Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Математико-механический факультет

Магистратура

Магистерская программа
511211 – Математическое моделирование

I. Аннотация программы
II. Программы курсов (дисциплины направления и дисциплины специализации)
III. Программа вступительного экзамена
IV. Программа выпускного экзамена

I. <u>АННОТАЦИЯ ПРОГРАММЫ</u>

Магистерская программа будет реализовываться кафедрой математического анализа и теории функций УрГУ (КМАиТФ) с привлечением курсов других кафедр математико-механического факультета: вычислительной математики (КВМ), прикладной математики (КПМ), информатики и процессов управления (КИПУ), высокопроизводительных компьютерных технологий (КВКТ).

ХАРАКТЕРИСТИКА НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
ПО ЗАЯВЛЕННОЙ МАГИСТЕРСКОЙ ПРОГРАММЕ

Программа будет реализовываться на базе научных исследований, проводимых на кафедре в сотрудничестве с тремя отделами Института математики и механики УрО РАН: теории приближения функций, аппроксимации и приложений, уравнений математической физики и Институтом геофизики УрО РАН. Научные исследования кафедры поддержаны несколькими грантами.

ТЕМАТИКА НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Приближение функций и операторов (*член-корр. РАН Ю. Н. Субботин, доктора ф.-м. н. В. В. Арестов, А. Г. Бабенко, В. М. Бадков, Н. И. Черных кандидаты ф.-м. н. Н.Ю.Антонов, П.Ю.Глазырина, С.Н.Васильев, А. В. Мариинов*)**.** Многие задачи математики, других разделов науки и техники сводятся к вопросам оптимального приближения функций одного и нескольких переменных более простыми классами функций. В математической модели любого процесса задача аппроксимации функций является важной составляющей, а иногда – и сутью модели. Теория приближения функций – один из важнейших разделов математики, в частности, вычислительной математики. Мощными современными аппаратами точного и приближенного представления функций являются сплайны, методы конечных и граничных элементов, всплески. На сегодняшний момент эффективные алгоритмы сжатия информации для ее обработки, рационального хранения и передачи являются одним из наиболее актуальных и востребованных научных направлений. Всплески оказались одним из наиболее эффективных аппаратов решения этих проблем. Кроме того, они оказались удобным и экономным средством для описания наноструктурных свойств материалов, обработки геофизических полей, диагностики клеточных заболеваний и др. *В этой тематике на кафедре ведутся следующие исследования.* Наилучшее восстановление неограниченных (и ограниченных) операторов при неполной информации относительно элементов; точные неравенства между нормами производных функций (неравенства Колмогорова). Аппроксимативные и экстремальные свойства тригонометрических полиномов, алгебраических многочленов, целых функций одного и нескольких переменных;

асимптотические и аппроксимативные свойства ортогональных полиномов; сходимость рядов Фурье; экстремальные задачи для положительно определенных функций с применением к исследованию сферических кодов. Вопросы устойчивости элементов наилучшего приближения. Аппроксимативные и экстремальные свойства одномерных и многомерных сплайнов, включая аппроксимацию кусочно-полиномиальными функциями, связанную с методом конечных элементов; применение метода конечных элементов в задачах численного решения уравнений в частных производных и др. задачах науки и техники. Развитие теории всплесков (вейвелетов) и их приложений к проблемам сжатия и обработки информации, управления излучением антенн, диагностики заболеваний. Фракталы (сжатие изображений, аппроксимация функций). Приложение методов теории аппроксимации к исследованию математических моделей естествознания.

Дифференциально-операторные уравнения; стохастические задачи; некорректные задачи. Обобщенные функции (*д. ф.-м. н. И. В. Мельникова, к. ф.-м. н. У.А.Ануфриева*). Исследование корректности дифференциально-операторных задач, в частности, важной абстрактной задачи Коши в банаховых пространствах и пространствах распределений (обобщенных функций). Современная теория полугрупп операторов; полугрупповые методы построения классических, регуляризованных и обобщенных решений. Построение регуляризирующих операторов для некорректных дифференциальных задач; связь между полугрупповыми методами и методами регуляризации некорректных задач. Постановка, исследование и решение задач с учетом случайных воздействий (в форме белого шума и винеровских процессов), называемых стохастическими задачами; к необходимости решения таких задач приводят многочисленные модели, возникающие в физике, биологии и экономике. Некоторые вопросы современной теории обобщенных функций, в том числе, новая теория абстрактных стохастических распределений в применении к решению стохастических задач. Решение задач финансовой математики на основе теории и методов стохастических уравнений.

Асимптотические проблемы и методы (*академик РАН А. М. Ильин, доктор ф.-м. н. А. Р. Данилин*). Асимптотический анализ бисингулярных задач математической физики (на основе метода согласования асимптотических разложений); асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, сингулярно и бисингулярно зависящих от малых параметров; асимптотические разложения многомерных интегралов, зависящих от малых параметров, с различными формами вырождения подынтегральных выражений. Асимптотические разложения интегралов, зависящих от параметров; асимптотические разложения характеристик задач оптимального управления; асимптотические разложения решений систем уравнений в частных производных.

Обратные задачи геофизики (*член-корр. РАН П. С. Мартышко*). Теория и методы решений обратных задач математической физики; интерпретация физических полей Земли; геодинамика и глубинное строение Земли.

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ СЕМИНАРЫ

1. Научный семинар под руководством члена-корреспондента РАН Ю. Н. Субботина и профессора Н. И. Черных в Институте математики и механики УрО РАН.
2. Научный семинар под руководством профессора В. В. Арестова – кафедра математического анализа и теории функций УрГУ.

РОДСТВЕННЫЕ НАУЧНЫЕ СПЕЦИАЛЬНОСТИ АСПИРАНТУРЫ УРГУ

- 01.01.01 – Математический анализ
- 01.01.02 – Дифференциальные уравнения
- 01.01.07 – Вычислительная математика
- 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

СОВЕТЫ ПО ЗАЩИТАМ ДИССЕРТАЦИЙ

1. В Уральском государственном университете имеется докторский совет по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование.
2. В Институте математики и механики УрО РАН имеются докторские советы по специальностям 01.01.01 – Математический анализ, 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, 01.01.07 – Вычислительная математика.

РУКОВОДИТЕЛЬ МАГИСТЕРСКОЙ ПРОГРАММЫ

Субботин Юрий Николаевич – член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математического анализа и теории функций УрГУ, заведующий отделом теории приближения функций Института математики и механики УрО РАН. Окончил математико-механический факультет Уральского госуниверситета в 1959 году. Один из ведущих специалистов в мире по методам конечных и граничных элементов, сплайнам, всплескам, теории приближения, задачам восстановления, нелинейной аппроксимации, математическому моделированию, сжатию информации. В последние годы читает потоковый курс теории функций комплексной переменной и ряд специальных курсов по теории аппроксимации, методу конечных и граничных элементов, математическому моделированию, сплайнам и всплескам. Ю. Н. Субботин подготовил 11 кандидатов наук, один из его учеников защитил докторскую диссертацию.

Учебный план магистерской программы

«Математическое моделирование»

ДИСЦИПЛИНЫ НАПРАВЛЕНИЯ

№	***Название курса***	***Часы***	***Преподаватель***
1.	Анализ	72	д. ф.-м. н. Н. И. Черных, к. ф.-м. н. А. В. Маринов – КМАиТФ
2.	Вероятность и статистика	72	к. ф.-м. н. М. И. Логинов – КПМ
3.	Дифференциальные уравнения (дополнительные главы)		д. ф.-м. н. В. Г. Пименов – КВМ и КМФ
4.	Прикладной функциональный анализ	72	д. ф.-м. н. А. Р. Данилин – КМАиТФ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ (Общее число часов – 900)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КУРСЫ

№	***Название курса***	***Часы***	***Преподаватель***
1.	Учебно-научный семинар		
2.	Непрерывные модели и алгоритмы	144	д. ф.-м. н. А. Р. Данилин, член-корр. РАН П. С. Мартышко, д. ф.-м. н. И. В. Мельникова, член-корр. РАН Ю. Н. Субботин, д. ф.-м. н. Н. И. Черных – КМАиТФ
3.	Аппроксимационные методы моделирования непрерывных процессов	36	член-корр. РАН Ю. Н. Субботин – КМАиТФ
4.	Гармонический анализ	36	д. ф.-м. н. В. В. Арестов, д. ф.-м. н. И. В. Мельникова – КМАиТФ
5.	Всплески и их применение	36	д. ф.-м. н. Н. И. Черных – КМАиТФ
6.	Сплайны и их применение	36	член-корр. РАН Ю. Н. Субботин – КМАиТФ
7.	Принятие решений	36	д. ф.-м. н. М. И. Гусев – КПМ
8.	Дискретные и непрерывные модели в экономике. Стохастический анализ	72	д. ф.-м. н. И. В. Мельникова – КМАиТФ
9.	Прямые и обратные задачи теории потенциала (потенциальных геофизических полей)	72	член-корр. РАН П. С. Мартышко – КМАиТФ
10.	Аналитические методы сжатия изображений. Алгоритмы и реализация.	36	к. ф.-м. н. С. Н. Васильев, к. ф.-м. н. П. Ю. Глазырина, А. Н. Борбунов – КМАиТФ
11.	Наноматериалы и нанотехнологии	36	к. х. н. А. Н. Еняшин – КМАиТФ

12.	Компьютерные технологии а) Математические скрипты б) Объектно-ориентированное программирование	 36 36	 КВКТ КИПУ

КУРСЫ ПО ВЫБОРУ

№	***Название курса***	***Часы***	***Преподаватель***
1.	Асимптотические методы в анализе	36	д. ф.-м. н. А. Р. Данилин – КМАиТФ
2.	Методы оптимизации	70	д. ф.-м. н. М. И. Гусев – КПМ
3.	Приближение функций	36	член-корр. РАН Ю. Н. Субботин – КМАиТФ
4.	Ортогональные полиномы	36	д. ф.-м. н. В. М. Бадков – КМАиТФ
5.	Оптимальное восстановление операторов	36	д. ф.-м. н. В. В. Арестов – КМАиТФ
6.	Навигация по изображениям геофизических полей и задачи анализа изображений		к. ф.-м. н. В. Б. Костоусов, Д. Перевалов – КВКТ
7.	Фракталы и всплески	36	член-корр. РАН В. И. Бердышев – КМЭ
8.	Биномиальные и непрерывные модели финансовой математики	70	д. ф.-м. н. И. В. Мельникова –КМАиТФ
9.	Спектральная теория (неограниченных) операторов	36	академик РАН А. М. Ильин – КМАиТФ
10.	Линейное программирование	70	д. ф.-м. н. В. Д. Скарин – КМЭ
11.	С/практ Прикладная статистика	34	к. ф.-м. н. М. И. Логинов, Л. И. Бродская – КПМ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЕМИНАРЫ

№	***Название курса***	***Часы***	***Преподаватель***
1.	Сферические коды	70	д. ф.-м. н. В. В. Арестов, к. ф.-м. н. П. Ю. Глазырина – КМАиТФ
2.	Экстремальные задачи теории приближения	70	д. ф.-м. н. В. В. Арестов – КМАиТФ

Примечания

1. Курсы направления предлагаются всем магистрам-математикам по определенному правилу.
2. Курсы специализации будут читаться три первых семестра магистратуры.
   Каждый семестр читается 2+2=4 часа в неделю, общий объем в семестр 70–72 аудиторных часа курсов специализации. Каждый семестр предполагается + один спецсеминар.
3. Конкретный набор специальных курсов и семинаров определяется (руководителем и магистрантом) в зависимости от специализации магистранта.

II. ПРОГРАММЫ КУРСОВ
(ДИСЦИПЛИНЫ НАПРАВЛЕНИЯ, И ДИСЦИПЛИНЫ СПЕЦИАЛИЗАЦИИ)

ДИСЦИПЛИНЫ НАПРАВЛЕНИЯ

Программа курса

ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Автор – д. ф.-м. н. А. Р. Данилин

Лекции 72 часа

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Цель этого курса – дать современное представление об основах анализа в бесконечномерных линейных пространствах, обобщающего как теорию линейных операторов в конечномерных пространствах, так и понятие предела последовательности и функций и других понятий, конечномерного анализа; показать применение основных понятий и методов функционального анализа к различным областям математики, таким как: интегральные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, вариационное исчисление, выпуклый анализ, оптимальное управление и др.; научить магистрантов основополагающим принципам и фактам функционального анализа, показать разнообразие конкретных реализаций общих конструкций, обеспечить возможность дальнейшего самостоятельного освоения и применения современных методов непрерывного анализа.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Понятие о топологическом пространстве. Недостаточность понятия метрического пространства при описании различных видов сходимости в пространствах функций. Основные понятия топологии, предел и непрерывность в топологическом пространстве, аксиомы отделимости и счетности, сепарабельность; компактность: разные виды компактности, критерий компактности, связанный с центрированными множествами, необходимые условия сходимости. Описание топологии с помощью обобщенных последовательностей (подход Гейне).

