

откуда следует, что искомый предел равен 1. ▲

ЗАДАЧИ

Найти предел (1–18).

$$1. \quad 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2 \operatorname{sh} x}{x^3}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 3x + \cos 3x - 2}{x^4};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^2}.$$

$$2. \quad 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \arcsin 2x}{x^3}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \operatorname{ctg} x}{x \sin x}.$$

$$3. \quad 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e(1-x/2)}{x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos((\pi/2) \cos x)}{\sin(\sin^2 x)}.$$

$$4. \quad 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x+9x^2/2}}{x^3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) - 2 \sin x + 2x \cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+\sin x} - (1/2) \ln(1+x^2) - x}{\operatorname{tg}^3 x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x \ln \cos x} - (1+4x)^{1/4} + x - 3x^2/2}{x \sin x^2}.$$

$$5. \quad 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + \ln(1-x) - 1}{2 - \sqrt{4+x^3}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \sin x + \ln \cos x - x}{\sqrt[3]{1-x^3} - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \operatorname{sh} x + \ln \cos x - x}{1 - \sqrt[3]{1-x^3}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + \sin x) - 3 \arcsin x + 5x^2/2}{\sqrt[3]{8+x^3} - 2};$$

- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \ln(1 + x)/(1 + x)) - \operatorname{tg}(x - 2x^2)}{\sqrt{4 + x^3} - 2}$.
6. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{\sin x - x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x^3} - \cos x^4}{\operatorname{tg} x - x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1 + \sin x} + \ln(1 - x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x} \ln(1 + x) - x/(x + 1)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.
7. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1 - x) - 1}{\arcsin x - \sin x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) \cos x - e^{\operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + 2x^2}}{x - \sin x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin x} - \ln(1 - x/2) - 1}{\operatorname{tg} x - \sin x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - x - \operatorname{ch} x}{\sin x - \operatorname{arctg} x}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1 - \sin x) - 1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 3x} - e^{\sin x} + 3x^2/2}{\arcsin x - \operatorname{tg} x}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 3x} \ln(1 - x) + \sin(\sin x) + 3x^2/2}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}$.
8. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + 2x} - x(x + x^2)}{x - \operatorname{arctg} x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x/2) - \sqrt{1 + \sin x} + 1}{\operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg}(x/2)} - \sqrt{1 + \sin x} - x^2/4}{\arccos x - \operatorname{arctg} x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 3x + x^2} + \sin \ln(1 - x) - e^{-7x^2/6}}{x - \operatorname{arctg} x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sh} 2x} - \cos x - x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} \sin x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 - e^{2x}} - \cos 2x + \ln(1 + x)}{\sin x - \arcsin \operatorname{tg} x}$.
9. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{\operatorname{tg} x} - \sin^2 x - x}{x + x^3 - \operatorname{tg} x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^3} - x \operatorname{ctg} x - x^2/3}{x \cos x - \sin x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - 2x} - x}{x^2 \operatorname{tg} x - e^{-x^3} + 1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(\sin x + \sqrt{1 + x^2})}{\operatorname{tg} x - x \cos^2 x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x - 1} - 1/(1 - x)}{\ln((1 + x)/(1 - x)) - 2 \sin x}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \ln(x + \sqrt[3]{1 + x^2}) - x^2/6}{\operatorname{th}(x - x^3) - x}$.
10. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \operatorname{ch} 2x - 2x}{\operatorname{tg} 2x - 2 \sin x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x - x^2/6) - \operatorname{sh} x + 2x^2/3}{\sin 2x - 2x \cos x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{2x} + \ln(1 - x^2)}{x \cos x - \sin x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + 3 \cos x - 3\sqrt[3]{1 + x}}{1 + \ln(1 + x) - e^x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x - \ln(1 + x^2) - \arcsin x^3}{x \sin x - x^2}$;

- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\operatorname{tg} x} - e^{\sqrt{1+2x}}}{\sin(x^2/7) - (x/3)\ln(1-x)}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}}{x + \operatorname{tg} x - \sin 2x}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \sin x - x \cos x}{e^x + \ln(1-x) - 1}$.
11. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x\sqrt{1+x} - 1}{\sin x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sin x - x \cos x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-x^2} - \ln(1 + \sin x) - 1}{x \cos x - \operatorname{sh} x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln \cos x + x \operatorname{sh} x}{\sin(x^2/2) - \operatorname{sh}(x^2/2)}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \operatorname{tg} x - x \cos \sin x}{\ln(1+x) - x\sqrt{1-x}}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - xe^x}{x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{tg} x}$.
12. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} + e^{\operatorname{tg} x} - 2}{\sin x/x - \cos x - x^2/3}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x - x \ln(1+x)} + (3/4) \operatorname{tg} x^2 - 1}{xe^x - \arcsin x - x^2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x + \ln(1 - \sin x) - \sin \ln(1+x)}{(1-2x)^{-1/2} - e^x - x^2}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^{-1/2} - (1+2x)^{-1/2} - \operatorname{arctg} 2x}{e^{-x} + \ln(1 + \arcsin x) - 1}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \ln(1-x) + x^3/3)}{\ln \operatorname{ch} x - x^2/2}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{e^{\operatorname{sh} x} - (1+2x)^{1/2} - x^2}$.
13. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{x^3/4}}{\ln(1+3x^2) - 3x^2 \cos x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} - x) + \operatorname{tg} x}{x(\operatorname{ch} x - e^{x^2})}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\ln(e+x)} - e^{x/(3e)} + x^2/(3e^2)}{x \operatorname{ch} x - \sin x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - \arcsin x}{\operatorname{sh}(x-x^2) - \ln \sqrt{1+2x}}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(2x/(2+x^4)) + \cos(2x/(2-x^4)) - 2e^{x^4/2}}{\operatorname{tg} \sqrt{1+x^4} - \operatorname{tg} \sqrt{1-x^4}}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\cos x} - e^{2+x^2} + (3e^2/2) \sin x^2}{\ln(1+x^2) - (\operatorname{arctg} x)^2}$.
14. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x) - 2x + 2x^2}{x/2 + \operatorname{tg}(x/2) - \arcsin x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - (1/2) \operatorname{tg} x + x^2/8 - 1}{e^x - \sqrt{1+2x} - x^2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^{\operatorname{tg} x} + 6x^3 + x^2}{\ln(1+x) - \operatorname{arctg} x + x^2/2}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - (1+3x)^{-1/3} - x}{x^2/2 + \ln(1 + \operatorname{tg} x) - \arcsin x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/(1-x)} - \operatorname{sh} x - \cos x}{\sqrt[6]{1+x} + \sqrt[6]{1-x} - 2}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{ch} x - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x + \sqrt[3]{1-3x} - 2 \cos x + 1}$;

- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + \cos 2x} - e^{\operatorname{tg} x} + 2x^2}{2 \sin x - 2 \ln(1+x) - x^2}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \sin x^3 + \sin \operatorname{sh} x^3}{(x^2/2)\sqrt{1-x} + \ln(1+x) - x \cos x}$.
15. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x^2}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x} - x^3/2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x/x) + \operatorname{ch}(x/\sqrt{3}) - 1}{\operatorname{sh} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arctg} \sin x - \operatorname{tg} \operatorname{sh} 3x}{\sqrt{1+x} \sin x^3 - x^2 \ln(1-16x/9)}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{1+x^3} - \sin 1}{\sqrt[5]{1-2x} \ln \cos x - 1}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(3+x^2) - \operatorname{arctg}(2+\cos x)}{\ln(1+x) - e^x + 1}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(1/2+x^2) - \arcsin(\cos x - 1/2)}{1 + \ln(1+x^2) - \cos x}$.
16. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1+2x^2}}{\operatorname{tg}^4 x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1-\sin x) - 1}{\sqrt[3]{8-x^4} - 2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + x^2/2)}{e^{-x^2/2} - \cos x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/(1+x)} - \cos(1-e^{-x}) - \operatorname{arctg} x}{x^4}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{e^x - \sqrt{1+2x}} - \sqrt[3]{x^6 - x^7}}{(1/e)(1+x)^{1/x} - \sqrt{1-x+7x^2/6}}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{\ln(1+x) + \cos x + 4x^3/3} - \sqrt[3]{1+3x}}{\sqrt{1-x+x^2/2} - (\cos x)^{1/x}}$.
17. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(xe^x) + \sin(xe^{-x}) - 2x - 2x^3/3}{x^5}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cos x) + x \ln(1+2x^2/3) - x}{\sqrt{1+x^5} - 1}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2/2} - e^{-x^2/6}}{x^2 \ln(1+x) - (\operatorname{tg} x^3) \cos \operatorname{sh}(x/2)}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + x \sin x) - (x^2/2)e^x}{(x/2)\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{1+x^2/3} - \sin(x/2) - 1}$.
18. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt[3]{1-4x^2}}}{(1/x) \arcsin 2x - 2 \operatorname{ch} x^2}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+2x} - \operatorname{tg} x) + (1/2) \operatorname{arctg} x^2}{xe^{x^2} - \sin x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} - e^{-x} + x^2 \sqrt[3]{1+x}}{\sin^2 x - \ln \operatorname{ch}^2 x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + (1/2) \operatorname{sh} x^2 - x}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+3x)^{1/3} - 1)/\operatorname{tg} x - e^{-\operatorname{sh} x} - x^2(x+5)/(x+6)}{\ln(2e^{x^2} - 1)/\sin x - \operatorname{arctg} 2x}$;

