет место равенство.
3. Задачи на топологию метрических и линейных нормированных пространств. (построить замыкание множества, внутренность множества, доказать, что множество замкнуто, открыто). Например, доказать, что Г(А) граница множества А замкнута и внутренность множества равна А\Г(А).
4. Пусть
   $A = \{x(t): \quad x(t) \geq 0, \quad t \in (a;b)\} \subset CB(a;b),$
   $B = \{x(t): \quad x(t) < 0, \quad t \in (a;b)\} \subset CB(a;b),$
   где $CB(a;b)$ пространство всех ограниченных непрерывных на интервале $(a;b)$ функций с нормой $\|x\| = \sup\{|x(t)|, \quad t \in (a;b)\}$. Какое из этих множеств является (или не является) открытым, замкнутым? Ответ обоснуйте.
5. Будет ли заданная функция нормой, метрикой, нарисовать единичный шар в данной метрике, выяснить, является ли данное пространство полным, если нет, описать его пополнение. Например

а). $\|(x,y,z)\| = \max\{2|x|, \sqrt{x^2+y^2}\}$, $(x,y,z)\in R^3$, нарисовать единичный шар с центром в точке (0,0,0).

б). Пусть $X = \{x(t),\ \text{где } x(t) \text{ непрерывна на всей числовой оси и } \lim\limits_{x\to\infty} x(t) = 0\}$, $\|x\| = \max\{|x(t)|\}$. Доказать, что X является линейным нормированным пространством. Будет ли X полным, сепарабельным?

в). Пусть (R,ρ) пространство, в котором метрика определяется формулой: $\rho(x,y) = |arctg(x) - arctg(y)|$. Является ли данное пространство полным? Если нет, то описать его пополнение.

6. Сравнить на X нормы. Например,

а). В пространстве $C^1[a;b]$

$$\|x\|_1 = |x(1)| + \int_0^1 |x(t)|dt,\ \ \|x\|_2 = |x(1)| + \int_0^1 |x'(t)|dt, \text{ стандартная норма в } C^1[a;b];$$

б). В пространстве ℓ_p

стандартная норма ℓ_p, стандартная норма c_0;

в) В пространстве ℓ_1

$$\|x\|_1 = \sqrt[2]{\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{2n-1}|^2} + \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{2n}|, \quad \|x\|_2 = \sqrt[2]{\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{2n}|^2} + \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{2n-1}|.$$

7. Исследовать отображение на непрерывность

а). $f: C[0;1] \to \widetilde{L}_1[0;1]$ задано формулой $f(x) = \sin(x(t))$

б). $f: C[0;1] \to \widetilde{L}_1[0;1]$ тождественное. (будет ли обратное отображение непрерывным?)

в). $f: l_p \to l_q$ -- тождественное на пересечении.

8. Привести примеры полного сепарабельного. Неполного сепарабельного, полного несепарабельного пространста.

9. При каких p последовательность $\xi_r^n = \begin{cases} \sin k, & k \le n \\ 1-\cos\frac{1}{k}, & k > n \end{cases}$ сходится в пространстве l_p?

10. Сходится ли в $C[0;1]$ последовательность $x_n = t^n - t^{2n}$? $x_n = t^n - t^{2+n}$?

11. Сходится ли в $C^1[0;1]$ последовательность $x_n = \dfrac{t^n}{n} - \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$?