Линейные топологические и нормированные пространства (л. т. п. и л. н. п.). Линейные топологические пространства, инвариантность открытости множества относительно операций сложения и умножения на скаляр, поглощающие множества, топология конечномерного отделимого н. п.; нормированные и евклидовы пространства, как л. т. п., критерий нормируемости л. т. п. (теорема А.Н. Колмогорова); выпуклые и абсолютно выпуклые множества, полунормы и функционал Минковского, локально выпуклые пространства (л. в. п.). Полнота локально выпуклых пространствах.

Линейные операторы и линейные функционалы в л. в. п. Критерии непрерывности линейного оператора в л. т. п., л. в. п. линейных ограниченных операторов (л. в. п. л. о. о.), равномерная и поточечная сходимость л. о. о., полнота л. в. п. л. о. о.; принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха – Штейнгауза) и его следствия; сопряженное пространство, сопряженные пространства к l_p, c, c_0, $C[a,b]$, $C^{(1)}[a,b]$, $L_p(D)$; Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала в общем случае и ее следствия; рефлексивность, сепарабельность л. н. п., сопряженное к которому сепарабельно. Двойственность, слабая сходимость в л. в. п., критерий слабой сходимости, слабая сходимость в c_0, l_p, свойства слабо сходящихся последовательностей, слабая и *-слабая сходимости в сопряженном пространстве, *-слабая секвенциальная компактность замкнутого шара в сопряженном пространстве. Сопряженный оператор в л. в. п., ограниченность оператора, сопряженного к ограниченному оператору, теоремы Банаха об открытом отображении, о непрерывности обратного оператора, о замкнутом графике, о непрерывности оператора проектирования в общем случае, мера обусловленности л. о. о.; Пространства с базисом и сопряженные к ним. Компактные линейные операторы (к. л. о.) в л. в. п., равномерный предел к. л. о., достаточные условия компактности линейных операторов, к. л. о. в рефлексивных пространствах, компактность сопряженного оператора к к.л.о. (теорема Шаудера).

Линейные операторы в гильбертовых пространствах. Линейные неограниченные операторы в г. п. и сопряженные к ним. Симметричные и самосопряженные линейные операторы в г. п., самосопряженные расширения симметричных операторов, положительно определенные операторы; спектр самосопряженного л. о. о., спектральная теорема для неограниченных самосопряженных операторов, функциональное исчисление самосопряженных операторов; приведение оператора к виду умножения на функцию.

Пространства Соболева. Применение теоремы Гильберта – Шмидта к решению уравнений в частных производных, задача Штурма – Лиувилля, теорема Лакса – Мильграма и ее применение к доказательству разрешимости уравнений в частных производных; пространства Соболева, характеризация обобщенных производных, теорема о компактном вложении $H^1(a,b)$ в $C[a,b]$; Следы функций из пространств Соболева, теоремы о следах, теоремы вложения в общем случае.

Обобщенные функции. Пространства D и D', регулярные и сингулярные о. ф., локальные свойства о. ф., носитель о. ф., структурные теоремы, сингулярные о. ф. с конечным носителем; свертка основной и обобщенной функций, свойства свертки; свертка обобщенных функций, фундаментальное решение дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами; пространства S быстро убывающих функций и S' медленно растущих распределений, пространства E и E'.

Элементы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах. Сильная (по Фреше) и слабая (по Гато) дифференцируемость отображений в б. п., дифференциалы Фреше и Гато; полилинейные отображения, дифференцируемость, производные и дифференциалы высших порядков отображений в б. п., симметричность оператора второй производной, формула Тейлора, достаточные условия строгого локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в б. п., условия Лежандра и Якоби; теорема о неявной функции, условный экстремум вещественной дифференцируемой функции в б. п. и метод множителей Лагранжа.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с. (а также все издания с 1989 г.).
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
3. Рудин У. Функциональный анализ. СПб. 2005.
4. Садовничий В. А. Теория операторов. М.: Высшая школа, 1999. 368с.
5. Треногин В. А. Функциональный анализ: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 488 с.
6. Треногин В. А.. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 240 с.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. М.: Физико-математическая литература, 2000. 400 с.
8. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
9. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Добросвет, 2000. 412 с.
10. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
11. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984. 256 с.

12. Коркина Л. Ф. Нормированные пространства. Методические указания для практических занятий по функциональному анализу. Изд-во Урал. ун-та, 1985. 29 с.
13. Мельникова И. В., Ануфриева У. А. Линейные операторы. Учебно-методическое пособие по функциональному анализу. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2002. 63 с.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М .: Наука, 1977. 724 с.
2. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. шк., 1982. 271 с.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 357 с.
4. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.
5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ,1950.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1993. 440с.
7. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МНЦМО, 2004. 552 с.
8. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 1071 с.
9. Мельникова И. В., Коркина Л. Ф. Линейные операторы. Методические указания для практических занятий по функциональному анализу. Изд-во Урал. ун-та, 1989. 28 с.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Программа курса

НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ

Авторы – член-корреспонденты РАН Ю. Н. Субботин, П. С. Мартышко,

доктора физ.-мат. наук А. Р. Данилин, И. В. Мельникова, Н. И. Черных

Лекции – 4 семестра по 36 часов

БЛОК 1
А. Р. Данилин. Общие принципы математического моделирования. (17 лекций)

1. Понятие моделирования и математического моделирования. (2 часа)
2. Непрерывные и дискретные математические модели, статика и динамика в природе, средства математического моделирования объектов и их отношений. (2 часа)
3. Иерархия моделей. Погружение исследуемой модели в более широкий класс, как способ исследования исходной модели. (2 часа)
4. Моделирующее значение производной и интеграла. Обобщения этих понятий на различные классы функций. (4 часа)
5. Различные классы задач для дифференциальных уравнений и систем, как средство моделирования различных ситуаций при исследовании динамических объектов. (2 часа)
6. Разностные уравнения, как дискретная модель динамических объектов. (2 часа)
7. Математическая модель и проблема «разрешимости» соответствующих математических задач, явные и неявные решения, «обобщенные решения и модели». (4 часа)
8. Приближенные методы, как средство моделирования. (2 часа)

9. Многомерные и бесконечномерные пространства с точки зрения математического моделирования. «Понижение» размерности объекта за счет выхода в пространство другой природы. (2 часа)
10. Математический аппарат описания и исследования непрерывных моделей. Роль линейности в моделировании. (4 часа)
11. Роль различных метрик (топологий, сходимости) в исследовании непрерывных математических моделей. (2 часа)
12. Комплексный анализ, функциональный анализ и теория обобщенных функций как аппарат исследования математических моделей. (6 часов)

ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. М.: КомКнига, 2007.
2. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов.- М. УРСС, 2006
3. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие. Под ред. П. В. Трусова. М.:Логос, 2004.
4. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. М.: Физматлит, 2001.
5. Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. М.: МГУ, 1983.
6. Моисеев Н. Н. Алгоритмы развития. М.: Наука, 1981.
7. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
9. Люстерник А. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
10. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
11. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
12. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1988.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
14. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.

БЛОК 2

Ю. Н. Субботин, Н. И.Черных. Аппроксимационные подходы (19 лекций)

1. Физическая и математическая модель процессов диффузии и разбухания оболочек твелов АЭС. Исследование и численные методы решения параболических уравнений, связанных с этой проблемой, включая полудискретный МКЭ. (3 часа)
2. Несущие конструкции в строительной механике. Применение МКЭ (метод конечных элементов). (2 часа)
3. Уравнения Максвелла для электромагнитных полей. Формула Кирхгоффа для полей в дальней зоне от источника излучения. Алгоритмы выбора оптимальных управляющих параметров антенны. (3 часа)
4. Математические модели навигации автономными летательными аппаратами по геофизическим полям. Информативность геофизического поля. Алгоритмы решения задач аппроксимации, наилучшей с точки зрения задач навигации. (4 часа)
5. Применение всплесков для сжатия данных и обработки сигналов. (2 часа)
6. Робототехника. Чебышев и шарнирные механизмы. (2 часа)
7. Оптимальные методы дифференцирования гладких функций, заданных с погрешностью, и их применение при решении прикладных задач. (3 часа)

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1975.
2. Бердышев В. И., Субботин Ю. Н. Численные методы приближения функций. Свердловск: Средне-Уральское книжное изд-во, 1979.
3. Бердышев В. И., Костоусов В. Б. Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 270 с.
4. Бердышев В. И., Петрак Л. В. Аппроксимация функции. Сжатие численной информации. Приложения. Екатеринбург. 1999. 296 с.
5. Вендик О. Г. Антенны с немеханическим движением луча. М.: Сов. радио, 1965.
6. Мейлукс Р. Дж. Теория и техника фазированных антенных решеток // ТИИЭР. 1982. Т. 70, №3. С. 5–62.
7. Гусак А. А. Теория приближения функций. Минск. Изд-во БГУ, 1972.
8. Чебышев П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. Собр. соч. т. 2. М. Л. 1947.
9. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980.
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
11. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. –М.: Наука, 1980.
12. Стренг Г., Фикс Г. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977.
13. Бреббия Н., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982, 248 с.
14. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981.
15. Бенерджи П., Баттерфильд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
16. Бребия Н., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982.
17. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
18. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: РХД, 2004.
19. Чуи Ч. К. Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.

БЛОК 3

П. С. Мартышко. Математическое моделирование геофизических полей (17 лекций)

1. Прямые и обратные задачи гравиметрии: линейная и нелинейная постановки, уравнения обратных задач «рудного» и «структурного» типа, методы регуляризации при решении обратных задач.
2. Прямые и обратные задачи магнитометрии с учётом и без учёта размагничивания: линейная и нелинейная постановки, уравнения обратных задач «рудного» и «структурного» типа, методы регуляризации при решении обратных задач.
3. Алгоритмы решения прямых и обратных задач, метод «локальных поправок».

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартышко П. С. Обратные задачи электромагнитных геофизических полей. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1997.
2. Мартышко П. С. Интегральное уравнение двумерной задачи сопряжения стационарных тепловых полей // Физика Земли. 2005. №12.
3. Мартышко П. С. Об определении плотности в слоистой среде по гравитационным данным // Геофизический журнал. 2005. Т. 27, №4.
4. Мартышко П. С. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. Т. 25, № 3.
5. Мартышко П. С. Выделение сигнала, индуцированного пространственно-неоднородным вращающимся геомагнитным полем // Вестник ОГГГГН РАН. 2002. № 1.

БЛОК 4
И. В. Мельникова. Стохастические дифференциальные уравнения (17 лекций)

1. Примеры задач из биологии, экономики, физики и других областей, приводящие к решению стохастических дифференциальных уравнений.
2. Предварительный материал их теории случайных величин и случайных процессов. Теорема Колмогорова. Броуновское движение. Основные свойства.
3. Интеграл Ито. Связь между интегралами Ито и Стратоновича.
4. Стохастические интегралы и Ито формула: одномерный и многомерный случаи, примеры.
5. Стохастические дифференциальные уравнения. Сильные и слабые решения. Модель роста популяции и другие примеры.
6. Теорема существования и единственности.
7. Задача фильтрации. Линейная задача фильтрации, разбитая по шагам. Фильтр Калмана – Бьюси.
8. Задача диффузии: основные свойства решений. Определение диффузии Ито. Марковское свойство.
9. Генератор диффузии, характеристический оператор. Формула Дынкина. Уравнения Колмогорова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир: АСТ, 2003. 408 с.
2. Melnikova I. V., Filinkov A. I., Anufrieva U. A. Abstract stochastic equations I: classical and distribution solutions // J. of Math. Sciences, Functional Analysis. 2002. 111, № 2. P. 3430–3475.
3. Shreve Steven E. Stochastic Calculus for Finance I, II. The Binomial Asset Pricing Model. Springer Finance. 2005. 187 с.

