Теория функций действительного переменного
Программа экзамена
Июнь 2020

Материал коллоквиума

I. *Измеримые по Лебегу множества числовой прямой. Мера Лебега*

1. Структура открытых и ограниченных замкнутых подмножеств числовой прямой.

2. Мера Лебега открытого подмножества числовой прямой. Вспомогательное утверждения: если открытое множество покрыто (конечной или счетной) системой интервалов, то мера множества не превосходит суммы мер интервалов. Свойства меры: монотонность меры по вложению; (счетная) аддитивность и полуаддитивность меры открытого множества.

3. Верхняя (внешняя) мера Лебега. Два эквивалентных определения. Монотонность верхней меры по вложению. (Счетная) полуаддитивность.

5. Конечная аддитивность верхней меры Лебега для множеств с положительным расстоянием. Аддитивность верхней меры Лебега для замкнутых ограниченных непересекающихся множеств.

7. Измеримые по Лебегу множества. Измеримость объединения конечного или счетного семейства измеримых множеств. Счетная полуаддитивность меры Лебега.

8. Измеримость замкнутого множества.

9. Измеримость дополнения измеримого множества. Измеримость пресечения конечного/счетного числа измеримых множеств. Измеримость разности двух измеримых множеств.

10. Характеризация свойства измеримости множества в терминах открытого содержащего и замкнутого содержащегося множеств.

11. Свойство полной (счетной) аддитивности меры Лебега.

12. Свойство непрерывности меры Лебега (два варианта).

13. Внутренняя (нижняя) мера Лебега. Характеризация свойства измеримости ограниченного множества в терминах верхней и нижней мер.

14. Счетная полуаддитивность нижней меры. Второй подход к построению измеримых множеств и меры Лебега.

16. Существование неизмеримого по Лебегу подмножества числовой прямой.

II. *Измеримые функции*

1. Четыре эквивалентных определения свойства измеримости функции.

2. Свойства измеримых функций (измеримость на подмножестве; измеримость на счетном объединении множеств; измеримость на множестве нулевой меры; свойство почти всюду и измеримость эквивалентных функций).

3. Измеримость функции почти везде непрерывной.

4. Арифметические операции над измеримыми функциями.

5. Измеримость предела почти всюду последовательности измеримых функций, включая две леммы.

6. Сходимость по мере; простейшие свойства. Пример последовательности функций, сходящейся по мере, но не сходящейся ни в одной точке.

7. Теорема Лебега о связи сходимости почти всюду и по мере.

8. Теорема Рисса о связи сходимости по мере и почти всюду.

9. Теорема Егорова о связи сходимости почти всюду и равномерной.

Структура измеримых функций

14. Теорема Лузина (C-свойство Лузина измеримых функций).

15. Теорема Лузина (C-свойство Лузина измеримых функций); второй вариант.

III. *Интеграл Лебега от ограниченной функции по множеству конечной меры*

1. Определение интеграла Лебега от ограниченной функции по множеству конечной меры. Аналог критерия Римана интегрируемости функции по Лебегу на измеримом множестве конечной меры.

2. Связь интегралов Римана и Лебега на отрезке.

3. Интегрируемость измеримой ограниченной функции на множестве конечной меры. Теорема Лебега.

4. Линейность интеграла по функции.

5. Свойства интеграла по множеству. Аддитивность по множеству верхнего и нижнего интеграла Лебега. Интегрируемость на подмножестве. Конечная аддитивность интеграла по множеству. Интегрируемость эквивалентных функций.

6. Неравенства для интеграла. Интегрируемость модуля функции; оценки для интегралов.

IV. *Интеграл Лебега от неотрицательной функции по множеству конечной меры*

1. Определение интеграла Лебега от неотрицательной функции по множеству конечной меры. Неравенство Чебышева. Конечность почти всюду суммируемой функции.

2. Линейность (однородность и аддитивность) интеграла по функции.

3. Свойства интеграла по множеству. Суммируемость на подмножестве. Конечная аддитивность интеграла по множеству.

4. Условие равенства нулю интеграла от неотрицательной суммируемой функции.

5. Полная (счетная) аддитивность интеграла от неотрицательной суммируемой функции по множеству.

6. Абсолютная непрерывность по множеству интеграла от неотрицательной суммируемой функции.

V. *Интеграл Лебега от функции произвольного знака по множеству конечной меры*
1. Определение. Эквивалентность суммируемости функции и модуля функции.
2. Конечная аддитивность интеграла по множеству.
3. Абсолютная непрерывность по множеству интеграла от суммируемой функции.
4. Линейность (однородность и аддитивность) интеграла по функции.
5. Полная (счетная) аддитивность интеграла от суммируемой функции по множеству.

VI. *Интеграл Лебега от функции произвольного знака по множеству бесконечной меры*
1. Определение. Свойства интеграла: полная (счетная) аддитивность интеграла от суммируемой функции по множеству, абсолютная непрерывность интеграла по множеству.

VII. *Предельный переход под знаком интеграла Лебега*
1. Пространство суммируемых функций на измеримом по Лебегу множестве; квазинорма, сходимость.
2. Теорема Лебега о мажорантной сходимости. Два варианта.
4. Теорема Фату.
3. Теорема Леви для последовательностей и рядов функций.

VIII. *Пространство* L^p
1. Пространство L^p (определение, линейность, «норма»).
2. Числовое неравенство Юнга.
3. Неравенство Гельдера для интегралов.
4. Неравенство Минковского для интегралов.
5. Полнота пространств $L^p,\ 1 \le p < \infty$.
6. Пространство L^∞. Квазинорма. Связь с пространствами $L^p,\ 1 \le p < \infty$.
7. Полнота пространства L^∞.
8. Плотность в пространстве $L^p(E),\ 1 \le p < \infty,\ |E| < \infty$, пространства $L^\infty(E)$.
9. Плотность в пространстве $L^p(a,b),\ 1 \le p < \infty$, пространства $C[a,b]$ непрерывных на отрезке функций.
10. Плотность в пространстве $L^p(a,b),\ 1 \le p < \infty$, множества алгебраических многочленов (теорема Вейерштрасса). Сепарабельность пространства $L^p(a,b),\ 1 \le p < \infty$.
11. Несепарабельность пространства $L^\infty(a,b)$.
12. Пространство $L^p_{2\pi},\ 1 \le p \le \infty$, измеримых 2π-периодических функций. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации функций пространства $L^p_{2\pi}$ при $1 \le p < \infty$, тригонометрическими полиномами.

Литература

1. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Введение в теорию функций действительного переменного: Мера и интеграл Лебега на прямой: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. 208 с.
2. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Дифференциальные свойства функций одного действительного переменного: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2013. 135 с.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Т. 2. М.: Наука. 1973.
4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука. 1974.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1981.

Файл от 13 февраля 2020 года