Программа государственного экзамена
по магистерской программе «Математический анализ»
направления подготовки 010100.68 «Математика»

Теория функций действительного переменного

1. Мера, измеримые функции, интеграл. Аддитивность и счетная аддитивность меры. Лебегово продолжение меры. Измеримые функции. Последовательности измеримых функций; сходимость по мере и почти всюду. Теорема Егорова о связи сходимости почти всюду и равномерной. Структура измеримых функций – теорема Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение с интегралом Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини ([3, гл.V]; [7, гл.III–VI, XI, XII]; [11, гл.X], [14]).

2. Неопределенный интеграл Лебега. Теория дифференцирования. Производная неопределенного интеграла Лебега. Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона – Никодима. Интеграл Стилтьеса ([3, гл.VI]; [7, гл.IX, XIII, XVII], [15]).

3. Функциональные пространства. Пространства L_p. Ортогональные системы функций в L_2. Ряды по ортогональным системам. Системы ортогональных многочленов; многочлены Лежандра, Чебышева, Якоби ([3, гл.VII]; [7, гл.VII], [12]).

4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье. Поточечная, равномерная и среднеквадратическая сходимости тригонометрического ряда Фурье. Преобразование Фурье в пространствах L_1 и L_2. Теорема Планшереля. ([3, гл.VIII]; [1, гл.II]; ; [11, гл.I]).

Теория функций комплексного переменного

1. Интегральные представления аналитических функций. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши ([8, гл. IV]; [6, гл. III, §§1–3]; [4, гл.I, §4, гл.III, §3]).

2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теоремы Вейерштрасса. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Вычеты, теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. ([8, гл.V–VII]; [6, гл.III, §§4–7, гл.IV]; [4, гл.I, §5, гл.V, §2]).

3. Целые и мероморфные функции. Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями ([8, гл. IX, §§1, 2]; [6, гл.VII, §§1–3]; [4, гл.V, §1]).

4. Конформные отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерий однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях ([8, гл. III, §§1, 3; гл.XII, §§1, 2, 6, 7]; [6, гл. V, §§1–3]; [4, гл. II]).

5. Аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления конечного и бесконечного порядка. Принцип симметрии. Теорема Пикара ([8, гл. X]; [6, гл. VIII]).

Функциональный анализ

1. Метрические и топологические пространства. Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических и топологических пространствах ([3, гл. II]; [10, гл. IV]).

2. Нормированные и топологические линейные пространства. Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана – Банаха. Нормированные пространства. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства ([3, гл. III]; [10, гл. IV]).

3. Линейные функционалы и линейные операторы. Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов. Компактные (вполне непрерывные) операторы ([3, гл.IV, §§1–3, 5, 6]; [10, гл. IV]).

4. Гильбертовы пространства. Спектральная теория самосопряженных операторов. Теория ограниченных операторов. Неограниченные операторы ([10, гл. V]; [5, гл. VII]; [2]).

5. Обобщенные функции. Основные и обобщенные функции. Дифференцирование обобщенных функций. Прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Пространства Соболева; теоремы вложения функциональных пространств ([1, гл. II]; [3, гл. IV, §4; гл.VIII, §8]; [9]; [2]).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
2. Ильин А. М. Линейные неограниченные операторы. Спектральное разложение: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2007.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982.
6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том 1,2. М.: Наука, 1967–1968.
7. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
8. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.
9. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том V. М.: Физматгиз, 1959.
11. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
12. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. Изд. 2-е, дополненное. – М.: Наука, 1979.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир. 1966.
14. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Введение в теорию функций действительного переменного: Мера и интеграл Лебега на прямой. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2011. 166 с.
15. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Дифференциальные свойства функций одного действительного переменного. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2013. 135 с.