Problem **1**. (Level **20**)

Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ отличается от $f(x)$ лишь в конечном числе точек, то $g(x)$ также будет интегрируема на отрезке $[a, b]$, и значения соответствующих интегралов совпадают.

Problem **2**. (Level **25**)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Докажите, что если разбивать отрезок $[a, b]$ сеткой с узлами в точках x_i, $0 \le i \le n$, $x_0 = a$, $x_n = b$ таким образом, что при увеличении количества узлов мелкость разбиения стремится к нулю, то

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g(\psi_i) \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx, \text{ где } \begin{array}{r} x_i \le \xi_i \le x_{i+1}, \\ x_i \le \psi_i \le x_{i+1}, \\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i. \end{array}$$

Problem **3**. (Level **35**)

Покажите, что функция с бесконечным числом точек разрыва на некотором отрезке может быть интегрируемой на этом отрезке, взяв в качестве примера функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right) \text{ на отрезке } [0, 1].$$

Problem **4**. (Level **40**)

Покажите, что функция с бесконечным числом точек разрыва на некотором отрезке может быть интегрируемой на этом отрезке, взяв в качестве примера функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & x > 0 \end{cases} \text{ на отрезке } [0, 1].$$

Здесь квадратные скобки понимаются, как целая часть числа.

Problem **5**. (Level **30**)

Вычислите определенный интеграл, рассматривая его как предел соответствующих интегральных сумм.

$$\int\limits_a^b x^m\, dx \quad (0 < a < b; \quad m \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\}).$$

Указание: Следует выбирать узлы сетки таким образом, чтобы их абсциссы x_i образовывали геометрическую прогрессию.

Problem **6**. (Level **15**)

Пусть $f(x)$ – непрерывная на полуоси $[0, +\infty)$ функция и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(nx)\, dx.$$

Problem **7**. (Level **55**)

Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx.$$

Problem **8**. (Level **10**)

Докажите, что среди первообразных четной непрерывной функции найдется нечетная, а всякая первообразная нечетной непрерывной функции обязательно будет четной.

Problem **9**. (Level **35**)

Докажите, что среди первообразных четной функции найдется нечетная, а всякая первообразная нечетной функции обязательно будет четной.

Problem **10**. (Level **25**)

Докажите, что первообразная непрерывной периодической функции с периодом T в общем случае является суммой линейной функции и периодической функции с периодом T.

Problem **11**. (Level **45**)

Вычислите значение интеграла

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Указание: воспользоваться формулами Эйлера, связывающими комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями, и доказать, что

$$\int\limits_a^b \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{b(\alpha+i\beta)} - \mathrm{e}^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}.$$

Problem **12**. (Level **20**)

Найти $f(x)$, если $f(0) = 0$ и

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1; \\ x, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Problem **13**. (Level **10**)

Найти неопределенный интеграл:

$$\int \max(1, x^2)\,dx.$$

Problem **14**. (Level **25**)

Найти неопределенный интеграл:

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx.$$

Problem **15**. (Level **30**)

Найти неопределенный интеграл:

$$\int [x]\,dx, \quad (x \ge 0).$$

Здесь квадратные скобки понимаются, как целая часть числа.

Problem **16**. (Level **60**)

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Докажите, что равенство

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[a, b]$.

Указание:

Обратите внимание, что по условию ничего не известно о количестве точек разрыва функции $f(x)$. Для решения этой задачи следует использовать одну из Теорем Лебега: Ограниченная функция $f(x)$ является интегрируемой на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва является множеством лебеговой меры нуль.