

Комплексный анализ

Программа экзамена

Январь 2020 года

Программа коллоквиума

1. Множество комплексных чисел; операции над комплексными числами. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Комплексная плоскость. Последовательности комплексных чисел; сходимость и предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Ряды комплексных чисел. Сходимость; критерий Коши сходимости. Абсолютная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов; произведение рядов. Топология комплексной плоскости. Расширенная комплексная плоскость; бесконечно удаленная точка. Сфера Римана.

2. Комплекснозначная функция комплексного переменного; ее действительная и мнимая части, модуль и аргумент. Предел функции в точке. Непрерывность.

3. Дифференцируемость в точке; условия Коши – Римана.

4. Аналитические функции. Гармоническая функция. Восстановление аналитической функции по ее вещественной или мнимой части.

5. Геометрическое истолкование производной. Конформные отображения.

6. Обращение аналитических функций. Однозначные аналитические ветви многозначных обратных функций.

7. Экспоненциальная функция. Многозначная обратная функция Логарифм. Области однолиственности экспоненциальной функции. Однозначные аналитические ветви Логарифма. Поверхность Римана многозначной функции Логарифм.

8. Степенная функция. Области однолиственности. Однозначные аналитические ветви корня n -й степени. Поверхность Римана корня n -й степени. Общестепенное выражение.

9. Тригонометрические и гиперболические функции.

10. Дробно-линейные отображения. Область определения. Характер отображения. Групповое свойство. Конформность.

12. Круговое свойство дробно-линейного отображения. Отображение круговых областей.

13. Построение дробно-линейного отображения по значениям в трех точках.

14. Симметрия точек относительно обобщенной окружности. Сохранение симметрии точек при дробно-линейном отображении.

15. Общий вид дробно-линейного отображения единичного круга на себя.

16. Общий вид дробно-линейного отображения верхней полуплоскости на единичный круг.

17. Интегрирование. Интеграл по отрезку. Кривая на комплексной плоскости; спрямляемая кривая; длина кривой. Спрямоимость кусочно дифференцируемой кривой; формула для длины кусочно дифференцируемой кривой. Интеграл от функции комплексного переменного по кусочно непрерывно дифференцируемой (спрямляемой) кривой.

18. Первообразная функции в области - определение и обсуждение. Формула Ньютона – Лейбница. Три эквивалентных свойства функции в области, включая существование первообразной.

18. Интегральная теорема Коши: для треугольного контура, для звездной области, для односвязной области. Интегральная теорема Коши для интеграла по границе области со звездной границей. Интегральная теорема Коши для составного контура. Интеграл с переменным верхним пределом от аналитической функции в односвязной области.

19. Интегральная формула Коши; варианты.

20. Интеграл типа Коши; бесконечная дифференцируемость.

21. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Формула Коши для производных аналитической функции. Теорема Морера. Эквивалентные формулировки свойства аналитичности функции в области.

22. Последовательности и ряды аналитических функций. Поточечная и равномерная сходимость. Равномерная сходимость внутри области. Первая теоремы Вейерштрасса для рядов аналитических функций.

23. Степенные ряды. Область сходимости (круг и радиус сходимости); теорема Коши – Адамара. Первая теорема Абеля.

24. Характер сходимости и свойства суммы степенного ряда в круге сходимости.

25. Разложение функции, аналитической в круге, в степенной ряд; ряд Тейлора.

26. Теорема Лиувилля для целых функций.

27. Теорема единственности для аналитических функций.

28. Принцип максимума модуля аналитической функции. Вторая теорема Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
29. Принцип максимума и минимума гармонической функции.
30. Лемма Шварца.
31. Общий вид взаимно однозначного и конформного отображения единичного круга на себя.
32. Ряд Лорана; кольцо сходимости. Характер сходимости и свойства суммы ряда Лорана в кольце сходимости.
33. Разложение функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана.
34. Изолированные особые точки аналитической функции. Устранимая особая точка.
35. Нули и полюса. Характеризация нуля аналитической функции. Характеризация полюса. Связь между нулями и полюсами.
36. Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого. Понятие о теореме Пикара.
37. Вычеты. Теорема Коши о вычетах.
38. Вычисление вычета относительно полюса.
39. Бесконечно удаленная точка как изолированная особенность. Тип особенности. Вычет относительно бесконечно удаленной точки. Теорема Коши о полной сумме вычетов.
40. Применение теории вычетов для вычисления несобственных интегралов по числовой оси.
39. Лемма Жордана.
40. Вычисление интегралов вида $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \varphi(z) dz$. Логарифмический вычет.
41. Логарифмический вычет. Принцип аргумента.
42. Теорема Руше о нулях аналитических функций.
43. Теорема Гурвица о нулях аналитических функций.
44. Принцип сохранения области при конформном отображении.
45. Критерий локальной однолистности.
46. Понятие о теореме Римана.
47. Соответствие границ при конформных отображениях.
48. Аналитическое продолжение.
49. Существование особой точки на границе круга сходимости степенного ряда.
50. Принцип симметрии Римана – Шварца.

Литература

1. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1961.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. I, II. М.: Наука, 1968.
3. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1979.
6. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Файл от 06 сентября 2019 года