

## Международная Школа-конференция С. Б. Стечкина по теории функций

(г. Кыштым, Челябинская обл., 5–14 августа 2024 г.)

Список докладов (по алфавиту) с аннотациями

### **International S.B. Stechkin's Workshop-Conference on Function Theory**

(Russia, Chelyabinsk region, August 5–14, 2024)

List of talks with abstracts (ordered according to the Russian alphabet)

1. Акишев Г. Оценки наилучших приближений периодических функций в симметричном пространстве (40 минут)  
 Estimates for the best approximations of periodic functions in a symmetric space (50 minutes)  
 В докладе будут представлены точные порядки наилучших приближений дифференцируемых периодических функций в симметричном пространстве.  
 The talk presents exact orders of best approximations for differentiable periodic functions in a symmetric space.
2. Акопян Р. Р. Наилучшее приближение оператора дифференцирования на классе аналитических в полосе функций (50 минут)  
 Akopyan R.R. Best approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in a strip (50 minutes)  
 В докладе обсуждаются задача наилучшего приближения оператора дифференцирования на классе аналитических в полосе функций и взаимосвязанное точное неравенство.  
 The talk discusses the problem of the best approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in a strip and a related sharp inequality.
3. Алимов А. Р. Аппроксимативные свойства множеств, составленных из плоскостей. Единственность и непрерывность метрической проекции. Локальные аппроксимативные свойства множеств с непрерывной метрической проекцией (50 минут).  
 Approximative properties of sets composed of planes. Uniqueness and continuity of metric projection. Local approximative properties of sets with continuous metric projection (50 minutes)
4. Антонов Н. Ю. О примерах расходящихся тригонометрических рядов Фурье (50 минут)  
 Antonov N.Yu. On examples of divergent trigonometric Fourier series (50 minutes)  
 Будут обсуждаться некоторые вопросы, связанные с расходимостью тригонометрических рядов Фурье.  
 Some issues related to the divergence of trigonometric Fourier series are discussed.
5. Антонова Т. В. Локализация границ естественных объектов на изображении (40 минут)  
 Соавтор: Агеев А. Л.  
 Antonova T.V. Localization of boundaries of natural objects in an image (40 minutes)  
 Co-author: Ageev A.L.

Рассмотрена некорректно поставленная задача локализации (определения положения) границ естественных объектов на изображении. Сформулированы соответствующие классы корректности, построены регуляризирующие алгоритмы и доказаны теоремы сходимости.

An ill-posed problem of localization (location determination) of natural object boundaries in an image is considered. The corresponding correctness classes are formulated, regularizing algorithms are constructed, and convergence theorems are proved.

6. Арестов В. В. Связь задачи Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования на оси и соответствующего неравенства Колмогорова для норм производных функций (50 минут)

Arestov V.V. The connection between Stechkin's problem of the best approximation of the differentiation operator on the axis and the corresponding Kolmogorov inequality for the norms of derivatives of functions (50 minutes)

Рассматривается вариант задачи Стечкина о наилучшем приближении на числовой оси операторов дифференцирования порядка  $k$  в пространстве  $L_2$  линейными ограниченными операторами из пространства  $L$  в пространство  $L_2$  на классе функций, производная порядка  $n$ ,  $0 \leq k < n$ , которых ограничена в пространстве  $L_2$ . Этот вариант задачи представляет интерес, в частности, тем, что известная оценка снизу Стечкина значения задачи приближения оператора дифференцирования через наилучшую константу в соответствующем неравенстве Колмогорова является строгой, другими словами, в данном случае задача Стечкина и неравенство Колмогорова не согласованы. Будет дана оценка сверху наилучшей константы в неравенстве Колмогорова. Эта оценка дает, в частности, еще одно, уже количественное, доказательство несогласованности задач.

We consider a variant of Stechkin's problem on the best approximation on the real axis of differentiation operators of order  $k$  in the space  $L_2$  by bounded linear operators from the space  $L$  to the space  $L_2$  on the class of functions whose derivative of order  $n$ ,  $0 \leq k < n$ , is bounded in the space  $L_2$ . This variant of the problem is of interest, in particular, because the well-known Stechkin lower bound for the value of the problem of approximating the differentiation operator via the best constant in the corresponding Kolmogorov inequality is strict; in other words, the Stechkin problem and Kolmogorov inequality are not matched in this case. We give an upper estimate for the best constant in the Kolmogorov inequality. This estimate particularly provides another, quantitative, proof of the mismatching of the problems.