Программа курса

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ

Автор – член-корр. РАН, д. ф.-м. н., профессор Ю. Н. Субботин

Лекции 34 часа

ВВЕДЕНИЕ

Курс посвящен двум современным и наиболее популярным методам численного решения уравнений с частными производными – методу конечных (МКЭ) и методу граничных элементов (МГЭ), другое название которого – метод граничных интегральных уравнений. Эти методы широко и успешно применяются при решении различных прикладных задач: расчет на прочность различных сооружений и деталей машин, задачи обтекания, задачи на собственные значения и другие прикладные задачи, математическая модель которых приводит к необходимости решать обыкновенные дифференциальные уравнения или уравнения с частными производными. Для реализации этих методов широко используются методы математического анализа, линейной алгебры, функционального анализа и теории приближения функций. Кроме того, в курсе дается представление о всплесках и фракталах.

Цель и задачи курса – дать студентам математико-механического факультета фундаментальные знания по методам конечных и граничных элементов, указать основные современные тенденции в развитии этих методов и заложить основы по практическому применению этих методов при решении прикладных задач.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Введение. Основные идеи метода конечных разностей, конечных элементов, граничных элементов. Примеры практических задач, решаемых указанными методами.

Метод конечных элементов для эллиптических задач.

Линейные и билинейные формы: ограниченность, коэрцетивность. Общая схема Ритца, существование и единственность точного и приближенного решения. Общие оценки погрешности. Функциональные гильбертовы и банаховы пространства. Метод конечных элементов (МКЭ) для гармонического уравнения: триангуляция, линейные и билинейные базисные функции, формирование локальных и глобальных матриц жесткости и массы и локального и глобального векторов нагрузки.

Различные типы триангуляций и базисных функций, оценки погрешности аппроксимации интерполяционными кусочно полиномиальными функциями.

МКЭ для эллиптических краевых задач более высокого порядка: бигармоническое уравнение, расчет тонких упругих оболочек.

Метод граничных элементов. Понятие фундаментального решения и функции Грина. Вывод граничного интегро-дифференциального уравнения для краевой задачи. Вывод уравнения, связывающего решение внутри области через его значения и значения некоторых его производных на границе. Дискретизация. Анализ соответствующей линейной алгебраической системы. Методы построения фундаментальных решений, частично удовлетворяющих однородным граничным условиям.

Метод конечных элементов для параболических и гиперболических задач. Линейные задачи и полудискретные методы их численного решения. Схема Кранка – Никольсона (дробных шагов). Нелинейные задачи. Схема предиктор-корректор. Определение граничных условий для соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

МКЭ в задачах на собственные значения.

Некоторые современные вариации и модификации МКЭ. Криволинейная триангуляция. Анализ Якобианов преобразования криволинейных треугольников, симплексов, четырехугольников в стандартные. Нерешенные задачи. Понятие о переходных элементах. Применение в МКЭ неполиномиальных базисных функций (дробно-рациональные, всплески и др.). Понятие о p, h и (h-p)-вариантах МКЭ. B-сплайны в МКЭ. Согласованные и несогласованные базисные функции.

Интерполяционные всплески. Преобразование Фурье. Ортонормируемые всплески. Условие ортонормируемости в терминах преобразования Фурье. Пирамидальная схема. Понятие о фрактальных сжатиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
3. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980.
4. Стренг Г., Фикс Г. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
5. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981.

6. Бенерджи П., Баттерфильд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
7. Бребия Н., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982.
8. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
9. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: РХД, 2004.
10. Чуи Ч. К. Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.

Программа курса

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Авторы – д. ф.-м. н., профессор В. В. Арестов, д. ф.-м. н., профессор Н. И. Черных

Лекции 36 часов

L_1-теория. Преобразование Фурье на $L_1(\mathbf{R}^m)$ и его свойства; теорема Римана – Лебега. Преобразование Фурье и операторы сдвига, сжатия, дифференцирования. Свертка двух функций из $L_1(\mathbf{R}^m)$. Преобразование Фурье свертки; теорема умножения. Φ-методы суммирования интеграла обратного преобразования Фурье. Восстановление в $L_p(\mathbf{R}^m)$ $(1 \le p \le \infty, L_\infty = C_0)$ функций из $L_1(\mathbf{R}^m) \cap L_p(\mathbf{R}^m)$ по их преобразованиям Фурье с помощью Φ-методов суммирования (расходящихся) интегралов. Методы суммирования Абеля – Пуассона и Гаусса – Вейерштрасса. Поточечное восстановление функции из $L_1(\mathbf{R}^m)$ с суммируемым преобразованием Фурье по ее преобразованию Фурье. Точки Лебега суммируемых функций. Восстановление суммируемой функции в ее точках Лебега по ее преобразованию Фурье с помощью методов суммирования. Суммируемые функции с неотрицательным преобразованием Фурье.

L_2-теория преобразования Фурье. Изометричность в L_2 преобразования Фурье функций из $L_1(\mathbf{R}^m) \cap L_2(\mathbf{R}^m)$. Оператор преобразования Фурье на $L_2(\mathbf{R}^m)$. Преобразование Фурье свертки; теорема умножения в $L_2(\mathbf{R}^m)$. Унитарность оператора преобразования Фурье на $L_2(\mathbf{R}^m)$. Обратное преобразование Фурье. Равенство Парсеваля. Преобразование Фурье свертки двух функций.

L_p-теория преобразования Фурье $(1 < p < 2)$ на основе L_1 и L_2 теорий преобразования Фурье.

Элементы теории обобщенных функций медленного роста. Пространство S быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}^m$; топология на S. Непрерывность операторов сдвига, дифференцирования, преобразования Фурье, свертки с суммируемой функцией в топологии S. Обобщенные функции медленного роста как элементы сопряженного пространства S'. Обобщенные функции типа функций и мер. Производная обобщенной функции. Структура обобщенных функций; порядок сингулярности обобщенной функции. Операторы дифференцирования, сдвига, сжатия в пространстве S'. Преобразование Фурье обобщенных функций. Свертка обобщенной функции с функцией из S, ее преобразование Фурье и их свойства. Преобразование Фурье функций из $L_p(\mathbf{R}^m)$ $(1 \le p \le \infty)$ как обобщенных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
2. Титчмарш Е. Преобразование Фурье. М.: ИЛ, 1949.
3. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1989.
5. Schwartz L. Theorie des distributions, I, II, Act. Sci. Ind., 1091, 1122, Paris, 1951.
6. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954.

Программа курса

ВСПЛЕСКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Автор – д. ф.-м. н., профессор Н. И. Черных

ЦЕЛЬ КУРСА

Цель курса – изложить основы нового направления в теории функций – теории ортогональных и биортогональных базисов всплесков, обеспечив слушателям возможность дальнейшего самостоятельного изучения периодической литературы по этой тематике. Показать перспективность использования аппарата теории всплесков в гармоническом анализе, в задачах представления, аппроксимации и восстановления функций, в задачах обработки и фильтрации сигналов, кодирования изображений и других прикладных задачах. Сделать обзор по так называемым всплескам второго поколения, по связи с «уточняющими алгоритмами», применяемыми в компьютерном дизайне для численной аппроксимации почти интерполяционными функциями.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Предыстория базисов всплесков. Формальное определение (описание) базисов всплесков. Осмысление интегральных преобразований, встречавшихся в работах Лузина, Кальдерона и др. с позиции основной идей базисов всплесков. Интерпретация системы функций Хаара на вещественной оси с этих же позиций.

Преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$. Определения и основные свойства (обзорно). Непрерывные всплески, прямое и обратное всплеск преобразование.

Базисы Рисса. Определение Н. К. Бари. Эквивалентные определения. Основные свойства.

Кратно-масштабные разложения пространства $L_2(\mathbb{R})$ (мультиразрешающая аппроксимация, мультиразрешающий анализ $L_2(\mathbb{R})$). Аксиоматика. Определение мультиразрешающей аппроксимации системой аксиом (свойств) как последовательности вложенных подпространств V_j $(j \in \mathbf{Z})$ пространства $L_2(\mathbb{R})$. Эквивалентность трех формулировок пятой аксиомы мультиразрешающей аппроксимации: в терминах изоморфизма J пространств V_0 и $\ell_2(\mathbf{Z})$, перестановочного с операторами целочисленного сдвига, в терминах базиса Рисса, в терминах ортогонального базиса вида $\{\varphi(x+k)\}_{\{k\in\mathbf{Z}^m\}}$ пространства V_0. Конструкция базиса Рисса пространства V_0 на базе изоморфизма J.

Критерий ортонормальности системы $\{\varphi(x+k)\}_{\{k\in\mathbf{Z}^m\}}$ в терминах преобразования Фурье функции $\varphi(x)$. Конструкция ортогонального базиса всплесков пространства V_0 на основе его базиса Рисса. Базисы всплесков пространств V_j, $j \in \mathbf{Z}$.

Примеры мультиразрешающих аппроксимаций**.** Регулярные мультиразрешающие аппроксимации. Мультиразрешающие аппроксимации $L_2(\mathbb{R})$, определяемые подпространством V_0 с ортогональным базисом всплесков (или базисом Рисса), преобразование Фурье порождающей функции которого имеет компактный носитель. Мультиразрешающие аппроксимации пространства $L_2(\mathbb{R})$ на основе полиномиальных сплайнов.

Ортогональное дополнение W_0 пространства V_0 в V_1 и его ортонормированный базис всплесков. Характеризация пространства V_0 в терминах преобразования Фурье его элементов. Характеризация пространства W_0 в тех же терминах. Конструкция ортогонального базиса всплесков пространства W_0 на основе базисов всплесков пространств V_0 и V_1. Примеры: базисы всплесков пространств V_0 с компактными носителями их преобразований Фурье; базисы Баттла – Лемарье, Стромберга и Чуи.

Базисы всплесков пространства $L_2(\mathbb{R})$. Разложение пространства $L_2(\mathbb{R})$ в прямую сумму ортогональных подпространств W_j $(W_j = V_j \dot{-} V_{j-1})$. Базисы всплесков пространств W_j и всего $L_2(\mathbb{R})$. Конкретные классы базисов: Мейера, Чуи, Добеши.

Аппроксимативные свойства регулярных базисов всплесков в $L_2(\mathbb{R})$. Теорема Малата. Оценки погрешности аппроксимации функций частичными суммами рядов Фурье по базисам всплесков с компактным носителем. Случай нескольких переменных (обзорно).

Конструкция базисов всплесков в $L_2(\mathbb{R}^m)$ по методу тензорного произведения одномерных базисов всплесков.

Базисы всплесков функциональных пространств $L_2(\mathbb{R}^m)$, $C(\mathbb{R}^m)$, $H_p(\mathbb{R}^m)$ и пространств Бесова.

Периодические базисы всплесков. Периодизация функций на основе сумматорной теоремы Пуассона. Периодические базисы всплесков Мейера и Осколкова – Оффина в пространствах $L_p(0,2\pi)$. Их аппроксимативные свойства.

Базисы всплесков в гармоническом анализе и прикладных задачах.

Биортогональные системы масштабирующих функций и всплесков. Нестационарные всплески. Всплески второго поколения (по Свелдену).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуи Ч. К. Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: РХД, 2004. 464 с.
3. Meyer Y. Ondolettes. Paris: Herman, 1990. 215 с.
4. Guy D. Waveletls and Singular Integrals on Curves and Surfaces. Springer-Verlag. 109 с.
5. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основные свойства всплесков. // Фундаментальная и прикладная математика. 1987. Т. 3, № 4. С.999–1028.
6. Malat S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L_2(\mathbb{R})$ // Transactions A.M.S. 315 (1989). P.69–87.
7. Offin D., Oskolkov K. A Note on Orthonormal Polynomial Bases and Wavelets // Constructive Approximation, 9 (1993). P.319–325.
8. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
9. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. М., ФИЗМАТЛИТ, 2005. 616 с.
10. Петухов П. А. Введение в теорию базисов всплесков. СПбГТУ, 1999. 132 с.
11. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2008. 304с.