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos 2x + \operatorname{sh} 2x} - e^x)/x + 2x(2-x)/(2+x)}{(\ln \operatorname{ch} x)/\operatorname{sh} x - (1/2) \arcsin x}.$$

19. Найти числа $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, чтобы существовал конечный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x^n} - \cos x^2}{x^8}$.

Найти предел (20–42).

$$20. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{1/\sin^2 x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} 3x} \right)^{1/x^2}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2}}{\operatorname{ch} 3x} \right)^{1/x^2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(e+x) - \frac{x}{e} \right)^{1/\sin^3 x}.$$

$$21. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{x} \right)^{1/x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\arcsin x} \right)^{1/x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x} \right)^{1/x^2}.$$

$$22. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{2(\sqrt{1+x} - 1)} \right)^{\operatorname{ctg} x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\ln \operatorname{ch} x} \right)^{1/x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} e^{x/(1+x)} - \frac{1}{\sin x} \right)^{1/\operatorname{arctg} x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 3x + \cos 4x - \cos 2x}{\ln \sqrt{1+3x} - \ln \sqrt{1-3x}} \right)^{1/\sin x}.$$

$$23. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 6 \frac{x - \sin x}{x^2} \right)^{2(\operatorname{ch} x - 1)/x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^2 - (1+2x)^{1/x}}{2xe^2} \right)^{1/x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{2\sqrt{1+2x} - 2\sqrt[3]{1+3x}} \right)^{1/x}.$$

$$24. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x} + \ln(1-x))^{1/x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg}(x/3) + 2 - \sqrt[3]{1+x})^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{(1/3)\sin x} + \sqrt[3]{1 - \operatorname{tg} x} - 1 \right)^{1/\ln(1+x^2)};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e} (1+x)^{1/x} + \frac{2x}{4+5x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$25. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{e^x - 1 - x^2/2} \right)^{1/x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \operatorname{sh} x}{\ln(1+x^2)} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \cos x + x}{2\sqrt{1+x}} \right)^{1/x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x}{2 \operatorname{ch} x - 2} \right)^{1/x^2}.$$

$$26. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sh} x} \right)^{1/\sin^2 x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x^2 - \sqrt{1 + x^2}}{\operatorname{ch} x - 1} \right)^{1/x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{e^x - \ln(1 + x)} \right)^{1/x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x^2}} \right)^{1/x^2}.$$

$$27. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\arcsin x)^2 - x^2}{\sin^2(x^2/\sqrt{3})} \right)^{1/\sin^2 x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(2x/(2 - x^2)) - x}{x \sin(x^2/6)} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - (\operatorname{arctg} x)^2}{x^2 \sin(2x^2/3)} \right)^{1/x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \arccos(1 - 2x^2) - 6x}{x^3} \right)^{1/x^2}.$$

$$28. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2e^{x-x^2} - 2}{2x - x^2} \right)^{(\sin x)/x^3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1 + x} - (1/2) \operatorname{sh} x} \right)^{1/\arcsin x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sh}(x + \sin x)}{\sin x + \arcsin x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$29. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + x)}{x} + \frac{x}{\ln(e^2 - xe^2)} \right)^{1/x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin 5x - \arcsin 3x - \operatorname{arctg} x}{x} \right)^{1/\ln \cos 3x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x + x^3) - \operatorname{sh}(x + 2x^3)}{x} \right)^{1/(2 \ln(1+x^2) - \ln^2(1+x))};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg}(2x + x^3) - \operatorname{th}(x + 2x^3)}{x} \right)^{1/(\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{1+x^2})}.$$

$$30. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos 2x + \frac{xe^x}{1-x} - x \right)^{1/x^3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt[3]{1 + 2x + x^3} - \frac{2x}{2x + 3} \right)^{1/x^3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{x-2} + \ln(e + xe^{x+1}) \right)^{1/x^3};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2+x} + \sin \ln(1+x) \right)^{1/x^3}.$$

$$31. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln(1+x) + \cos(xe^{-x}))^{1/x^3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} - e^{2x-x^2} + e^{\operatorname{tg} x})^{1/x^3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x \right)^{1/\arcsin x^3};$$

- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - x}{\sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^3)} \right)^{1/x^3}$.
- 32.** 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{8+x^3} - \cos x^2)^{1/\arcsin x^3}$;
 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - x + e^{\operatorname{arctg} x} - 1)^{1/\sin^3 x}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} x^2 + \sqrt[3]{1+3\sin x} + \ln(1-x) \right)^{1/\operatorname{sh}^3 x}$;
 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt[3]{1-3x \cos 2x} + 4x^2 + \frac{x}{1+3x} \right)^{1/(\arcsin x)^3}$.
- 33.** 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\operatorname{tg} x} + \ln(1-x))^{\operatorname{ctg} x^3}$;
 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+\sin x} - (1/2) \operatorname{tg} x + x^2/8)^{\operatorname{ctg} x^3}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1-2x+3x^2} + x(1-\operatorname{sh} x))^{\operatorname{ctg}^3 x}$;
 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} - x^2/2 + \cos x - \sqrt{1+2x})^{1/\operatorname{tg} x^3}$.
- 34.** 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1-x) + e^{x \cos x})^{1/(x^2(\sqrt{1+3x}-1))}$;
 2) $\lim_{x \rightarrow 0} ((2/\pi) \arccos x + \sin(2x/\pi))^{1/(\sqrt{1+2x^3}-1)}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{th}(xe^x) + (1/2) \ln(1-2x))^{1/x^3}$.
- 35.** 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\operatorname{arctg} x} - 1/(1-x) + \cos x + x^2)^{1/\sin x^3}$;
 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{sh} 2x)^{1/\ln^3(1-x)}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} - x^2/2 - x \cos x)^{1/\ln^3(1-x/2)}$.
- 36.** 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{1+\operatorname{tg} x} - (x/3)e^{-x/3})^{1/(x \ln \cos x)}$;
 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-x}}{1-x} + \frac{1}{2} (\ln \sqrt{1+2x} - \operatorname{tg} x) \right)^{1/(x(\cos x-1))}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x-x^2} - x \sqrt[3]{1-3x/2})^{1/(\operatorname{tg} x-x)}$.
- 37.** 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+2 \operatorname{tg} x} + x^2/2 - \sin x)^{1/(\operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} x)}$;
 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x + \operatorname{arctg} x)^{1/(\operatorname{sh} x - \sin x)}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1-x} \ln(1+x) - x/(1+x))^{1/(\operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x)}$;
 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x) + (1/2) \operatorname{arctg} x^2 + 4x^3)^{1/(\operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x)}$.
- 38.** 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin 2x} - 2x - 2x^2)^{1/\sin x^4}$;
 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} + \ln(1-x) + x^3/3)^{1/x^4}$;

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \sin x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \right)^{1/x^4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)}{\sin x} \right)^{1/\sin^4 x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin(x \cos x)}{\operatorname{arctg} x} \right)^{1/\sin x^4}.$$

$$39. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x \arcsin x - x^2 e^{x^2})^{1/\sin^2 x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x - x^2 \operatorname{ch}^2 x)^{1/(1-\cos x)^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{th} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x^2 \cos x^2 \right)^{1/x^4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\log_2 \left(\frac{3-4x}{1-2x} - \frac{1+4x}{1+2x} \right) \right)^{2 \operatorname{sh} x / (x - \sin x)}.$$

$$40. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sh} x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x^2 \cos x^2)^{1/x^4};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sin x + (1/2) \operatorname{arctg} x^2)^{1/\sin x^4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{ch} x + 2 \cos x}{3} + \frac{x^2}{6(1+x^2)} \right)^{1/\operatorname{arctg} x^4}.$$

$$41. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\sin 2x} - \frac{2}{3} x^2 \right)^{x^2/(x^2 - \operatorname{arctg} x^2)};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + x^2 \sqrt{x+1/4})^{(x+e)/\arcsin x^3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{1+3x} - \operatorname{tg} \sin x + x^2)^{1/(\operatorname{arctg} x - x \cos x)};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{(1+x^2)^{1/x^2} - e^{\cos x}}{e} \right)^{1/(\sqrt{\operatorname{ch} 2x} - e^{x^2})}.$$

$$42. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x + x^2) + 2 \arcsin(xe^x) - 2x)^{\operatorname{ctg}^3 x + 1/(3x^3)};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arcsin x^3)^{e^x / (x \sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)}.$$