7. Белых В. Н. Об асимптотике александровского  $n$ -поперечника компакта бесконечно гладких периодических функций класса Жевре (45 минут)

Belykh V.N. On the asymptotics of the Alexandrov  $n$ -width of a compact set of infinitely smooth periodic functions of the Gevrey class (45 minutes)

Указана асимптотика александровского  $n$ -поперечника компакта  $C^\infty$ -гладких периодических функций класса Жевре, ограниченно вложенного в пространство  $C$  непрерывных на единичной окружности функций. Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

The asymptotics of the Alexandrov  $n$ -width of the compact  $C^\infty$ -smooth periodic functions of the Gevrey class, boundedly embedded in the space  $C$  of continuous functions on the unit circle, is indicated. The work was carried out within the framework

of the state assignment of the Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (project FWNF-2022-0008).

8. Бердышев В. И. Способы наблюдения за движущимся в  $R^3$  объектом в условиях его противодействия (50 минут)

Berdyshev V.I. Methods of observing an object moving in  $R^3$  under conditions of its opposition (50 minutes)

Обсуждается задача отслеживания объекта, движущегося по кратчайшей огибающей набор выпуклых телесных множеств траектории. Наблюдатель в предлагаемой математической модели изображается шаром  $V_\varepsilon(f)$  ( $\varepsilon \geq 0$ ), в центре которого расположен радар  $f$ . Объект обладает скоростными мини-объектами, которые представляют угрозу для наблюдателя. Задача наблюдателя – отследить лучом локатора движение объекта на возможно большей части траектории, уклоняясь от встреч с мини-объектами. Предлагаются алгоритмы контроля движения объекта по прямолинейным и дугообразным участкам траектории.

The problem of tracking an object moving along the shortest envelope of a set of convex solid sets of a trajectory is discussed. In the proposed mathematical model, the observer is represented by a ball  $V_\varepsilon(f)$  ( $\varepsilon \geq 0$ ), in the center of which a radar  $f$  is located. The object has high-speed mini-objects that pose a threat to the observer. The observer's task is to track the object's movement with a radar beam over as much of the trajectory as possible, avoiding encounters with mini-objects. Algorithms for monitoring the object's movement along rectilinear and arcuate sections of the trajectory are proposed.

9. Волков Ю. С. Оценки  $p$ -норм решений разностных уравнений и бесконечных систем линейных уравнений (50 минут)

Volkov Yu.S. Estimates of  $p$ -norms of solutions to difference equations and infinite systems of linear equations (50 minutes)

Рассматривается задача оценки  $p$ -норм ( $1 \leq p \leq \infty$ ) решений неоднородных разностных уравнений. Разностные уравнения представлены как дважды бесконечные (бесконечные в обе стороны) системы линейных уравнений. В докладе устанавливаются оценки для случая матрицы Лорана с диагональным преобладанием. На основе этого результата и идеи разложения матрицы в произведение матриц, связанных с разложением характеристического многочлена, предложены оценки для случая произвольной невырожденной ленточной матрицы Лорана. Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0015).

The problem of estimating  $p$ -norms ( $1 \leq p \leq \infty$ ) of solutions to inhomogeneous difference equations is considered. The difference equations are presented as biinfinite (infinite in both directions) systems of linear equations. The talk establishes estimates for the case of a Laurent matrix with diagonal dominance. Based on this result and the idea of decomposing a matrix into a product of matrices related to the decomposition of the characteristic polynomial, estimates are proposed for the case of an arbitrary nonsingular Laurent band matrix. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (project FWNF-2022-0008).

10. Дейкалова М. В. Задача Чебышева на квадрате комплексной плоскости (30 минут)  
Deikalova M.V. Chebyshev's problem on a square of the complex plane (30 minutes)

На множестве алгебраических многочленов степени не выше  $n$  с комплексными коэффициентами и единичным старшим коэффициентом рассматривается задача наименьшего (наилучшего) равномерного отклонения от нуля на квадрате комплексной плоскости. В работе Э. Б. Байрамова 2018 года приведено решение задачи при  $n < 8$ . В ходе подготовки бакалаврской выпускной работы под моим руководством студентка Е. О. Щербак ова обнаружила неточность в доказательстве Э. Б. Байрамова при  $n = 7$ . В докладе обсуждается другое решение задачи в этом случае.