Программа курса

СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Автор – член-корр. РАН, д. ф.-м. н., профессор Ю. Н. Субботин

Лекции 70 часов

1. Экстремальная задача интерполяции при ограничениях на старшую производную.
2. Интерполяционные сплайны с равномерными узлами. Явные формулы для параметров сплайна.
3. Оценки погрешности на классах дифференцируемых функций.
4. Неравенства Маркова для сплайнов и их применение к оценкам колмогоровских поперечников.
5. Определяющие уравнения для параметров интерполяционных параболических и кубических сплайнов. Матрицы с доминирующей главной диагональю.
6. Оценки погрешности аппроксимации.
7. Сплайны нечетной степени. Краевые условия. Размерность. Теоремы существования и единственности интерполяционных сплайнов нечетной степени. 1-е и 2-е интегральное соотношения для интерполяционных сплайнов нечетной степени. Оценки погрешности аппроксимации.
8. В-сплайны. Применение сплайнов при решении краевых задач, аппроксимации неявно заданных функций, в методе наименьших квадратов.
9. Многомерные сплайны.
10. Понятие о L и D^m -сплайнах.
11. Интерполяционные всплески на основе сплайнов четной и нечетной степени с равномерными узлами.
12. Преобразование Фурье. Функции Мейера и их обобщения. Ортонормированные системы всплесков. Условие ортонормированности в терминах преобразования Фурье.
13. Мультиразрешающий анализ. Проблемы сжатия изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 318 с.
2. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука. 1976. 240 с.
3. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Мир, 1985. 304 с.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвелетам. Москва, Ижевск, 2001. 463 с.
5. Чуи К. Введение в вейвелеты. М.: Мир, 2001. 414 с.

Программа курса

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Автор – д. ф.-м. н., старший научный сотрудник М. И. Гусев

Лекции 36 часов

ВВЕДЕНИЕ

Теория принятия решений предназначена для оказания помощи лицу, принимающему решение при выборе возможных действий в условиях, когда затруднена или невозможна однозначная оценка последствий принимаемых решений. Теория принятия решений имеет много-дисциплинарный характер, модели и методы теории разрабатываются и применяются в экономике, прикладной математике, социологии и психологии, информатике. В рамках данного курса изучаются математические модели и методы принятия решений. Основное внимание уделяется изложению методов решения задач многокритериальной оптимизации, формализации задач принятия решений в условиях неопределенности. Кратко рассматриваются элементы теории игр. Приводятся иллюстрирующие примеры из области финансовой математики, планирования производства, управления запасами.

При изложении материала используются дисциплины: математический анализ, выпуклый и многозначный анализ, теория вероятности и методы оптимизации.

В результате изучения курса студент получает представление об основных подходах к решению задач о наилучшем выборе альтернатив в ситуациях, когда альтернативы оцениваются совокупностью критериев и на процесс принятия решений влияют неконтролируемые факторы.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1. Многокритериальные задачи принятия решений.
    1. Формализация задач многокритериальной оптимизации, множество Парето. Внешняя устойчивость множества Парето. Свертки критериев и характеризация множества Парето. Линейные свертки критериев в выпуклых и линейных задачах многокритериальной оптимизации.
    2. Функции ценности ЛПР. Локальные коэффициенты замещения. Свойства функции ценности, вытекающие из поведения локальных коэффициентов замещения.
    3. Человеко-машинные процедуры принятия решений.
    4. Решение задач многокритериальной оптимизации методами целевого программирования.
2. Принятие решений в условиях неопределенности.
    1. Классификация задач принятия решений, способы описания неопределенности.
    2. Функции полезности ЛПР. Свойства функции полезности, характеризующие склонность и несклонность к риску. Локальная несклонность к риску. Теорема Пратта.
    3. Парадокс Алле. Причины нерационального поведения ЛПР.
    4. Принятие решений в условиях риска на примере задачи о выборе оптимального портфеля ценных бумаг.
    5. Задача управления запасами. Детерминированный и стохастический варианты.
3. Игровые задачи принятия решений.
    1. Терема о существовании седловой точки для антагонистических игр. Смешанные сстратегии в матричных играх. Существование решений в позиционных играх.
    2. Игры с непротивоположными интересами. Равновесие по Нэщу, теорема существования. Критический анализ равновесных решений, арбитражные схемы.

3. Коллективный выбор решения. Системы голосования и парадокс де Кондорсэ. Формализация задачи о построении системы голосования. Теорема Эрроу

ЛИТЕРАТУРА

1. Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. М.: ИЛ, 1961.
2. Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976.
3. Райфа Г. Анализ решений. М.: Наука, 1977.
4. Кини Р., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
5. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
6. Юдин Д. Б. Вычислительные методы теории принятия вешений. М.: Наука, 1989.
7. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и Связь, 1992.
8. Ларичев О. И., Мошкович Е. М. Качественные методы принятия решений. М.: Физматлит, 1996.
9. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений. М: Логос, 2000.

Программа курса

ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Автор – д. ф.-м. н., профессор И. В. Мельникова

Лекции 70 часов

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время огромный интерес вызывают модели, построенные с учетом случайных возмущений. Математически такие модели приводят к дифференциальным уравнениям со случайными процессами, называемым стохастическими дифференциальными уравнениями.

Задача курса – дать математические основы теории стохастических уравнений и познакомить студентов с их применением в финансовой математике, уделяя особое внимание экономико-математическим принципам, лежащим в основе построения моделей финансовой математики – безарбитражности, риск-нейтральности мер и мартингальности. С этой целью начинается курс с конструкции дискретных (биномиальных) моделей финансовой математики, важных как с точки зрения осознания указанных принципов, так и использования в качестве приближенных методов.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1. Определение первичных и производных ценных бумаг (акции, бонды, опционы разного рода).
2. Одноепериодные биномиальные модели. Принцип безарбитражности.
3. Многопериодные биномиальные модели. Принцип риск-нейтральности. Мартингалы. Принцип мартингальности.
4. Примеры задач из биологии, экономики, физики и др. областей, приводящие к решению стохастических дифференциальных уравнений.

5. Предварительный материал из теории случайных величин и случайных процессов. Теорема Колмогорова. Броуновское движение. Основные свойства.
6. Интеграл Ито. Связь между интегралами Ито и Стратоновича.
7. Стохастические интегралы и Ито формула: одномерный и многомерный случаи, примеры.
8. Стохастические дифференциальные уравнения. Сильные и слабые решения. Модель роста популяции и другие примеры.
9. Теорема существования и единственности.
10. Примеры решения стохастических дифференциальных уравнений.
11. Броуновское движение как предел масштабированных случайных блужданий и геометрическое броуновское движение как предел решений, полученных в биномиальных моделях.
12. Уравнение Блэка – Шоулса – Мертона.
13. Задача фильтрации. Линейная задача фильтрации, разбитая по шагам. Фильтр Калмана – Бьюси.
14. Задача диффузии: основные свойства решений. Определение диффузии Ито. Марковское свойство.
15. Генератор диффузии, характеристический оператор. Формула Дынкина. Уравнения Колмогорова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир: АСТ, 2003. 408 с.
2. Melnikova I. V., Filinkov A. I., Anufrieva U. A. Abstract stochastic equations I: classical and distribution solutions. // J. of Math. Sciences, Functional Analysis. 2002. 111, № 2. P. 3430–3475.
3. Shreve Steven E. Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model. Springer Finance. 2005. C.187.
4. Shreve Steven E. Stochastic Calculus for Finance II. Continuous Asset Pricing Models. Springer Finance. 2006. C.340.

Программа курса

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

(ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ)

Автор – член-корр. РАН, д. ф.-м. н, профессор П. С. Мартышко

Лекции 70 часов

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются методы решения прямых и обратных задач теории потенциала, вопросы существования и единственности решения обратных задач. Излагаются как классические, так и оригинальные результаты, их приложение к интерпретации реальных геофизических данных.

Предполагается знание математического анализа, теории функций комплексного переменного, основ функционального анализа.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1. Специальные вопросы теории ньютоновского потенциала.

2. Гравитационный потенциал, потенциал стационарного магнитного поля и стационарного электрического поля в проводящей среде. Их взаимная связь.
3. Ньютоновский потенциал объемных масс, потенциал простого и двойного слоя. Их свойства.
4. Первая и вторая производные ньютоновского потенциала объемных масс. Уравнения Лапласа и Пуассона. Их аналоги в электрических и магнитных полях.
5. Задачи Дирихле и Неймана. Сведение к интегральным уравнениям 2 рода.
6. Решение задачи Дирихле с помощью функций Грина. Интеграл Пуассона для сферы и плоскости (трехмерный и двумерный вариант).
7. Обратная задача теории потенциала. Теоремы единственности решения при заданной плотности (теоремы Новикова, Сретенского, Шашкина, Симонова, Прилепко).
8. Обратная задача для тела, близкого к данному (по В.К. Иванову).
9. Представление внешнего поля при помощи трехмерных аналогов интегралов типа Коши (по М.С.Жданову).
10. Граничная задача для электрического и магнитного потенциала в кусочно-однородных средах. Интегральные уравнения задачи для эквивалентного простого и двойного слоя.
11. Уравнения теоретических обратных задач (трехмерных) гравимагниторазведки.
12. Уравнения теоретических обратных задач (трехмерных) электроразведки с явно заданным оператором.
13. Математическая теория двумерных потенциальных полей на базе теории функций комплексного переменного.
14. Комплексная напряженность потенциального поля и ее связь с логарифмическим потенциалом.
15. Уравнение контура области в комплексных переменных и его связь с напряженностью создаваемого ею поля. Представление внешнего поля ограниченной области интегралом типа Коши.
16. Обратная задача теории логарифмического потенциала. Интегральное уравнение В.К.Иванова.
17. Разрешимость обратной задачи в конечном виде. Классы потенциалов, для которых теоретическая обратная задача разрешима в конечном виде. Принципы их применения к интерпретации наблюденных потенциальных полей.
18. Теория эквивалентных решений обратной задачи. Необходимые и достаточные условия эквивалентности однородных областей. Примеры эквивалентных семейств.
19. Эквивалентность в случае переменной плотности. Сравнительная оценка степени неоднозначности решения.
20. Представление внешних полей от границ раздела (контактных поверхностей) двух сред интегралами типа Коши.
21. Теоретическая обратная задача для границ раздела. Основные отличия обратной задачи для границ раздела по сравнению с ограниченными объектами.
22. Теоретическая обратная задача магниторазведки с учетом размагничивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
2. Цирульский А. В. Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей. Свердловск: Наука, 1990.
3. Жданов М. С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука, 1984.
4. Мартышко П. С. Некоторые вопросы теории и алгоритмы решения задач метода подмагничивания. Свердловск: Наука, 1982.
5. Мартышко П. С. Обратные задачи электромагнитных геофизических полей. Екатеринбург: Наука, 1996.

Программа курса

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ.

