Problem **1**. (Level **20**)

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, определенные по индукции следующим образом: $x_1 = a$ и $y_1 = b$, где a и b — произвольные вещественные числа, и при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3}.$$

Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и найдите его.

Problem **2**. (Level **25**)

Пусть a и b — произвольные вещественные числа. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена по индукции следующим образом:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = \frac{1}{3}\left(x_n + 2x_{n+1}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Докажите, что она сходится, и найдите значение предела.

Problem **3**. (Level **50**)

Пусть даны два числа $b > a > 0$. Определим последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ по индукции следующим образом: $x_1 = a$ и $y_1 = b$, и при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Докажите, что последовательность x_n — возрастающая, последовательность y_n — убывающая, и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{ab}.$$

Problem **4**. (Level **20**) Известно, что существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

значение которого принято обозначать **e**. Докажите, что существует конечный предел

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{(-m)}\right)^{-m},$$

и вычислите его значение.

Problem **5**. (Level **58**)

Докажите, что предел существует и равен указанному значению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathbf{e}}.$$

Problem **6**. (Level **60**)

Выясните, существует ли предел и если да, то вычислите его значение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}.$$

В следующих трех задачах выясните, какие значения могут принимать эти пределы в зависимости от значений параметров a и b ?

Problem **7**. (Level **10**)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{n}{b^n} \right) \qquad a > 0, \quad b > 0$$

Problem **8**. (Level **15**)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \qquad a > 0, \quad b > 0$$

Problem **9**. (Level **50**)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{n}{b^n}} \qquad a > 0, \quad b > 0$$

Problem **10**. (Level **25**)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные вещественные числа. Вычислить

a)

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n} \right)^{1/p}$$

b)

$$\lim_{p\to-\infty} \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n} \right)^{1/p}$$

Problem **11**. (Level **5**)

Приведите пример последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющих одно и то же множество значений и таких, что:

a) x_n и y_n сходятся, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

b) x_n сходится, а y_n расходится.

или докажите, что это невозможно.

Problem **12**. (Level **35**)

Приведите пример последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющих одно и то же бесконечное множество значений и таких, что:

a) x_n и y_n сходятся, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

b) x_n сходится, а y_n расходится.

или докажите, что это невозможно.

Problem **13**. (Level **25**)

Докажите, что среди членов сходящейся числовой последовательности найдётся либо наибольший, либо наименьший, либо и тот, и другой. Построить примеры последовательностей всех трех типов.

Problem **14**. (Level **30**)

Пусть $x_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right| = q$, где $q > 1$. Докажите, что тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Problem **15**. (Level **35**)

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \quad x_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$

a) Выясните, существует ли

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad ?$$

b) Докажите, что если этот предел существует и равен q, то $|q| \leq 1$.

c) Может ли последовательность $\{x_{n+1}/x_n\}$ быть неограниченной?

Problem **16**. (Level **10**)

Докажите, что для сходимости последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы сходилась любая ее подпоследовательность.

Problem **17**. (Level **25**)

Докажите, что для сходимости монотонной последовательности достаточно сходимости некоторой (одной) ее подпоследовательности.

Вспомогательные утверждения также требуют доказательства.

Problem **18**. (Level **30**)

Пусть $a \in \mathbb{R}$ — некоторое вещественное число. Постройте две последовательности $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, обе сходящиеся к a, причем все члены q_n — рациональные числа, а все члены r_n — иррациональные. Докажите сходимость обеих последовательностей к числу a, используя определение предела последовательности.

Problem **19**. (Level **55**)

Из определения числа **e** нетрудно получить неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathbf{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Выведите следующее неравенство:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Далее, пользуясь полученными неравенствами, докажите формулу

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon(n),$$

где γ – постоянная, называемая постоянной Эйлера ($\approx 0,577215665$), а функция $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Problem **20**. (Level **55**)

Пользуясь результатом предыдущей задачи, докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

Problem **21**. (Level **999999999**)
Докажите, что постоянная Эйлера — число иррациональное.

Преподаватель не рассчитывает, что студенты решат эту задачу $\ddot\smile$, во всяком случае на первом курсе. Это шутка, но проблема сформулирована вполне серьезно.

Problem **22**. (Level **10**)

Пусть функции f и g определены в некоторой выколотой окрестности нуля, одна из них является четной, а другая – нечетной и $g(x) \neq 0$. Какое значение может принимать следующий предел?

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

a) 0;

b) $a \neq 0$;

c) ∞;

d) предел не существует.

Problem **23**. (Level **10**)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – периодическая функция. Доказать, что если существует

$$\lim_{x\to\infty} f(x),$$

то f – постоянна.