On the set of algebraic polynomials of degree at most  $n$  with complex coefficients and the unit leading coefficient, we consider the problem of the best uniform deviation from zero on a square of the complex plane. E.V. Bayramov gave (2018) a solution to the problem for  $n < 8$ . Recently, during the preparation of her bachelor's thesis under my supervision, student E.O. Shcherbakova discovered an inaccuracy in Bayramov's proof for  $n = 7$ . The talk discusses another solution to the problem in this case.

11. Калмыков С. И. Открывающие отображения и их приложения (40 минут)  
Kalmykov S.I. On open-up mappings and their applications (40 minutes)

В докладе рассматриваются прямые и обратные задачи, связанные с нахождением рациональных функций, обратные к которым осуществляют (открывающие) однолистные отображения дополнений заданных наборов попарно непересекающихся жордановых дуг до комплексной плоскости. Среди прочего показана связь этих задач с действиями группы кос, числами Гурвица, скручиваниями Дена. Доклад основан на совместных работах с В. Лысовым, В. Nagy и O. Sète.

The talk considers direct and inverse problems related to finding a rational function whose inverse performs a univalent open-up mapping of the complement of a given set of pairwise disjoint Jordan arcs. We show how these problems are related to Hurwitz numbers and Dehn twists. The talk is based on a joint work with V. Lysov, B. Nagy, and O. Sète.

12. Конягин С. В. Подпоследовательности последовательности частных сумм многомерных тригонометрических рядов Фурье (50 минут)  
Konygin S.V. Subsequences of sequences of partial sums of multiple trigonometric Fourier series (50 minutes)

13. Кочуров А. С. Восстановление промежуточной производной приближенно заданной функции (60 минут)  
Kochurov A.S. Recovery of an intermediate derivative of an approximately given function (60 minutes)

Рассматривается задача численного восстановления промежуточных производных. С этой целью оценивается норма старшей производной, которая используется в оптимальных разностных схемах для промежуточных производных.

We consider the problem of numerical reconstruction of intermediate derivatives. For this purpose, the norm of the highest derivative is estimated, which is used in optimal difference schemes for intermediate derivatives.

14. Леонтьева А. О. Неравенство Бернштейна для дробной степени оператора Бесселя и многомерной производной Рисса целых функций (45 минут)

Leont'eva A.O. Bernstein's inequality for the fractional power of the Bessel operator and the multidimensional Riesz derivative of entire functions (45 minutes)

Изучается неравенство Бернштейна для дробной степени  $(-\Lambda_\nu)^{\alpha/2}$  дифференциального оператора Бесселя

$$\Lambda_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \frac{d}{dx}$$

на множестве  $\mathbf{B}_\sigma^+$  четных целых функций экспоненциального типа не выше  $\sigma$ , ограниченных на вещественной оси:

$$\|(-\Lambda_\nu)^{\alpha/2}\|_{L_\infty} \leq \widetilde{M}_\sigma(\nu, \alpha) \|f\|_{L_\infty}, \quad \nu > -1/2, \quad f \in \mathbf{B}_\sigma^+.$$

При  $\alpha = 2$  величину  $\widetilde{M}_\sigma(\nu, \alpha)$  нашел С. С. Платонов (2007), а при  $\alpha \geq 1$  — О. Л. Виноградов (2023). Из их результатов вытекают точные неравенства для производных Рисса — дробных степеней оператора Лапласа  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  — на множестве целых функций экспоненциального сферического типа. При  $0 < \alpha < 1$  С. С. Платонов нашел порядок поведения  $\widetilde{M}_\sigma(\nu, \alpha)$  по  $\sigma$ .

В данном докладе речь идет о том, что при всех  $\nu > -1/2$  и  $0 < \alpha < 1$  найдено точное значение  $\widetilde{M}_\sigma(\nu, \alpha)$  и экстремальная функция. Как следствие, для таких  $\alpha$  получено точное неравенство Бернштейна для многомерной производной Рисса целых функций экспоненциального сферического типа.