АЛГОРИТМЫ И РЕАЛИЗАЦИЯ

Авторы – А. Н. Борбунов,
к. ф.-м. н. С. Н. Васильев,
к. ф.-м. н. П. Ю. Глазырина,

Лекции 36 часов

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Цель спецкурса – ознакомить студентов и магистрантов с основами методов сжатия изображений с потерями: дискретное косинусное преобразование, дискретное вейвлет преобразование, фрактальный метод сжатия.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1. Аналоговое и цифровое, растровое и векторное представление изображений. Разрешение и глубина цвета. Нормировка. Основы квантования. Функция квантования. Аналогово-цифровое преобразование: линейное и нелинейное. Количество данных, необходимое для хранения изображения.
2. Основные форматы хранения изображений без потерь. Полноцветные изображения и изображения с ограниченным количеством цветов. Палитра. Создание палитры. Алгоритм GLA (LBG). Дизеринг (dithering – дрожание), как метод создания иллюзии плавного изменения оттенков серого или создания дополнительных цветов.
3. Передача и сжатие изображений с потерями. Биометрические характеристики человеческого зрения. Яркость и цветность. Цветовые пространства, примеры. Преобразование цветного изображения в чёрно-белое. Преобразование между цветовыми пространствами RGB и YUV. Проблема оценки качества изображения: объективный (с использованием метрик) и субъективный (с использованием экспертных оценок) методы. Артефакты. Метрики для оценки качества изображения. Сравнение различных метрик. PSNR. Зависимость оценки качества от прикладной области, где будет использоваться хранимое (либо передаваемое) изображение. Кратко о пост-обработке (постпроцессинге) восстановленного после сжатия изображения.
4. Одномерное и двумерное дискретное косинусное преобразование. Быстрое косинусное преобразование. Основы метода сжатия Jpeg. Параметры, влияющие на качество сжатия и размер файла. Артефакты, возникающие при сжатии.
5. Основы кратномасштабного анализа. Дискретное вейвлет-преобразование. Различные типы ортогональных и биортогональных всплесков. Двумерное дискретное вейвлет-преобразование. Основы метода сжатия Jpeg2000. Параметры, влияющие на качество сжатия и размер файла. Артефакты, возникающие при сжатии. Сравнение методов Jpeg и Jpeg2000.
6. Особенности фрактального метода сжатия изображений и историческая справка. Краткая характеристика вычислительной сложности. Основные теоремы и формулы, используемые при реализации фрактального метода сжатия изображений. Достаточные условия сходимости метода. Система итерируемых кусочно-определённых аффинных отображений. Описание алгоритма кодирования. Формат данных, сохраняемых в файле. Адаптивное разбиение изображения по принципу квадродерева. Описание некоторых методов ускорения алгоритма. Демонстрация одной из практических реализаций фрактального метода сжатия изображений.
7. По результатам спецкурса студент должен реализовать два из трех методов в части сжатия с потерями. Практические занятия по разделам, связанным со всплесками и дискретным

косинусным преобразованием рекомендуется проводить в пакете MATLAB, при реализации фрактального метода рекомендуется компилировать быстродействующий код с использованием MS Visual Studio или Borland Delphi /C++ Builder.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев В. П., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб: Военный университет связи, 1999 г. 203 с.
2. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: РХД, 2004. 464 с.
4. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2008. 304 с.
5. Методы компьютерной обработки изображений (под ред. Сойфера В. А.). М.: Физматлит, 2003. 784 с.
6. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. 2-е издание. - Издательство Техносфера, 2006. - 488 с.
7. Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. М.: Диалог-Мифи, 2002. - 384 с.
8. Сэломон Д. Сжатие данных, изображений и звука. М.: Техносфера, 2004. 368 с.
9. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.: Изд-во Триумф, 2003. 320 с.

Программа курса

НАНОМАТЕРИАЛЫ И НАНОТЕХНОЛОГИИ: ЧТО ПОЛЕЗНО УЗНАТЬ?

Автор – кандидат химических наук А. Н. Еняшин

Лекции 34 часа

1. Введение: Наноматериалы и нанотехнологии. Что полезно знать. Рекомендуемая литература.
2. Основы физики и химии твердого тела. Теоретические методы.
   - 2.1. Агрегатные состояния веществ. Типы взаимодействий между атомами и описывающие их эмпирические потенциалы. Типы кристаллических решеток. Расчет энергии ионного кристалла.
   - 2.2. Состояния электронов в атомах, молекулах, кристаллах. Уравнение Шредингера и волновая функция для частицы в ящике, для гармонического осциллятора. Уравнение Шредингера и волновые функции электрона в атоме водорода.
   - 2.3. Приближения для нахождения волновых функций электронов в многоядерных системах – молекулах. Первопринципные и полуэмпирические методы. Простой метод Хюккеля.
   - 2.4. Приближения для нахождения волновых функций электронов в многоядерных системах – кристаллах. Основы зонной теории: блоховская функция, обратная решетка, первая зона Бриллюэна. Энергетические зоны, плотности электронных состояний и электронная структура твердых тел.
   - 2.5. Поверхность твердых тел. Дефекты кристаллической решетки. Их влияние на электронную структуру.
   - 2.6. Магнитные свойства и типы магнитных материалов. Методы их моделирования: модели Изинга и Гейзенберга.
   - 2.7. Механические свойства твердых тел, основные характеристики и определения, уровни и методы моделирования. Механизмы разрушения.

3. Основы экспериментальных методов для измерений свойств и структуры молекул и твердых тел.
   3.1. Микроскопия: оптическая, просвечивающая электронная, ионно-полевая, сканирующая.
   3.2. Спектроскопия: оптическая, колебательная (инфракрасная и рамановская), фотоэмиссионная, рентгеновская, магнитного резонанса.
4. Эффекты размерности и размеров на изменение свойств твердых тел. Типы наноструктур.
   4.1. Нульмерные формы вещества. Свойства и устойчивость индивидуальных наночастиц. Кластеры металлов, полупроводников, молекулярные. Нанопорошки.
   4.2. Нульмерные формы вещества. Фуллерены углерода и неорганических соединений. Правила их устойчивости и методы получения. Фуллериты.
   4.3. Одномерные формы вещества: нанопроволоки, наноленты, нанотрубки. Нанотрубки углерода: классификация и взаимосвязь строения с электронными свойствами, устойчивостью. Свойства и классификация неорганических нанотрубок.
   4.4. Двумерные формы вещества: монослои углерода и неорганических соединений. Свойства графена.
   4.5. Квантовые наноструктуры: ямы, проволоки и точки.
5. Органические высокомолекулярные соединения. Биологические материалы.
   5.1. Полимеры. Дендриты. Мицеллы.
   5.2. Биологические строительные блоки: пептиды и нуклеиновые кислоты.
   5.3. Наноячейки и нанотрубки органических молекул.
6. Наномашины и наноприборы. Наноэлектромеханические системы. Существующие и «sci-fi» нанотехнологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивановский А. Л. Квантовая химия в материаловедении: Нанотубулярные формы вещества. Екатеринбург: УрО РАН, 1999.
2. Пул-мл. Ч., Оуэнс Ф. Нанотехнологии. М: Техносфера, 2006.
3. Роко М. К., Уильямс Р. С., Аливисатос П. Нанотехнология в ближайшем десятилетии. М: Мир, 2002.
4. Харрис П. Углеродные нанотрубки и родственные структуры. М: Техносфера, 2003.
5. Dresselhaus M. S., Dresselhaus G., Eklund P. C. Science of Fullerenes and Carbon Nanotubes, San Diego, London: Academic Press, 1996.
6. Dupas C., Houdy P., Lahmani M. (Eds.) Nanoscience: Nanotechnology and Nanophysics. B: Springer-Verlag, 2007.
7. Kelsall R. W., Hamley I. W., Geoghegan M. (Eds.) Nanosccale Science and Technology. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2005.

Программа курса

ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Авторы – кандидат физ.-мат. наук В. А. Устинов

<u>Лекции 36 часов</u>

ВВЕДЕНИЕ

1. *Цель дисциплины*: Систематическое овладение принципами объектно-ориентированного программирования как инструмента моделирования окружающего мира на основе на основе алгоритмического языка C++ и платформы .NET.

2. *Задачи курса*: Изучить все основные концепции и принципы объектно-ориентированного программирования. Получить практические навыки компьютерного моделирования с использованием принципов ООП и языка C++. Практически изучить основные особенности платформы .NET и ее влияние на реализацию принципов ООП в C++ для .NET.
3. *Место дисциплины в системе высшего профессионального образования*: Основывается на дисциплинах IT-технологии.
4. *Требования к уровню освоения содержания*: Требуются знания базовых языков программирования (PASCAL, C), принципов процедурного программирования, понимание основ архитектуры платформы Windows..

СОДЕРЖАНИЕ

1. *ООП – новая технология программирования*. Что такое ООП, отличия от технологии процедурного программирования. Основные принципы ООП. Преимущества ООП. ООП языки. Сферы применения ООП.
2. *Введение в среду разработки Visual C++ .NET*. Состав среды разработки. Управляемые и неуправляемые программы. Решения и проекты. Инструменты среды разработки. Этапы создания приложений. Отладка.
3. *Инкапсуляция. Описание класса в Си++***.** Понятие класса. Протокол описания класса в Си++. Методы класса. Объявление и определение методов. Тип доступа к элементам класса. Примеры описания класса. Способы создания объектов класса. Конструкторы и деструкторы. Статические члены класса. Особенности .NET. Типы данных. Особенности инкапсуляции в .NET. Свойства.
4. *Наследование. Производные Классы*. Понятие наследования. Описание порожденного класса в Си++. Конструктор класса-потомка. Атрибуты и модификаторы доступа. Особенности работы с указателями при наследовании. Особенности наследования в .NET.
5. *Полиморфизм. Виртуальные функции*. Полиморфизм как принцип ООП. Виды реализаций полиморфизма в Си++. Выбор методов с одинаковым именем на этапе компиляции. Раннее и позднее связывание их недостатки и достоинства. Виртуальные функции в Си++. Абстрактные функции и классы. Примеры использования виртуальных функций.
6. *Множественное Наследование*. Понятие и синтаксис множественного наследования в Си++. Особенности множественного наследования. Достоинства и недостатки. Многократное наследование. Виртуальные базовые классы. Множественное наследование в других языках программирования. Множественное наследование в .NET. Интерфейсы.
7. *Особенности Си++, не связанные с ООП*. Начальные значения параметров функций. Прототипы функций. Ссылки и способ передачи параметров в процедуры и функции. Псевдонимы переменных.
8. *Потоки ввода-вывода в Си++***.** Понятие потока ввода-вывода. Элементы реализации потокового ввода-вывода в Си++. Чтение и запись в файл. Способы реализации форматного ввода-вывода. Манипуляторы. Классы реализации ввода-вывода в .NET. Чтение и запись файлов в .NET.
9. *Динамические объекты при работе с классами*. Операторы New и Delete. Способы их использования при работе с классами. Использование New и Delete в конструкторах и деструкторах. Особенности .NET.
10. *Перегрузка операций и дружественные функции*. Перегрузка операций в Си++. Особенности перегрузки операций при работе с классами. Оператор как метод класса. Дружественные функции. Метод класса или дружественная функция ? Размерные и ссылочные типы данных в .NET. Функциональность размерных типов. Перегрузка операций для размерных и ссылочных типов .NET.
11. *Шаблоны и контейнеры*. Шаблоны, родовые типы и родовые функции. Определение функций-членов для шаблонов. Использование классов-шаблонов. Особенности

использования указателей. Понятие о контейнерах и контейнерных классах. Шаблоны и платформа .NET. Коллекции. Классы String, Array, ArrayList.

12. *Обработка исключительных ситуаций*. Виды исключительных ситуаций и способы их обработки. Исключения в Си++. Генерация и перехват исключений. Спецификации исключений. Обработка исключительных ситуаций в конструкторах и деструкторах. Особенности обработки исключений в .NET. Библиотека исключений. Определение новых исключений в .NET.
13. *Основные возможности платформы .NET*. Состав .NET. Цели разработки платформы. Архитектура .NET. Исполняемые файлы .NET и их особенности. Выполнение программ в среде CLR. Языковая интеграция и программирование в .NET. Особенности реализации принципов ООП в C++ .NET.
14. *Разработка графического интерфейса пользователя в .NET.* Обзор классов System.Windows.Forms и др. Этапы создания графического интерфейса пользователя. Функциональность графического интерфейса пользователя.
15. Принципы работы в визуальной среде программирования при создании графического интерфейса для Windows.
16. *Реализации многопоточности в .NET.* Нити и программы с несколькими потоками. Работа с классом System.Threading.
17. *Объектно-ориентированное проектирование с использованием Си++*. Разработка и проектирование. Цикл разработки. Цели и этапы проектирования. Тестирование. Проектирование и программирование. Ошибки проектирования.
18. *Введение в UML.* Обзор языка моделирования UML. Основные средства и модели UML. Основные Диаграммы. Использование UML для моделирования объектно-ориентированных приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнер Р., Пинсон Л. C++ изнутри. Киев: НПИФ «ДиаСофт», 1993.
2. Пол И. Объектно-ориентированное программирование с использованием C++. Киев: НПИФ «ДиаСофт», 1995.
3. Шилдт Г. Самоучитель C++. BHV-Санкт-Петербург, 1997.
4. Дейтел Х. М., Дейтел П. Дж. Как программировать на C++. М.: Бином, 1998.
5. Страуструп Б. Язык программирования C++. Киев: НПИФ «ДиаСофт», 1993.
6. Лукас П. C++ под рукой. Киев: НПИФ «ДиаСофт», 1993.

КУРСЫ ПО ВЫБОРУ

Программа курса

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АНАЛИЗЕ

Автор – д. ф.-м. н. А. Р. Данилин

<u>Лекции 36 часов</u>

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Специальный курс «Асимптотические методы в анализе» читается на математико-механическом факультете в течение 5 семестра.