43. Доказать, что:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/x^3} (\arccos \operatorname{sh} x + x)^{\operatorname{ctg} x^3} = e^{-2/(3\pi)};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6}{\pi} \arcsin \left(\frac{1}{2} e^{\pi x^2} \right) + \operatorname{sh}^2 x \right)^{1/x^2} = e^{1+2\sqrt{3}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \operatorname{arctg}(\operatorname{ch} 3x) + \sin^2 x}{\pi} \right)^{1/x^2} = e^{10/\pi}.$$

Найти предел (44–60).

$$44. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \ln(1+x)}{x^2} - \frac{2}{(x+1) \operatorname{sh} x} \right)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6}{\ln(1+3 \sin^2 x)} - \frac{4}{\ln(2 - \cos 2x)} \right)^{1/x^2}.$$

45. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch} x)^{x^2(\operatorname{tg}(1/x) - \operatorname{arctg}(1/x))}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2/3} \left(\frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \right)^{x^4}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x^2 - 1} \right)^{x^4 \sin^2(1/x)}$.
46. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} + \frac{1}{4} \sin \frac{2}{x} \right)^{x^2 + \sin 3x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln(1+x) - x \ln x + \operatorname{arctg} \frac{1}{2x} \right)^{x^2 \operatorname{arctg} x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\operatorname{tg}^2 \ln \frac{x+1}{x} - \operatorname{sh}^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) + 4 \ln x \right)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}}{2} \right)^{x^4}$.
47. 1) $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{sh} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}))^{1/\ln x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +0} (x/3 + \operatorname{ctg} x - (1/x) \cos(x^2/3))^{1/\ln \sin x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x}{\sin x} - \frac{\operatorname{sh} x}{x} + \frac{\sin^4 x}{10} \right)^{1/\ln \operatorname{tg} x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(1 + \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{arcsin} x} \right)^{1/x + \ln^2 x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{arctg} x} \right)^{1/x^2 + \ln x}$.
48. $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} ((\pi/2 - x) \operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$.
49. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} - \ln x)^{1/(\sin(x-1) + \cos(x-1) - x)}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} (e^{\sin(x-1)} - \ln x)^{\operatorname{ctg}^2(x-1)}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - (1/2) \ln x)^{1/(\cos^2 x \sin^2(1-x))}$.
50. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - \ln x)^{1/(\cos^2 x \sin^2(1-x))}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} (2^{x-1} - x^x \ln 2)^{1/(\sin(x-1) - \cos(1-x) + x)}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1+0} (\ln(x^2 - x) - \ln(x-1) + e^{1-x})^{1/\operatorname{arcsin}(x-1)^3}$.
51. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)^{1/\sin(x-1)}$.
52. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{(x-1)/x} - \sqrt[4]{4x-3}}{\operatorname{ch}(x-1) - \cos 2(x-1)}$.
53. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt[3]{x} - \operatorname{arcsin}(x-1) - 3 \cos(x-1)}{e^{x-1} - 1 - \ln x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - \sin(x-1) - 2 \cos(x-1)}{\operatorname{arctg}(x-1) - \ln x}$.

54. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sin \pi x)}{\ln(1 + \ln x)}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - e^{\pi x - 2x^2}}{\cos x}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{ctg} x + 2x - \pi/2}{(1 - \operatorname{tg} x)^3}$.
55. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x(1 - x^2)^{1/2} - \cos x \ln(1 + x)}{\ln \sin x - \ln x}$.
56. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{arcsin} x} \right)$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} \right)$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(x+1) \operatorname{sh} x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)$.
57. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - x \ln(1 + 1/x))$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x((2e)^{1/x} + e^{1/x} - 2)$;
 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 \ln(1 + 1/x) - x^2 + x/2)$.
58. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x^6 + x^5} + \sqrt[6]{x^6 - x^5} - 2x}{x \ln(1 + x) - x \ln x - x \sin(1/x)}$;
 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + x} - x) + \cos x \ln x}{\ln(1 + \operatorname{ch} x)}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(\sqrt[3]{x^3 + x} - x) + \sin x \ln(1 + x)}{\ln(1 + x + e^{5x})}$.
59. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1/x}(x^2 - x + 2) - \sqrt{x^4 + x^2 + 1})$;
 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x^3 - x^2 + x/2 + 1)e^{1/x} - \sqrt[4]{x^{12} - x^9 + 2})$.
60. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt[5]{x^5 - x^4})$;
 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x^3 + x) \sin(1/x) - \sqrt[3]{x^6 - 3x^4 + 1})$;
 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x/2 - (x^3 + x + 1) \ln(1 + 1/x))$;
 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} \left(1 - \frac{x^2 + 1}{x} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \right)$.

ОТВЕТЫ

1. 1) $-1/2$; 2) 1; 3) $1/2$; 4) $1/24$; 5) $27/4$; 6) $1/2$; 7) $4/3$; 8) 0
 2. 1) -2 ; 2) -1 ; 3) -1 ; 4) $8/15$; 5) -1 ; 6) -2 ; 7) $7/6$; 8) 0.
 3. 1) $-e/2$; 2) 1; 3) $11e/24$; 4) $\pi/4$.
 4. 1) $3/2$; 2) $4/3$; 3) $-1/8$; 4) $-1/2$; 5) -4 .
 5. 1) 2; 2) $7/8$; 3) $1/8$; 4) 44; 5) $40/3$.
 6. 1) 0; 2) 3; 3) $-11/12$; 4) $-13/12$.
 7. 1) -1 ; 2) 2; 3) -4 ; 4) $1/8$; 5) 3; 6) $-1/4$; 7) -10 ; 8) -1 .
 8. 1) -3 ; 2) $1/8$; 3) $-1/6$; 4) $5/2$; 5) $7/5$; 6) $11/4$.
 9. 1) $3/4$; 2) -1 ; 3) $1/4$; 4) $1/8$; 5) $-1/6$; 6) $-1/8$.