The value  $\widetilde{M}_\sigma(\nu, \alpha)$  was found by S.S. Platonov (2007) for  $\alpha = 2$  and by O.L. Vinogradov (2023) for  $\alpha \geq 1$ . Their results imply exact inequalities for the Riesz derivatives, which are fractional powers of the Laplace operator  $(-\Delta)^{\alpha/2}$ , on the set of entire functions of exponential spherical type. For  $0 < \alpha < 1$ , S.S. Platonov found the order of behavior of  $\widetilde{M}_\sigma(\nu, \alpha)$  with respect to  $\sigma$ .

This talk discusses the exact value of  $\widetilde{M}_\sigma(\nu, \alpha)$  for all  $\nu > -1/2$  and  $0 < \alpha < 1$  and the extremal function. Consequently, for such  $\alpha$ , the exact Bernstein inequality for the multidimensional Riesz derivative of entire functions of exponential spherical type is obtained.

15. Малыгин Я. В. Сопоставление изображений и задача навигации (40 минут)  
Malygin Ya.V. Image matching, and navigation problem (40 minutes)

В докладе работе рассматривается задача сопоставления одного изображения фрагменту другого изображения по ключевым точкам.

The talk examines the problem of matching one image to a fragment of another image using key points.

16. Малыгина Е. Г. Недавние открытия, сделанные космическим телескопом Джеймса Уэбба (45 минут)  
Malygina E.G. (45 minutes)

Телескоп Джеймса Уэбба начал работать чуть более двух лет назад. Полученные за это время данные уже вызывают огромный интерес не только профессиональных астрономов, но многочисленных любителей.

The James Webb telescope began operating just over two years ago. The data obtained during this time has already generated great interest not only among professional astronomers, but also among numerous amateurs.

17. Малыхин Ю.В. Усредненный колмогоровский поперечник (45 минут)  
Malykhin Yu.V. Averaged Kolmogorov width (45 минут)

Один из методов оценки снизу колмогоровских поперечников заключается в том, чтобы заменить максимум расстояния до подпространства на среднее значение расстояния. Мы обсудим возникающее при этом понятие усредненного колмогоровского поперечника, его свойства и различные приложения к обычным поперечникам.

One method for lower estimating Kolmogorov widths is to replace the maximum distance to a subspace with the average distance. We discuss the resulting notion of an averaged Kolmogorov width, its properties, and various applications to ordinary widths.

18. Малыхин Ю.В. Очень долго работающие машины Тьюринга (50 минут)  
Malykhin Yu.V. Very long-running Turing machines (50 минут)

В докладе речь пойдет о фундаментальном объекте Computer Science – функции BusyBeaver(N) (далее: BB), равной максимальному количеству шагов, которые может сделать машина Тьюринга с N состояниями (вариант: компьютерная программа из N символов) перед остановкой.

Поводом к докладу послужило то, что в июле 2024 г. нашли (доказали, чему равно) значение BB(5). В функции BB отражается вся сложность, заложенная в понятии вычислимости; мы рассмотрим также некоторые математические проблемы, связаны с этой функцией.

Доклад может быть интересен всем, кто интересуется математикой и Computer Science (старшеклассникам и старше).

The talk will be about a fundamental object of Computer Science – the BusyBeaver(N) function (hereinafter: BB), equal to the maximum number of steps that a Turing machine with N states (option: a computer program of N symbols) can make before stopping.

The talk was prompted by the fact that in July 2024, the value of BB(5) was found (proved, what it is equal to). The BB function reflects all the complexity inherent in the concept of computability; we will also consider some mathematical problems associated with this function.

The talk may be of interest to anyone interested in mathematics and Computer Science (high school students and older).

19. Масютин Д.И. Оценка скорости приближения суммами Фурье на множестве полной меры (30 минут)  
Masyutin D.I. An estimate for the rate of approximation by Fourier sums on a set of total measure (30 минут)

Получены оценки скорости сходимости на множестве полной меры частичных сумм Фурье функций из классов Лебега и исследован вопрос о неулучшаемости этих оценок.

Estimates for the convergence rate on a set of full measure of partial Fourier sums of functions from Lebesgue classes are obtained and the issue of their unimprovability is investigated.

