

Предварительный список вопросов к экзамену по математическому анализу

(гр. МТ–101, МТ–102, МХ–101, ПМ-101, осенний семестр 2019/2020 г.)

Действительные числа. Элементы теории множеств.

1. Свойство непрерывности множества действительных чисел. Принцип вложенных отрезков.
2. Существование верхней грани ограниченного сверху множества действительных чисел.
3. Теорема о несчетности отрезка $[0, 1]$.

Предел последовательности

1. Предел последовательности действительных чисел: определение, единственность.
2. Свойства сходящихся последовательностей (независимость свойства сходимости от конечного числа членов последовательности; ограниченность; сохранение знака; неравенство между пределами двух последовательностей; правило двух милиционеров).
3. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.
4. Бесконечно малая и бесконечно большая последовательности, их свойства.
5. Сходимость монотонной ограниченной последовательности.
6. Число ϵ .
7. Критерий Коши сходимости последовательности действительных чисел.
8. Подпоследовательность. Сходимость подпоследовательности сходящейся последовательности.
9. Теорема Больцано – Вейерштрасса.
10. Частичный предел последовательности. Характеризация частичного предела последовательности.
11. Существование наибольшего и наименьшего частичных пределов последовательности.
12. Характеризация верхнего предела последовательности.
13. Замкнутость замыкания произвольного множества.
14. Открытость дополнения замкнутого множества. Замкнутость дополнения открытого множества.
15. Предельная точка множества, ее характеристика.
16. Обобщенная теорема Больцано – Вейерштрасса.

Предел функции. Непрерывность

1. Два определения предела функции в точке, их эквивалентность.
2. Свойства функций, имеющих предел в точке (ограниченность; сохранение знака функции в окрестности точки с ненулевым пределом; неравенство между пределами двух функций; правило двух милиционеров).
3. Арифметические операции над функциями, имеющими предел в точке.
4. Критерий Коши существования предела функции в точке.
5. Непрерывность функции в точке. Определения, основные свойства (ограниченность; сохранение знака; арифметические свойства).
6. Непрерывность сложной функции.
7. Первый замечательный предел.
8. Построение выражения a^b . Показательная функция. Логарифмическая и степенная функции.
9. Второй замечательный предел. Другие замечательные пределы.
10. Односторонние пределы в точке. Связь между пределом и односторонними пределами.

11. Предел монотонной функции.
12. Функции, непрерывные на отрезке. Первая теорема Вейерштрасса. Вторая теорема Вейерштрасса.
13. Теорема Больцано – Коши о промежуточном значении.
14. Теорема о существовании функции, обратной к монотонной и непрерывной на отрезке.
15. Теорема о существовании функции, обратной к монотонной и непрерывной на интервале.
16. Сравнение поведения функций.
17. Классификация точек разрыва.
18. Два определения равномерной непрерывности функции на множестве, их эквивалентность.
19. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Производная функции в точке

1. Определение производной функции в точке, геометрическая, физическая интерпретация.
2. Дифференцируемость функции в точке. Эквивалентность дифференцируемости и существования производной в точке.
3. Непрерывность дифференцируемой функции.
4. Арифметические свойства производной.
5. Производная сложной функции.
6. Производная обратной функции.
7. Производные элементарных функций.
8. Производные высших порядков. Линейность производных.
9. Формула Лейбница для вычисления n -й производной произведения двух функций.
10. Односторонние производные. Связь производной с односторонними производными.
11. Экстремум функции. Теорема Ферма.
12. Теорема Дарбу.
13. Теорема Ролля.
14. Теорема Лагранжа о конечных приращениях.
15. Следствия теоремы Лагранжа (функция с нулевой производной; монотонность функции, имеющей знакопостоянную производную; равномерная непрерывность функции с ограниченной производной; предел производной; характер точек разрыва функции, являющейся производной; сохранение знака отличной от нуля производной).
16. Теорема Коши о среднем.