10. 1) $4/9$; 2) -1 ; 3) -6 ; 4) $7/6$; 5) -6 ; 6) $21e/20$; 7) $2/5$; 8) -4 .
11. 1) $7/4$; 2) $3/2$; 3) $3/2$; 4) $13/15$; 5) 4 ; 6) 1 .
12. 1) $15/2$; 2) $3/4$; 3) $3/7$; 4) 23 ; 5) $9/2$; 6) 5 .
13. 1) $1/18$; 2) -1 ; 3) $5/(12e^3)$; 4) $1/7$; 5) $-(11/12)\cos^2 1$; 6) $-2e^2$.
14. 1) $-32/3$; 2) $9/16$; 3) 9 ; 4) $28/3$; 5) $-72/5$; 6) $1/4$; 7) -1 ; 8) $24/7$.
15. 1) 2 ; 2) 0 ; 3) $-27/5$; 4) $(5/2)\cos 1$; 5) $-3/20$; 6) $2/\sqrt{3}$.
16. 1) 1 ; 2) $1/2$; 3) $1/2$; 4) $7/24$; 5) $-\sqrt{7}/2$; 6) $15/\sqrt{2}$.
17. 1) $-7/5$; 2) $7/45$; 3) $1/12$; 4) $72/5$.
18. 1) $5e/8$; 2) $1/7$; 3) $14/3$; 4) $4/3$; 5) $-97/12$; 6) 8 .
19. $\alpha = -1/2$, $n = 4$.
20. 1) $e^{-1/2}$; 2) $e^{-1/2}$; 3) $e^{1/2}$; 4) e^{-5} ; 5) $e^{-7/2}$; 6) не существует.
21. 1) $e^{1/6}$; 2) $e^{-1/6}$; 3) $e^{-1/3}$; 4) $e^{2/3}$.
22. 1) $e^{1/4}$; 2) $e^{7/3}$; 3) $e^{-2/3}$; 4) e^{-2} .
23. 1) e ; 2) $e^{-7/3}$; 3) $e^{7/3}$.
24. 1) e^{-1} ; 2) $e^{1/9}$; 3) $e^{-1/18}$; 4) $e^{-1/6}$.
25. 1) $e^{-1/2}$; 2) $e^{2/3}$; 3) $e^{-3/8}$; 4) $e^{-1/4}$.
26. 1) $e^{-1/24}$; 2) $e^{1/6}$; 3) $e^{-5/4}$; 4) $e^{-3/4}$.
27. 1) $e^{8/15}$; 2) $e^{-3/10}$; 3) $e^{-23/30}$; 4) $e^{9/20}$.
28. 1) $e^{-5/6}$; 2) $e^{-1/8}$; 3) $e^{7/12}$.
29. 1) $e^{7/12}$; 2) $e^{-25/3}$; 3) $e^{-5/2}$; 4) e^{-4} .
30. 1) $e^{5/2}$; 2) $e^{43/81}$; 3) $e^{-5/12}$; 4) $e^{-1/12}$.
31. 1) $e^{2/3}$; 2) $e^{7/6}$; 3) $e^{2/3}$; 4) $e^{7/6}$.
32. 1) $e^{1/12}$; 2) $e^{-1/6}$; 3) $e^{7/6}$; 4) $e^{28/3}$.
33. 1) $e^{1/6}$; 2) $e^{-3/16}$; 3) e ; 4) $e^{-1/2}$.
34. 1) $e^{-4/9}$; 2) $e^{(-\pi^2+4)/(3\pi^8)}$; 3) $e^{-7/6}$.
35. 1) $e^{-7/6}$; 2) e^2 ; 3) e^{-4} . 36. 1) $e^{-25/81}$; 2) $e^{-5/3}$; 3) $e^{-7/4}$.
37. 1) e^2 ; 2) $e^{-1/2}$; 3) $e^{-13/4}$; 4) e^{24} .
38. 1) e^{-2} ; 2) $e^{-3/8}$; 3) $e^{-1/15}$; 4) $e^{1/30}$; 5) $e^{-1/3}$.
39. 1) e^{-1} ; 2) e^{-4} ; 3) 1 ; 4) $e^{48/\ln 2}$.
40. 1) $e^{1/2}$; 2) $e^{5/24}$; 3) $e^{-1/8}$.
41. 1) $e^{14/15}$; 2) e^e ; 3) e^9 ; 4) $e^{7/16}$.
42. 1) $e^{-8/9}$; 2) e . 44. 1) e^{-1} ; 2) $e^{-5/6}$.
45. 1) $e^{2/3}$; 2) $e^{13/90}$; 3) e^2 .
46. 1) $e^{-1/8}$; 2) $e^{\pi/6}$; 3) $\ln(5/4)$; 4) $e^{3/4}$.
47. 1) e^3 ; 2) e^3 ; 3) e^4 ; 4) $e^{1/3}$; 5) $e^{1/2}$. 48. 1.
49. 1) e^{-2} ; 2) e ; 3) $e^{1/(8\cos^2 1)}$.
50. 1) $e^{1/(2\cos^2 1)}$; 2) предел не существует; 3) $e^{1/6}$.
51. $e^{-1/3}$. 52. $-2/5$. 53. 1) $7/6$; 2) $3/2$.
54. 1) $-\pi$; 2) $-\pi$; 3) $1/6$.

55. —3. 56. 1) 0; 2) 0; 3) 1/3; 4) -1/2.

57. 1) 1/2; 2) $2 + \ln 2$; 3) 1/3. 58. 1) 5/18; 2) 1/2.

59. 1) 1; 2) 17/12. 60. 1) 2/5; 2) 11/6; 3) -4/3; 4) 1/2.

§ 20. Исследование функций

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Условия возрастания и убывания функции.

1) Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ *строго возрастала* на этом интервале, достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительна всюду на $(a; b)$, т. е.

$$f'(x) > 0, \quad x \in (a; b).$$

2) Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ *возрастала (не убывала)* на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была неотрицательна всюду на $(a; b)$, т. е.

$$f'(x) \geq 0, \quad x \in (a; b).$$

3) Аналогично, достаточным условием *строгого убывания* дифференцируемой функции $f(x)$, $x \in (a; b)$, является условие

$$f'(x) < 0, \quad x \in (a; b);$$

необходимым и достаточным условием *убывания* — условие

$$f'(x) \leq 0, \quad x \in (a; b).$$

2. Экстремумы функции.

1) Точка x_0 называется *точкой локального максимума* функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0 , для всех точек которой верно неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 верно строгое неравенство

$$f(x) < f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума* функции $f(x)$.

Аналогично, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой локального минимума*; если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 верно строгое неравенство

$$f(x) > f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой строгого локального минимума*.