20. Надь Б. (Сегед, Венгрия) Вопросы типа минимакса для обобщенных логарифмических сумм Бляшке (40 минут)  
 Соавтор: С. Ревес (Будапешт, Венгрия)  
 Nagy B. (Szeged, Hungary) Minimax-type questions for generalized log-Blaschke sums (40 minutes)  
 Coauthors: Révész Sz.D. (Budapest, Hungary)

В этом исследовании мы изучаем минимаксные задачи, включающие супремум-нормы на интервале  $[-1, 1]$  произведений Бляшке, предполагая, что все нули находятся на одном интервале, а кратности фиксированы. После взятия логарифма мы получаем суммы того же ядра вида  $F(x, t) = J(t) + \sum_{j=1}^n \nu_j K(x_j, t)$ , где  $J(t)$  – вогнутая непрерывная функция на  $[-1, 1]$ ,  $\nu_j > 0$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $-1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ , а  $K(x, t)$  имеет вид  $\log \left| \frac{t-x}{1-xt} \right|$ , так называемое логарифмическое ядро Бляшке. Мы рассматриваем класс ядер, обобщающих логарифмическое ядро Бляшке, и называем соответствующую сумму обобщенными логарифмическими суммами Бляшке. В этой постановке мы предполагаем различные свойства функции ядра, исследуем существование и поведение максимумов, устанавливаем результаты типа леммы о возмущении и показываем гомеоморфизм для разностей максимумов. Это работа в процессе, совместная с Силардом Ревесом.

In this research, we investigate minimax problems involving supremum norms over the interval  $[-1, 1]$  of Blaschke products assuming all the zeros are in the same interval and the multiplicities are fixed. After taking the logarithm, we obtain sums of the same kernel function of the form  $F(x, t) = J(t) + \sum_{j=1}^n \nu_j K(x_j, t)$ , where  $J(t)$  is a concave continuous function on  $[-1, 1]$ ,  $\nu_j > 0$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $-1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ , and  $K(x, t)$  is of the form  $\log \left| \frac{t-x}{1-xt} \right|$ , the so-called log-Blaschke kernel. We consider a class of kernels generalizing the log-Blaschke kernel and call the corresponding sum generalized log-Blaschke sums. In this setting, we assume different properties of the kernel function, investigate the existence and behavior of maxima, establish perturbation lemma type results, and show homeomorphism for differences of maxima. This is a work in progress, joint with Szilard Revesz.

21. Никифорова Т. М. Теорема о гомеоморфизме для сумм сдвигов на вещественной оси (20 минут)  
 Nikiforova T.M. Homeomorphism theorem for sums of translates on the real axis (20 minutes)

Суммы сдвигов обобщают алгебраические многочлены с весом. Доклад посвящён теореме о гомеоморфизме для сумм сдвигов на вещественной оси. В частности, справедлив следующий результат. Пусть  $y = (y_1, \dots, y_n)$  – корни алгебраического многочлена степени  $n$  на отрезке  $[0, 1]$ . Положим  $y_0 = 0$ ,  $y_{n+1} = 1$ . Обозначим как  $m_j(y)$  максимум модуля многочлена на отрезке  $[y_j, y_{j+1}]$ . Тогда вектор-функция разностей максимумов  $(m_{j+1}(y) - m_j(y))$  является гомеоморфизмом между своей областью определения и  $\mathbb{R}^n$ . Первые результаты такого рода восходят к задаче минимизации погрешности интерполяцией по Лагранжу, гипотезе Бернштейна. Теорему о гомеоморфизме для сумм сдвигов на отрезке доказали В. Farkas, В. Nagy и Sz.Gy. Révész в 2021 году. Наш метод позволяет свести задачу на оси к задаче на отрезке.

Sums of translates generalize weighted algebraic polynomials. The talk is devoted to the homeomorphism theorem for sums of translates on the real axis. In particular, we prove the following result. Let  $y = (y_1, \dots, y_n)$  be the roots of an algebraic polynomial

of degree  $n$  on  $[0, 1]$ . Let  $y_0 = 0$  and  $y_{n+1} = 1$ . Denote by  $m_j(y)$  the maximum of the absolute value of the polynomial on  $[y_j, y_{j+1}]$ . Then the vector function of differences  $(m_{j+1}(y) - m_j(y))$  is a homeomorphism between its domain of definition and  $\mathbb{R}^n$ . The first results of this kind go back to the problem of minimizing the error by Lagrange interpolation and Bernstein's conjecture. The homeomorphism theorem for sums of translates on a segment was proved by B. Farkas, B. Nagy, and Sz.Gy. Révész in 2021. Our method allows us to reduce a problem on the axis to the problem on the segment.