Problem **24**. (Level **20**)

Докажите (или опровергните с помощью контрпримера) след. утверждения:

a) Если функция определена и непрерывна на отрезке, то множество её значений – отрезок.

b) Если функция определена и непрерывна на промежутке, то множество её значений – промежуток.

c) Если функция определена и монотонна на промежутке, и множество её значений промежуток, то она непрерывна.

Промежуток – это односвязное не одноточечное множество на числовой оси, то есть либо интервал, либо полуинтервал, либо отрезок. Во всех задачах непрерывность в граничных точках промежутков следует понимать в одностороннем смысле.

Problem **25**. (Level **5**)

Пусть f – непрерывная на промежутке $X \subseteq \mathbb{R}$ функция. Докажите, что её срезки, то есть функции

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) > 0, \\ 0, \text{ если } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } f(x) \geq 0, \\ f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

также непрерывны на промежутке X.

Problem **26**. (Level **25**)

Докажите, что если функция всюду монотонна, то всякая её точка разрыва является точкой разрыва 1-го рода.

Problem **27**. (Level **15**)

Всякая ли функция, являющаяся обратной к разрывной функции также является разрывной?

Указание: рассмотреть функцию $y = \mathbf{e}^{|x|} \operatorname{sign} x$.

Problem **28**. (Level **20**) (Отделимость от нуля)

Докажите (или опровергните с помощью контрпримера) след. утверждения:

a) Если функция f непрерывна на интервале $(a; b)$, то для любого $x_0 \in (a; b)$ такого, что $f(x_0) \neq 0$ найдется окрестность $O_\delta(x_0)$ такая, что $f(x) \neq 0$ для любого $x \in O_\delta(x_0)$. Другими словами,

непрерывная ненулевая в точке функция обязательно будет ненулевой в некоторой окрестности этой точки.

b) Функция f непрерывна на интервале $(a; b)$, и все её значения строго положительны. Тогда существует число $\mu > 0$ такое, что $f(x) \geq \mu$ для любого $x \in (a; b)$.

c) Функция f определена на отрезке $[a; b]$, и все её значения строго положительны. Тогда существует число $\mu > 0$ такое, что $f(x) \geq \mu$ для любого $x \in (a; b)$.

d) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, и все её значения строго положительны. Тогда существует число $\mu > 0$ такое, что $f(x) \geq \mu$ для любого $x \in [a; b]$.

Problem **29**. (Level **5**)

Докажите, что *непрерывная в точке функция обязательно будет ограниченной в некоторой окрестности этой точки.*

Problem **30**. (Level **15**)

Докажите, что если функция f имеет конечный предел в каждой точке отрезка $[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$.

Problem **31**. (Level **50**)

Докажите, что если многочлен чётной степени принимает хотя бы одно значение, противоположное по знаку коэффициенту старшего члена, то он имеет не менее двух действительных корней.

Problem **32**. (Level **15**) Докажите следующие утверждения (без использования производных и разложений по Тейлору):

a) $\operatorname{tg} x - \sin x = o(x^2), \quad x \to 0;$

b) $2\sin x - \operatorname{tg} 2x = o(x^2), \quad x \to 0;$

c) $\sqrt{x^4 + 10^{10}} = x^2 + o(\frac{1}{x}), \quad x \to \infty;$

d) $\ln(1 + \mathbf{e}^x) = o(\frac{1}{x^n}), \quad x \to -\infty,\ n \in \mathbb{N}.$

Problem **33**. (Level **20**)

Пусть n – некоторое фиксированное натуральное число и $\{a_k\}_{k=1}^n$ – набор из n вещественных коэффициентов. Найдите необходимое и достаточное условие на a_k, при котором функция, определяемая следующим образом

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{ctg} kx$$

имеет конечный предел при $x \to 0$, и вычислите его значение.

Указание: Докажите, что $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + o(1), \quad x \to 0.$

Problem **34**. (Level **20**)

Пусть $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = a$, причем $\varphi(t) \neq a$ при $t \neq t_0$ в некоторой окрестности точки t_0. Доказать, что если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, то $f(\varphi(t)) = o(g(\varphi(t)))$ при $t \to t_0$.

Problem **35**. (Level **5**)

Функция f называется *непрерывной по Липшицу* на интервале (a, b), если существует константа $L > 0$, такая что

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in (a, b).$$

В этом случае константа L называется *константой Липшица.*

Будет ли непрерывная по Липшицу функция

a) просто непрерывной на (a, b) функцией?

b) равномерно непрерывной на (a, b) функцией?