Цель этого курса – изложить основные понятия и методы асимптотического анализа, теории возмущений, как регулярных, так и сингулярных; проиллюстрировать основные методы на содержательных примерах, показать возможные сферы применения и дальнейшего обобщения.

Контрольная работа призвана дать навык самостоятельного применения основных методов в модельных задачах.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Асимптотические представления функций. Калибровочные последовательности, определение асимптотического ряда; свойства асимптотических рядов: линейная комбинация, умножение, деление, интегрирование; единственность асимптотического разложения по заданной калибровочной последовательности функций, эквивалентность различных определений разложения функции в асимптотический ряд.

Степенные асимптотические ряды. Теорема о существовании непрерывной функции, разлагающейся в заданный степенной асимптотический ряд, асимптотические разложения композиции и обратной функции, асимптотические разложения решений трансцендентных уравнений уравнений.

Асимптотические разложения сумм. Использование группового и одиночного преобладания, интегральные оценки и степенные суммы.

Асимптотические разложения интегралов. Использование интегрирования по частям; метод введения промежуточного параметра; метод Лапласа (различные случаи достижения максимума показателя экспоненты: на границе интервала интегрирования и во внутренней точке); метод стационарной фазы (отсутствие стационарных точек фазы, наличие конечного числа стационарных точек на интервале); асимптотика функции Бесселя при больших значениях аргумента; метод перевала; асимптотика функции Эйри при больших значениях аргумента.

Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка при больших значениях аргумента. Преобразования Лиувилля, построение формальной асимптотики для фундаментальной системы решений стандартного уравнения (малое возмущение линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и нулевым коэффициентом при первой производной), обоснование построенной асимптотики сведением к интегральному уравнению и применением теоремы Банаха о сжимающем отображении.

Асимптотика решений краевых задач. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка и условия их разрешимости, априорные оценки; сингулярно возмущенные краевые задачи; построение внешнего разложения, функции пограничного слоя и построение внутреннего разложения, обоснование полученной асимптотики.

Метод двух масштабов. Почти периодические движения, проблема описания при больших временах (возникновение вековых слагаемых), формальное построение асимптотики методом двух масштабов, обоснование построенной асимптотики.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Де Брейн. Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961. 247 с.
2. Евграфов М. И. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962, 200 с.
3. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
4. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
5. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
6. Эрдеи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962. 127 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
2. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
3. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
4. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 376 с.

Программа курса

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Автор – член-корр. РАН, д. ф.-м. н., профессор Ю. Н. Субботин

Лекции 34 часа

ВВЕДЕНИЕ

В курсе рассматриваются общие вопросы теории приближения, некоторые классы задач теории приближения функций одного и многих переменных, которые часто встречаются в прикладных вопросах.

Основная цель – познакомить с классическими и современными методами решения задач теории приближения: интерполирование, наилучшее приближение, сплайны, всплески. Сделать обзор результатов и литературы по данной тематике, включая последние публикации.

Курс призван способствовать формированию необходимой математической культуры по одному из фундаментальных разделов математики.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1. Общие постановки задач теории приближения функций.
2. Теоремы существования и единственности элемента наилучшего приближения (ЭНП).
3. Приближение в гильбертовых пространствах. Существование ЭНП в любом подпространстве. Критерий ЭНП. Построение ЭНП.
4. Наилучшее равномерное приближение алгебраическими многочленами. Теоремы Чебышева и Валле-Пуссена. Единственность. Проблема Хаара.
5. Полиномы Чебышева. Неравенства Маркова.
6. Наилучшее приближение рациональными дробями.
7. Интерполяционные многочлены. Константы Лебега. Неравенство Лебега.
8. Модули непрерывности и гладкости и их свойства.
9. Наилучшее равномерное приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.
10. Теорема Фавара и классы W^r. Свойства сумм Фавара.
11. Теорема Джексона – Стечкина.
12. Неравенство Бернштейна. Интерполяционная формула Рисса и распространение неравенства Бернштейна на L_p.
13. Теорема Черных в L_2.
14. Поперечники по Колмогорову. Наилучшие неравенства Маркова в смысле Л. В. Тайкова.
15. Линейные методы суммирования.
16. Сплайны – параболические и кубические.
17. Вывод системы для нахождения параметров интерполяционных параболических и кубических сплайнов.

18. Оценки погрешности аппроксимации.
19. Сплайны нечетной степени. Первое и второе интегральные соотношения.
20. Оценки погрешности аппроксимации в L_2 и L_p.
21. Экстремальность сплайнов как экстремальных подпространств для поперечников.
22. Экстремальная интерполяция. Неравенства Маркова для сплайнов. Приложение к поперечникам.
23. Многомерная кусочно полиномиальная аппроксимация. Связь с методом конечных элементов.
24. Понятие о всплесках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука. 1976. 320 с.
2. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука. 1987. 424 с.
3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир. 1972. 318 с.

Программа курса

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Автор – д. ф.-м. н., профессор В. М. Бадков

<u>Лекции 36 часов</u>

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Теория ортогональных полиномов – одна из ветвей математического анализа. Первые результаты об ортогональных полиномах были получены в конце 18-го и в начале 19-го веков, но интенсивно теория ортогональных полиномов начала развиваться с середины 19-го века. Огромный вклад в становление и развитие этой теории внесли и российские математики.

Обладая ценными экстремальными и аппроксимативными свойствами, ортогональные полиномы находят все новые и новые применения в математике и других науках. В настоящее время известно много типов ортогональных полиномов. Спецкурс посвящен трем из них: 1) многочленам, ортогональным на окружности, 2) тригонометрическим ортогональным полиномам и 3) многочленам, ортогональным на отрезке. Эти типы ортогональных полиномов удобно изучать в рамках единой теории, основоположником которой является Г. Сегё. В начале 20-х годов 20-го века Г. Сегё ввел в рассмотрение многочлены, ортогональные на окружности и выразил через них многочлены, ортогональные на отрезке. Г. Сегё получил также асимптотические представления многочленов, ортогональных на окружности, в терминах функции, носящей ныне его имя. Д. Джексон в 1933 году ввел в рассмотрение ортогональные с весом тригонометрические полиномы. В 1963 году Г. Сегё установил связь этих полиномов с многочленами, ортогональными на окружности, и пользуясь принадлежащими ему асимптотическими представлениями последних, доказал теорему равносходимости с обычным рядом Фурье ограниченной функции ее ряда Фурье по тригонометрическим полиномам, ортогональным с достаточно гладким положительным весом.

Дальнейшие результаты о единой теории рассматриваемых трех типов систем ортогональных полиномов и рядов Фурье по ним принадлежат лектору.

Примерно треть содержания спецкурса составляют результаты, опубликованные лишь в журнальных статьях.

В вводной части спецкурса приведены сведения об ортогональных полиномах в пространствах со скалярным произведением. При этом под полиномами понимаются линейные комбинации конечного числа элементов линейно независимой последовательности. Вводная часть спецкурса завершается примерами скалярных произведений и ортогональных относительно них рациональных функций, а также алгебраических и тригонометрических полиномов. В основной части спецкурса (она делится на вторую, третью и четвертую его части) излагаются главным образом алгебраические свойства этих полиномов в рамках единой теории (асимптотические и аппроксимативные свойства ортогональных полиномов являются содержанием другого спецкурса, читаемого лектором).

Во второй части спецкурса излагается ряд свойств многочленов, ортогональных на окружности. В частности, выводятся рекуррентные соотношения и аналоги формулы Кристоффеля – Дарбу. Из последних выводятся свойства нулей и доказывается поточечное неравенство Турана и его обобщение.

В третьей части спецкурса для введенных лектором рациональных функций, ортогональных на окружности, устанавливаются выражения через соответствующие ортогональные многочлены. Это позволяет установить соотношения между ядрами Кристоффеля – Дарбу для тригонометрических ортогональных полиномов и многочленов, ортогональных на окружности, а также между полиномами этих двух систем. Свойства нулей тригонометрических ортогональных полиномов устанавливаются тоже с помощью формул, выражающих их через многочлены, ортогональные на окружности.

В четвертой части спецкурса многочлены, ортогональные на отрезке, выражаются через многочлены, ортогональные на окружности, и тригонометрические ортогональные полиномы. Свойства нулей многочленов, ортогональных на отрезке, выводятся из свойств нулей тригонометрических ортогональных полиномов. Несколько лекций посвящено многочленам Якоби (формула Родрига, дифференциальное уравнение, связь с гипергеометрической функцией, формула дифференцирования, рекуррентное соотношение, формула Кристоффеля – Дарбу). Кроме того, вычисляются коэффициенты разложения многочлена Якоби одной системы по многочленам Якоби другой системы. Последний результат находит применения при исследовании равносходимости ряда Фурье – Якоби с рядом Фурье – Чебышева.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1. Предварительные сведения из теории пространств со скалярным произведением.
2. Процесс ортогонализации Шмидта.
3. Первый критерий ортогональности.
4. Детерминантные представления ортонормальной системы в пространстве со скалярным произведением.
5. Ряд Фурье в пространстве со скалярным произведением.
6. Определения алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов.
7. Теорема Сегё о явном выражении многочлена, ортогонального на окружности с весом специального вида (являющимся минус первой степенью положительного тригонометрического полинома).
8. Выражение элементов системы $\left\{R_{\sigma,n}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$, полученной при ортогонализации последовательности $1, z, z^{-1}, z^{2}, z^{-2}, \ldots$ на единичной окружности Γ_1 по мере $d\sigma(\tau)$, через многочлены, ортогональные на Γ_1 с той же мерой (– результат лектора).
9. Рекуррентные формулы и формула Кристоффеля – Дарбу для многочленов, ортогональных на отрезке.
10. Аналог формулы Кристоффеля – Дарбу для многочленов, ортогональных на окружности.
11. Рекуррентные соотношения для многочленов, ортогональных на окружности.
12. Неравенство Турана и его обобщение (лектором).
13. Выражение действительных и мнимых частей полиномов $R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})$ и $R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$ через полиномы порядка n системы тригонометрических полиномов $T_{\sigma,k}(\tau)$, полученной при

ортогонализации методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на периоде последовательности $1, \cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, \ldots$ (результат лектора). Получение в виде следствий формул Сегё, связывающих многочлены, ортогональные на отрезке и на окружности.

14. Формула приращения аргумента многочлена, ортогонального на окружности, при переходе из одной её точки в другую, и её применение к доказательству простоты и перемежаемости нулей полиномов $T_{2n-1}(\tau)$ и $T_{2n}(\tau)$ (результаты лектора).
15. Простота нулей многочленов, ортогональных на отрезке. Доказательство (принадлежащее лектору) перемежаемости нулей многочленов с соседними номерами, ортогональных на прямой (в частности, на отрезке), с использованием соответствующих свойств тригонометрических ортогональных полиномов.
16. Квадратурная формула типа Гаусса. Функция и коэффициенты Кристоффеля.
17. Многочлены Якоби.
18. Многочлены Лагерра и Эрмита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
2. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: ГИФМЛ, 1961.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Пер. с англ. 2-е изд. М.: Наука, 1974.
4. Геронимус Я. Л. Теория ортогональных многочленов (обзор достижений отечественной математики). М.: Гостехиздат, 1950.
5. Геронимус Я. Л. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М.: Физматгиз, 1958.
6. Гренандер У., Сегё Г. Тёплицевы формы и их приложения. М.: ИЛ, 1961.
7. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: ИЛ., 1948.
8. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.: ГИТТЛ. М.–Л., 1949.
9. Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985.
10. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
11. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. Пер. с польск. М.: Наука, 1983.
12. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
13. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.–Л.: Наука, 1964.
14. Суетин П. К. Многочлены, ортогональные по площади и многочлены Бибербаха // Труды МИАН СССР. Т. 100. М.: Наука, 1971.
15. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. Изд. 2-е, дополненное. М.: Наука, 1979.
16. Суетин П. К. Ортогональные многочлены по двум переменным. М.: Наука, 1988.

Программа курса

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ

Автор – д. ф.-м. н., профессор В. В. Арестов

Лекции 36 часов

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Два варианта модуля непрерывности линейного неограниченного оператора на классе элементов банахова пространства. Их связь между собой.

Задача Стечкина о наилучшем приближении неограниченного линейного оператора ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства. Оценка снизу величины наилучшего приближения оператора через его модуль непрерывности (теорема С. Б. Стечкина).