22. Новиков С. И. Интерполяция с минимальным значением  $L_2$ -нормы линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами (40 минут)  
Novikov S.I. Interpolation with minimum value of the  $L_2$ -norm of a linear differential operator with constant coefficients (40 minutes)

Для класса ограниченных в  $l_2$ -норме интерполируемых значений рассматривается задача интерполяции на конечном интервале  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  с минимальным значением  $L_2$ -нормы дифференциального оператора с постоянными коэффициентами на интерполянтах. Интерполяция выполняется в узлах произвольной  $N$ -точечной сетки  $\Delta_N : a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b$ .

For a class of interpolated values bounded in the  $l_2$ -norm, we consider the interpolation problem on a finite interval  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  with a minimal value of the  $L_2$ -norm of a differential operator with constant coefficients on the interpolants. The interpolation is performed at the nodes of an arbitrary  $N$ -point grid  $\Delta_N : a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b$ .

23. Паюченко Н. С. Неравенство Колмогорова с несимметричным ограничением на вторую производную (45 минут)  
Payuchenko N.S. Kolmogorov-type inequalities with asymmetric restrictions on the second derivative (45 minutes)

Рассматриваются неравенства Колмогорова с несимметричным ограничением на старшую производную, которые оценивает сверху  $L_q$ -норму промежуточной производной функции через  $L_r$ -норму функции и  $L_p$ -норму несимметричной срезки старшей производной. Обсуждается подход к получению точных констант и нахождению экстремальных функций в некоторых частных случаях.

Kolmogorov inequalities with an asymmetric constraint on the highest derivative are considered, which estimate from above the  $L_q$ -norm of the intermediate derivative of the function in terms of the  $L_r$ -norm of the function and the  $L_p$ -norm of the asymmetric cutoff of the highest derivative. An approach to obtaining exact constants and finding extremal functions in some special cases is discussed.

24. Плещева Е. А. Интерполяционно-ортогональные базисы всплесков в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^2)$  (40 минут)  
Plescheva E.A. Interpolation-orthogonal bases of wavelets in the space  $L^2(\mathbb{R}^2)$  (40 minutes)

Рассматривается построение интерполяционно-ортогональных базисов всплесков на плоскости. Приводится способ по имеющимся ортонормированным базисам построить новые базисы всплесков в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , которые остаются ортонормированными, но будут также и интерполяционными.

The construction of interpolation-orthogonal wavelet bases on the plane is considered. A method is given for constructing new wavelet bases in the space  $L^2(\mathbb{R}^2)$  from existing orthonormal bases, which remain orthonormal but will also be interpolation bases.

25. Пьянков А. Д. Неравенства разных метрик в конечномерных пространствах для норм Люксембурга (40 минут)  
P'yankov A.D. Inequalities of different metrics in finite-dimensional spaces for Luxembourg norms (40 minutes)

В докладе обсуждается неравенство разных метрик для норм Люксембурга в пространстве  $\mathbb{R}^n$  и его применение к получению неравенств разных метрик для классов функций, для которых справедливо ограничение на норму производной типа неравенства Бернштейна.

The talk discusses an inequality of different metrics for Luxemburg norms in the space  $\mathbb{R}^n$  and its application to obtaining inequalities of different metrics for classes of functions for which a restriction of Bernstein inequality-type on the norm of a derivative is valid.

26. Разумовская Е. В. Об одной коэффициентной задаче для однолистных функций (30 минут)  
Razumovskaya E.V. On one coefficient problem for univalent functions (30 minutes)

Рассматривается влияние обнуления третьего тейлоровского коэффициента для подклассов однолистных функций.

The effect of zeroing the third Taylor coefficient for subclasses of univalent functions is considered.

27. Ревес С. Д. Обзор неравенств типа Турана–Эрода на выпуклых областях плоскости (50 минут)  
Соавтор: Глазырина П.Ю.  
Révész Sz.G. A survey of Turán–Erőd type inequalities on convex domains of the plane (50 minutes)  
Coauthor: Glazyrina P.Yu.

В качестве своего рода обратного к классическому неравенству Бернштейна–Маркова для алгебраических многочленов на подмножествах комплексной плоскости Туран инициировал изучение следующего вопроса: «Дать нижнюю границу нормы производной  $p'$  с помощью нормы  $p$ ». Такая ненулевая граница возможна только при некоторой нормализации. Туран предложил рассмотреть подкласс многочленов степени  $n$ , имеющих все свои нули в том же компактном множестве  $K$ , где берется норма. Первоначальная работа Турана была сосредоточена на максимальной норме, и он представил такие неравенства для единичного круга  $D$  и единичного интервала  $I$ . В том же 1939 году Дж. Эрод продолжил работу Турана, имея дело с несколькими другими выпуклыми областями и получая различные результаты, также применяя новые методы. Он также указал на общий вопрос для произвольных (скажем, компактных выпуклых) множеств.

Общий вопрос оказался трудным. Правильный порядок величины для общих компактных выпуклых множеств был выяснен только в XXI веке. В докладе объясняются результаты и доказательства для случая максимум-нормы.

После того, как случай максимальной нормы был более или менее урегулирован в 2000-х годах, в последнее десятилетие исследователи начали заниматься и другими нормами. Это исследование все еще продолжается, и мы надеемся указать, почему, например, результаты для  $L^q$ -нормы получить еще сложнее.

As a kind of converse to the classical Bernstein–Markov inequality for algebraic polynomials on subsets of the complex plane, Turán initiated the study of the following question: “Give a lower bound to the norm of the derivative  $p'$  by means of the norm of  $p$ .” Such a nonzero bound is only possible under some normalization. Turán proposed considering the subclass of degree  $n$  polynomials having all their zeros in the same compact set  $K$  where the norm is taken. Turán’s original work focused on the maximum norm, and he presented such inequalities for the unit disk  $D$  and the unit interval  $I$ . In the same year of 1939, J. Erőd continued Turán’s work dealing with several other convex domains and obtaining various results by applying new methods, too. He also pointed to the general question for arbitrary (say, compact convex) sets.

The general question proved to be hard. The right order of magnitude for general compact convex sets was clarified only in the XXIst century. The lecture explains the results and proofs for the maximum norm case.

After the maximum norm case was more or less settled in the 2000s, in the last decade, researchers started to deal with other norms, too. This research is still in progress, and we hope to point out why e.g.  $L^q$ -norm results are even harder to derive.

28. Рокина А.Э. Неравенство Глазыриной для алгебраических многочленов с нулями вне круга (40 минут)

Rokina A.E. Glazyrina’s inequality for algebraic polynomials with zeros outside the circle (40 minutes)

На классе алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами, не обращающихся в ноль в круге, исследуется неравенство Глазыриной – это частный случай неравенства Маркова–Никольского на отрезке  $[-1; 1]$ , когда  $L^q$ -среднее ( $q > 0$ ) производной многочлена порядка  $k$  оценивается через среднее геометрическое самого многочлена. Получена точная константа в неравенстве при  $q \leq 2$  для произвольного  $k$  и выписаны все экстремальные многочлены.

We study Glazyrina’s inequality in the class of algebraic polynomials with complex coefficients that do not vanish in the circle. This is a special case of the Markov inequality on the interval  $[-1; 1]$  when the  $L^q$ -mean ( $q > 0$ ) of a  $k$ th order derivative of a polynomial is estimated in terms of the geometric mean of the polynomial itself. We obtain the exact constant in the inequality for  $q \leq 2$  for an arbitrary  $k$  and find all extremal polynomials.

29. Саидусайнов М. С. Среднеквадратическое приближение функций комплексной переменной рядами Фурье с весом Якоби в весовом пространстве Бергмана (30 минут)

Saidusainov M.S. Mean square approximation of functions of a complex variable by Fourier series with Jacobi weight in the weighted Bergman space (30 minutes)

30. Теляковский Д. С. О производных числах функций из класса Гельдера–Никольского (40 минут)

Telyakovskii D.S. On the derived numbers of functions from the Hölder–Nicol’skii class (40 minutes)

Пусть  $\varphi(t)$  — выпуклая вверх функция типа модуля непрерывности, у которой  $\frac{\varphi(t)}{t} \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +0$ . Построено множество  $C_\varphi$  канторовского типа, которое имеет конечную положительную  $\varphi$ -меру Хаусдорфа и показано, что построенная по  $C_\varphi$  канторовская лестница  $C_\varphi(x)$  принадлежит классу Гельдера–Никольского  $H^\varphi$ .