Проблема оптимального восстановления значений неограниченного оператора на элементах класса, заданных с погрешностью. Оценка снизу величины оптимального восстановления через модуль непрерывности оператора на классе элементов.

Неравенство Ландау – Адамара между нормами функции, ее первой и второй производными в пространстве $C(-\infty,\infty)$. Наилучшее приближение оператора дифференцирования первого порядка на классе дважды дифференцируемых функций в пространстве $C(-\infty,\infty)$. Оптимальное дифференцирование функций с ограниченной второй производной, заданных с ошибкой в пространстве $C(-\infty,\infty)$.

Наилучшее приближение оператора дифференцирования первого порядка на классе трижды дифференцируемых функций в пространстве $C(-\infty,\infty)$. Решение всех трех задач. Наилучшее приближение оператора дифференцирования второго порядка на классе трижды дифференцируемых функций в пространстве $C(-\infty,\infty)$.

Чебышевский радиус множества: чебышевский центр множества. Наилучший (нелинейный) метод оптимального восстановления значений неограниченного оператора на элементах класса, заданных с погрешностью.

Линейное восстановление значений неограниченного оператора на элементах класса, заданных с погрешностью; двусторонняя связь с соответствующей задачей Стечкина.

Наилучшее приближение (линейных неограниченных) функционалов. Зависимость модуля непрерывности оператора дифференцирования порядка k на классе n раз дифференцируемых функций $(0 \le k < n)$ на числовой оси и полуоси от аргументов δ и M. Неравенства Колмогорова. Необходимое и достаточное условие на параметры для конечности константы в неравенстве Колмогорова. Теорема В. Н. Габушина. Доказательство необходимости. Достаточное условие на параметры для конечности константы в неравенстве Колмогорова.

Зависимость от N величины $E(N)$ наилучшего приближения оператора дифференцирования порядка k на классе n раз дифференцируемых функций на оси и полуоси. Теорема конечности.

Нерешенные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т.1, № 2. С. 137–148.
2. Стечкин С.Б. Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta Sci. Math. 1965. V.26, No. 3–4. P. 225–230.

3. Арестов В. В. О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Матем. заметки. 1977. Т.22, № 2. С. 231–244.
4. Габушин В. Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Матем. заметки. 1970. Т. 8, № 5. С. 55–562.
5. Габушин В. Н. Оптимальные методы вычисления значений оператора Ux, если x задано с погрешностью. Дифференцирование функций, определенных с ошибкой // Тр. МИАН СССР. 1980. Т.145. С. 63–78.
6. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН СССР. 1989. Т.189. С. 3–20.
7. Арестов В. В. О наилучшем равномерном приближении операторов дифференцирования // Матем. заметки. 1969. Т.5, № 3. С. 273–284.
8. Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи матем. наук. 1996. Т.51, № 6(312). С. 89–124.
9. Габушин В. Н. Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 291–298.
10. Габушин В. Н. Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \le \infty$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976. Т. 40, № 40. С. 869–892.
11. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

Программа курса

НАВИГАЦИЯ ПО ИЗОБРАЖЕНИЯМ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Авторы – кандидат физ.-мат. наук В. Б. Костоусов и Д. С. Перевалов

Курс посвящен основам проектирования, реализации и анализа алгоритмов обработки изображений в реальном режиме времени. В качестве практического задания слушателям предлагается запрограммировать некоторые алгоритмы узнавания предметов с использованием пакета NI Vision Development Module и запустить их на системе технического зрения.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение в компьютерный анализ изображений и системы технического зрения, алгоритмы и методы. Базовые алгоритмы. Фильтрация локальным окном. Пороговая обработка. Алгоритмы сопоставления с эталоном.
2. Критерии оценки качества и устойчивости алгоритмов анализа изображений. Понятие технологического теста. Вероятности ошибок. Кривая ROC.
3. Устойчивые алгоритмы анализа изображений. Сходящиеся квадраты. Фильтр Канни. Преобразование Хафа. Алгоритмы, использующие порядковые статистики.
4. Статистическая оптимальность алгоритмов. Поэтапный подход к разработке алгоритмов анализа изображений. Гипотеза Бауэра.
5. Основы разработки программ анализа изображений в системе NI Vision Development Module (LabView).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Пер. с англ. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.
2. Форсайт Д. А., Понс Ж. Компьютерное зрение. Современный подход. Пер. с англ. М.: Изд. дом Вильямс, 2004. 928 с.

Программа курса

БИНОМИАЛЬНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Автор – д. ф.-м. н., профессор И. В. Мельникова

Лекции 70 часов

ОСНОВЫ, ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Одной из важнейших задач современной финансовой математики (вычислительной финансовой математики) является регулирование работы финансового рынка, в частности минимизация разного рода рисков для финансовых и других организаций, предприятий, физических лиц. Важным способом такого регулирования является торговля ценными бумагами, первичными (например, акции, банковские счета, облигации) и вторичными (например, опционы, форварды, спреды), называемые деривативами.

Создание основ современной теории финансовой математики относится к концу прошлого века . Результатом признания этого факта было присуждение нобелевских премий в экономике 1990 года за теорию диверсификации и 1997 года за теорию «честной цены» опциона.

Непрерывные модели в финансовой математике это так называемые стохастические дифференциальные уравнения (дифференциальные уравнения с учетом случайных воздействий), а также модели, выводимые на базе этих уравнений. Решение стохастических уравнений развито на основе теории стохастического интеграла и формулы Ито, играющей роль замены переменных в стохастическом интеграле.

Биномиальные модели в финансовой математике – это модели, построенные на предположении случайности двух типов – условно «верх» и «вниз» в течение одного периода времени. Эти модели достаточно простые, но при увеличении числа периодов они хорошо описывают реальные процессы типа цен акций, изменения процентных ставок и др. Биномиальные однопериодные и многопериодные модели являются важными как с точки зрения понимания экономико-математических принципов, лежащих в основе построения моделей финансовой математики – безарбитражности, риск-нейтральности и мартингальности, так и использования в качестве приближенных методов решения уравнений, полученных в рамках непрерывных моделей. Конечно, в целом современные методы финансовой математики нельзя назвать слишком простыми, и это неудивительно – методы предназначены для решения необычайно важных на сегодняшний день и совсем непростых задач.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1. Определение первичных и производных ценных бумаг (акции, бонды, опционы разного рода).
2. Биномиальные модели на основе принципа безарбитражности. Однопериодные и многопериодные биномиальные модели.

3. Риск-нейтральные меры. Принцип риск-нейтральности и мартингальности в построении биномиальных моделей.
4. Нахождение «честной цены» опциона в биномиальных моделях.
5. Конечные и бесконечные вероятностные пространства. Информация и σ-алгебры. Изменение вероятностной меры. Условное математическое ожидание
6. Примеры задач из биологии, экономики, физики и других областей, приводящие к решению стохастических дифференциальных уравнений.
7. Предварительный материал из теории случайных величин и случайных процессов. Теорема Колмогорова. Броуновское движение. Основные свойства.
8. Масштабированное случайное блуждание. Броуновское движение как предел масштабированных случайных блужданий.
9. Интеграл Ито. Связь между интегралами Ито и Стратоновича.
10. Стохастические интегралы и Ито формула: одномерный и многомерный случаи, примеры.
11. Стохастические дифференциальные уравнения. Сильные и слабые решения.
12. Вопросы существования и единственности решений.
13. Примеры решения стохастических дифференциальных уравнений.
14. Решение стохастических дифференциальных уравнений, в частности геометрическое броуновское движение, как предел решений, полученных в биномиальных моделях.
15. Уравнение Блэка – Шоулса – Мертона.
16. Задача диффузии: основные свойства решений. Определение диффузии Ито. Марковское свойство. Генератор диффузии, характеристический оператор.
17. Связь между решениями стохастических дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Уравнения Колмогорова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир: АСТ, 2003. 408 с.
2. Melnikova I. V., Filinkov A. I., Anufrieva U. A. Abstract stochastic equations I: classical and distribution solutions // J. of Math. Sciences, Functional Analysis. 2002. 111, № 2. P. 3430–3475.
3. Shreve Steven E. Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model. Springer Finance. 2003. 187 с.
4. Shreve Steven E. Stochastic Calculus for Finance II. Continuous Asset Pricing Models. Springer Finance. 2003. 550 с.

Программа курса

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Автор – академик РАН, д. ф.-м. н., профессор А. М. Ильин

Лекции 36 часов

ВВЕДЕНИЕ

В обязательном курсе функционального анализа рассматриваются, как правило, линейные ограниченные операторы. Тем не менее, в математической физике, в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в теории вероятностей и в ряде других предметов рассматриваются неограниченные операторы. Настоящий курс рассчитан на знакомство с этой стороной функционального анализа.

Рассматриваются результаты, связанные со спектральным разложением как ограниченных, так и неограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Далее изучаются вопросы расширения симметричных операторов и применение к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Курс «Спектральная теория операторов» завершает трехсеместровый обязательный курс «Анализ» для магистрантов-математиков.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Неограниченные линейные операторы в банаховом пространстве. Замыкание оператора. Примеры неограниченных операторов. Некоторые теоремы вложения функциональных пространств. Симметрические операторы в гильбертовом пространстве.

Регулярные точки, точки спектра и собственные значения ограниченных и неограниченных линейных операторов A в банаховом пространстве. Представление оператора $(A-\lambda I)^{-1}$ при малых λ в виде ряда Неймана. Открытость (в комплексной плоскости) множества регулярных точек ограниченного линейного оператора; замкнутость спектра. Сопряженные операторы и их свойства.

Сопряженные ограниченные операторы в гильбертовом пространстве H (над полем комплексных чисел); дополнительная информация об их спектрах. Характеристика самосопряженности оператора A в терминах билинейной формы (Ax, y) и квадратичной формы (Ax, x). Нормы билинейной и квадратичной форм; их связь с нормой оператора. Нижняя и верхняя грани оператора A. Неотрицательные операторы; частичный порядок на классе самосопряженных ограниченных операторов, свойства частичного порядка. Теорема о поточечной сходимости монотонной ограниченной последовательности самосопряженных ограниченных операторов. Теорема об «арифметическом» квадратном корне из положительного оператора.

Проекционные операторы на гильбертовом пространстве. Операторы ортогонального проектирования на подпространство гильбертова пространства. Проекционные операторы, их характеристики в терминах операторов ортогонального проектирования. Ортогональные проекционные операторы. Произведение и сумма проекционных операторов. Эквивалентные характеристики условия $P_1 \le P_2$ для проекционных операторов.

Полиномы от самосопряженных операторов. Свойства однородности, аддитивности, мультипликативности, монотонности (по полиномам) соответствия $P(\lambda) \to P(A)$. Аппроксимация (поточечная) полунепрерывных сверху функций на конечном отрезке монотонно убывающими последовательностями полиномов. Функция от операторов. Распространение свойств соответствия $P(\lambda) \to P(A)$ на соответствие $f(\lambda) \to f(A)$ для функций, в каждой точке отрезка полунепрерывных сверху или снизу.

Спектральная функция $E_\lambda = e_\lambda(A)$ самосопряженного оператора A; ее свойства. Конструкция операторов-интегралов $\int_R \lambda dE_\lambda$, $\int_R \lambda^m dE_\lambda$, $\int_R f(\lambda) dE_\lambda$ как сходящихся либо по операторной норме, либо поточечно (по норме H), либо в смысле слабой сходимости в H; их свойства (однородность, аддитивность, положительность, монотонность, мультипликативность относительно функций f). Спектральное представление оператора A; единственность спектральной функции оператора (единственность спектрального разложения оператора). Представление операторов $f(A)$ для полунепрерывных сверху и снизу функций f(□). Распространение понятия оператора $f(A)$ и свойств $f(A)$ на функции $f(\lambda)$, суммируемые в смысле Лебега по мерам Стилтьеса – Лебега, порожденным функциями $g_x(\lambda) = (E_\lambda x, x)$ $(E_\lambda = e_\lambda(A),\quad x \in H)$. Характеристика точек спектра в терминах E_λ, представление и свойства резольвентного оператора R_λ.

Спектральная теория вполне непрерывных самосопряженных операторов, как следствие общей спектральной теории самосопряженных ограниченных операторов.

Неограниченные линейные операторы. Самосопряженные операторы; расширение симметрических операторов. Спектральное разложение неограниченного самосопряженного оператора. Функции самосопряженного оператора.