Доказано, что если функция  $f(x)$  из  $H^\varphi[a; b]$  дифференцируема на  $[a; b] \setminus e$ , где  $H_\varphi(\bar{e}) = 0$ , т. е.  $\varphi$ -мера Хаусдорфа множества  $\bar{e}$  равна нулю, то  $f(x)$  с точностью до аддитивной постоянной однозначно определяется по своей производной. Пример множества  $C_\varphi$  и функции  $C_\varphi(x)$  показывает, что в этом утверждении условие  $H_\varphi(\bar{e}) = 0$  невозможно заменить условием  $H_\varphi(\bar{e}) < \infty$ .

Установлено, что если функция  $f(x)$  непрерывна и  $c > 0$ , то «массивность» по Хаусдорфу множества  $E$ , для каждой точки  $x$  которого при достаточно малых значениях  $|\Delta x|$  выполнено неравенство  $|f(x + \Delta x) - f(x)| \geq c\varphi(|\Delta x|)$ , не может быть большой. Пример множества  $C_\varphi$  и функции  $C_\varphi(x)$  и в этом случае показывает, что полученное условие на множество  $E$  существенно ослабить нельзя.

Let  $\varphi(t)$  be a convex upward function of the modulus of continuity type such that  $\frac{\varphi(t)}{t} \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow +0$ . We construct a set  $C_\varphi$  of Cantor type having a finite positive  $\varphi$ -Hausdorff measure and show that the Cantor staircase function  $C_\varphi(x)$  constructed from  $C_\varphi$  belongs to the Holder–Nikol’skii class  $H^\varphi$ .

We prove that if a function  $f(x)$  from  $H^\varphi[a; b]$  is differentiable on  $[a; b] \setminus e$ , where  $H_\varphi(\bar{e}) = 0$ , i.e., the Hausdorff  $\varphi$ -measure of the set  $\bar{e}$  is equal to zero, then  $f(x)$  is uniquely determined by its derivative up to an additive constant. An example of the set  $C_\varphi$  and the function  $C_\varphi(x)$  shows that the condition  $H_\varphi(\bar{e}) = 0$  in this statement cannot be replaced by the condition  $H_\varphi(\bar{e}) < \infty$ .

We establish that if the function  $f(x)$  is continuous and  $c > 0$ , then the Hausdorff “massiveness” of the set  $E$ , for each point  $x$  of which the inequality  $|f(x + \Delta x) - f(x)| \geq c\varphi(|\Delta x|)$  holds for sufficiently small values of  $|\Delta x|$ , cannot be large. An example of the set  $C_\varphi$  and the function  $C_\varphi(x)$  also shows in this case that the obtained condition on the set  $E$  cannot be significantly weakened.

31. Трембач А. А. Оптимальная экстраполяция многочленов, заданных с погрешностью (30 минут)

Trembach A.A. Optimal extrapolation of polynomials given with an error (30 minutes)

Исследуется задача оптимальной экстраполяции многочленов, заданных с погрешностью на компакте. Устанавливается ее взаимосвязь с задачей Чебышева о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля на компакте. Получено точное решение задачи оптимальной экстраполяции многочленов для случая, когда компакт является лемниской. Выписано точное решение задачи экстраполяции с отрезка  $[-1, 1]$  на вещественную прямую.

The problem of optimal extrapolation of polynomials defined with an error on a compact set is investigated. Its relationship with the Chebyshev problem of a polynomial that deviates least from zero on a compact set is established. An exact solution to the problem of optimal extrapolation of polynomials is obtained for the case when the compact set is a lemniscate. An exact solution to the problem of extrapolation from the segment  $[-1, 1]$  to the real line is found.

32. Холщевникова Н. Н. Множества Лузина и Серпинского (35 минут)

Kholshchevnikova N.N. Luzin and Sierpinski sets (35 minutes)

Рассматриваются вопросы существования множеств Лузина и Серпинского на прямой при различных теоретико-множественных предположениях дополнительных к ZFC.

We consider the issues of existence of Luzin and Sierpinski sets on the line under various set-theoretic assumptions additional to ZFC.

33. Царьков И. Г. Свойства солнечности и выпуклости для чебышевских множеств и их обобщений (90 минут)

Tsar'kov I.G. Solarity and convexity properties for Chebyshev sets and their generalizations (90 minutes)

Рассматриваются классические вопросы ГТП в абстрактных и конкретных функциональных пространствах.

Classical questions of GTA in abstract and specific functional spaces are considered.