Теория расширений симметрического оператора. Индексы дефекта.

Приложение к исследованию обыкновенных дифференциальных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954.
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982.
3. Плеснер А. И. Спектральная теория линейных операторов. М,: Наука, 1965.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том V. М.: Физматгиз, 1959.
5. Наймарк М. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1969.
6. Ильин А. М. Линейные неограниченные операторы. Спектральное разложение: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2007.

III. ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

1. Определители N-го порядка. Свойства определителей. Разложение определителя по минорам.
2. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость элементов. Базис и размерность пространства. Размерность суммы пространств (*). Прямая сумма, разложение линейного пространства в прямую сумму одномерных подпространств.
3. Матрицы и действия с ними. Теорема о ранге матрицы. Определитель произведения матриц. Обратная матрица.
4. Системы линейных уравнений. Теорема Крамера (*). Критерий совместности и строение общего решения совместной системы линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений, фундаментальная система решений.
5. Линейные операторы. Размерность ядра и образа линейного оператора (*). Собственные числа и векторы, теорема о связи собственных чисел линейного оператора с корнями его характеристического уравнения.
6. Евклидовы и унитарные пространства. Процесс ортогонализации, ортонормированный базис. Разложение пространства в прямую сумму пространства и его ортогонального дополнения (*).
7. Общая алгебра. Основные алгебраические системы: полугруппы и группы, кольца и поля, решетки. Гомоморфизмы и конгруэнции.
8. Теория пределов. Предел последовательности, его свойства. Верхняя и нижняя грани множества. Лемма о стягивающихся отрезках (*). Лемма о выделении конечного покрытия. Теорема Больцано – Вейерштрасса (*). Предел монотонной функции. Критерий Коши о существовании предела последовательности (*).
9. Непрерывные функции. Различные определения непрерывности функции в точке и их эквивалентность. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции. Теорема Коши о промежуточных значениях (*). Теорема Вейерштрасса о функциях, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве (*). Теорема Кантора о равномерной непрерывности (*).
10. Дифференцируемые функции. Теорема Ролля, Лагранжа (*). Правило Лопиталя. Формула Тейлора с остаточным членом. Признаки возрастания и убывания функции. Правило нахождения экстремальных значений функции.
11. Интегральное исчисление. Теорема существования определенного интеграла (*). Интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Теорема о среднем значении интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.
12. Функции многих переменных. Полный дифференциал. Достаточные условия дифференцируемости (*). Теоремы существования, непрерывности, дифференцируемости неявной функции.
13. Числовые ряды. Критерий Коши. Признаки сходимости (Даламбера, Коши).
14. Функциональные ряды. Признаки Вейерштрасса о равномерной сходимости ряда (*). Теорема о непрерывности суммы функционального ряда (*). Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда (*).
15. Степенные ряды на числовой оси и в комплексной плоскости. Радиус сходимости (*). Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда (*); ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенные ряды (*).
16. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра, равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование несобственного интеграла по параметру.
17. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним (*). Теорема о существовании и единственности решения (*).

18. Линейные дифференциальные уравнения N-го порядка. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения (*). Линейное неоднородное уравнение, метод вариации производных постоянных (*). Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение, случай простых (*), кратных, комплексных корней. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами.
19. Системы дифференциальных уравнений. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений, фундаментальная система решений (*). Формула Остроградского – Лиувилля (*). Неоднородные системы линейных уравнений, метод вариации произвольных постоянных (*). Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, случай простых корней (*).
20. Функции комплексного переменного. Дифференцируемость, условия Коши – Римана (*). Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру от аналитической функции (*). Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции (*). Вычеты, теорема Коши о вычетах (*).

Вопросы со звездочкой (*) надо знать с доказательством.

ЛИТЕРАТУРА

Алгебра
1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1959.
2. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука. 1975.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
4. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М., 1984.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука. 1976.

Математический анализ
6. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ: Начальный курс. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
7. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ: Продолжение курса. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
8. Никольский С. М. Курс математического анализа: В 2-х тт. М.: Наука, 1990–1991. Т.1, 2.
9. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: В 3-х тт. М.: Высшая школа, 1988–1989. Т.1–3.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. М.: Наука. 1970. Т.1–3.

Дифференциальные уравнения
11. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физ.-мат. лит., 1961.
12. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука.
13. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физ.-мат. лит., 1958.
14. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965.

Теория функций комплексного переменного
15. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978.
16. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
17. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.

IV. ПРОГРАММА ВЫПУСКНОГО ЭКЗАМЕНА

Программа государственного экзамена по магистерской программе 511211 – Математическое моделирование

1. Общие вопросы. Понятие моделирования и математического моделирования. Непрерывные и дискретные математические модели, статика и динамика в природе, средства математического моделирования объектов и их отношений. Иерархия моделей [1–5].

2. Математическая физика. Физические задачи, приводящие к уравнениям математической физики. Основные типы уравнений математической физики. Постановки основных задач. Функция Грина. Метод Фурье [6–8]. Метод конечных элементов приближенного решения уравнений в частных производных [43–48].

3. Дифференциальные уравнения. Существование и единственность решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Линейные дифференциальные уравнения N-го порядка; уравнения с постоянными коэффициентами. Системы линейных дифференциальных уравнений. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами [9].

4. Численные методы. Решение линейных алгебраических уравнений. Точные и итерационные методы. Обращение матриц. Обусловленность. Численное интегрирование. Алгоритмы решения нелинейных уравнений и минимизации функций многих переменных. Обработка экспериментальных данных и метод наименьших квадратов [11–17].

4. Функциональный анализ. *Метрические пространства.* Сходимость. Полнота метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических пространствах [25, гл. II]; [28, гл. IV]. *Нормированные пространства*. Линейные пространства. Нормированные пространства. Евклидовы пространства [25, гл. III]; [28, гл. IV]. *Линейные функционалы и линейные операторы*. Непрерывные линейные функционалы. Теорема Хана – Банаха. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма [25, гл. IV, §§1–3, 5, 6]; [28, гл. IV]. *Спектр оператора.* Сопряженные, самосопряженные, симметричные, положительно определенные операторы и их спектральные свойства [28, гл.V]; [26, гл. VII]. *Дифференцирование операторов в линейных нормированных пространствах*; производные Фреше и Гато; метод Ньютона [26, гл. VIII]).

5. Обобщенные функции. Пространства основных и обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций. Прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста [24, гл. II]; [25, гл. IV, §4; гл.VIII, §8]; [27].

6. Гармонический анализ. Поточечная, равномерная и среднеквадратическая сходимости тригонометрического ряда Фурье. Преобразование Фурье в пространствах L_1 и L_2; основные свойства. Теорема Планшереля [25, гл. VIII]; [24, гл. II]; [29, гл. I].

7. Теория приближения. *Теоремы двойственности* для задач приближения конечномерным подпространством и выпуклым множеством в банаховом пространстве. Теорема двойственности в конкретных пространствах. *Равномерное приближение функций*. Приближение функций многочленами на отрезке. Теоремы Валле-Пуссена и Чебышева. Полиномы Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля. Прямая теорема (Джексона) приближения функций тригонометрическими полиномами. Неравенство Бернштейна для тригонометрических полиномов. Обратные теоремы теории приближения функций (Тиммана – Стечкина, Зигмунда, Бернштейна). Интерполирование функций алгебраическими многочленами. Сходимость. Оценка констант Лебега. Приближение класса функций W_∞^r тригонометрическими многочленами; теорема Фавара – Ахиезера – Крейна. Приближение классом сверток. *Приближение в гильбертовом пространстве* и в пространстве L_p; характеристика элемента наилучшего приближения. *Полиномиальные сплайны*. Интерполяционные сплайны. Оценки погрешности аппроксимации полиномиальными сплайнами второй и третьей степени. Экстремальные свойства полиномиальных сплайнов нечетной степени. Связь интерполяционных сплайнов нечетной степени и интерполяционных сплайнов наилучшего среднеквадратического приближения [32, 33].

8. Всплески. Непрерывные всплески. Прямое и обратное непрерывное всплеск-преобразование. Кратно-масштабный анализ (КМА). Построение всплесков, связанных с известной масштабирующей функцией. Восстановление масштабирующей функции по ее известной маске. Построение КМА по маске. Различные типы ортогональных и биортогональных всплесков. Всплески Мейера. Всплески Добеши, ортонормированные и биортонормированные. Дискретные всплески. Прямое и обратное одномерное дискретное всплеск-преобразование. Применение всплесков к задачам сжатия и обработки сигналов[41-43].

9. Аналитические методы сжатия изображений. Основные форматы хранения изображений без потерь. Биометрические характеристики человеческого зрения. Яркость и цветность. Цветовые пространства. Проблема сжатия изображений с потерями. Одномерное и двумерное дискретное косинусное преобразование. Быстрое косинусное преобразование. Основы метода сжатия по стандарту Jpeg. Основы кратномасштабного анализа. Одномерное и двумерное дискретные вейвлет-преобразования. Основы метода сжатия по стандарту Jpeg2000. Фрактальный метод сжатия изображений, теоретическое обоснование и алгоритм кодирования. Достаточные условия сходимости метода. [34-43]

10. Теория вероятностей. Вероятность, условная вероятность. Математическое ожидание, дисперсия. Схема Бернулли. Одномерные и многомерные распределения вероятностей. Центральная предельная теорема. Модели марковских процессов. Генераторы случайных чисел и их использование в прикладном анализе. Метод Монте-Карло [10, 13].

11. Основы информатики и программирования. Алгоритм. Операционные системы. Структуры и функции операционных систем. Понятие ресурса, распределение и использование ресурсов. Управление доступом. Управление памятью. Языки программирования. Синтаксис, семантика. Методы трансляции. Генерация и оптимизация кода. Технология программирования. Структурное, модульное программирование. Объектно-ориентированный подход к программированию. Организация разработки программного обеспечения. Тестирование и отладка. Интерфейс [18–23].

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. и др. Математическое моделирование. М.: Наука, 1997.
2. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1988.
3. Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. М.: МГУ, 1984.
4. Моисеев Н. Н. Алгоритмы развития. М.: Наука, 1981.
5. Компьютеры и нелинейные явления. М.: Наука, 1988.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
8. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
10. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1989.
11. Самарский А. А., Гулин А. В. Введение в численные методы. М.: Наука, 1989.
12. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
13. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2, М.: Мир, 1977.
14. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М: Наука, 1973.
15. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир, 1998.
16. Хемминг Р. В. Численные методы. М: Наука, 1973.
17. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1963.
18. Цикридзис Д., Бернстайн Ф. Операционные системы. М.: Мир,1986.
19. Дейтел Г. П. Введение в операционные системы. В 2-х тт. М.: Мир, 1987.
20. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т. 1–2. М.: Мир, 1978.
21. Йодан Э. Структурное проектирование и конструирование программ. М.: Мир, 1979.
22. Майерс Г. Искусство тестирования программ. М.: Финансы и статистика, 1982.
23. Гласс Р., Нуазо Р. Сопровождение программного обеспечения. М.: Мир, 1983.
24. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
25. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
26. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982.
27. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
28. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том V. М.: Физматгиз, 1959.
29. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
30. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1966.
31. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
32. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М., Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1979.
33. Даугавет И. К. Ведение в теорию приближения функций. Учебное пособие. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1977.
34. Воробьев В.П., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб: Военный университет связи, 1999 г. 203 с.
35. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.
36. Методы компьютерной обработки изображений (под ред. Сойфера В.А.). М.: Физматлит, 2003. 784 с.
37. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. 2-е издание. - Издательство Техносфера, 2006. - 488 с.
38. Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. М.: Диалог-Мифи, 2002. - 384 с.
39. Сэломон Д. Сжатие данных, изображений и звука. М.: Техносфера, 2004. 368 с.

40. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.: Издательство Триумф, 2003. 320 с.
41. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: РХД, 2004. 464 с.
42. Чуи Ч. К. Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.
43. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2008.
44. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
45. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
46. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980.
47. Стренг Г., Фикс Г. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
48. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981.
49. Бенерджи П., Баттерфильд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
50. Бребия Н., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982.
51. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.

Магистерская программа обсуждена и одобрена на заседании кафедры математического анализа и теории функций Уральского госуниверситета.

Зав. кафедрой
д. ф.-м. н., профессор В. В. Арестов