МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Уральский государственный университет им. А.М.Горького
Математико-механический факультет
Кафедра математического анализа и теории функций

УТВЕРЖДАЮ:
Зав. кафедрой математического
анализа и теории функций,
д.ф.-м.н., профессор

_____________ В.В.Арестов
14 февраля 2011 года

Программа государственного экзамена по магистерской программе «Аппроксимационные методы математического моделирования» направления подготовки 010100.68 «Математика»

1. Общие вопросы. Понятие моделирования и математического моделирования. Непрерывные и дискретные математические модели, статика и динамика в природе, средства математического моделирования объектов и их отношений. Иерархия моделей [1–5].

2. Математическая физика. Физические задачи, приводящие к уравнениям математической физики. Основные типы уравнений математической физики. Постановки основных задач. Функция Грина. Метод Фурье [6–8]. Метод конечных элементов приближенного решения уравнений в частных производных [43–48].

3. Дифференциальные уравнения. Существование и единственность решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Линейные дифференциальные уравнения N-го порядка; уравнения с постоянными коэффициентами. Системы линейных дифференциальных уравнений. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами [9].

4. Численные методы. Решение линейных алгебраических уравнений. Точные и итерационные методы. Обращение матриц. Обусловленность. Численное интегрирование. Алгоритмы решения нелинейных уравнений и минимизации функций многих переменных. Обработка экспериментальных данных и метод наименьших квадратов [11–17].

4. Функциональный анализ. *Метрические пространства.* Сходимость. Полнота метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических пространствах [25, гл. II]; [28, гл. IV]. *Нормированные пространства.* Линейные пространства. Нормированные пространства. Евклидовы пространства [25, гл. III]; [28, гл. IV]. *Линейные функционалы и линейные операторы.* Непрерывные линейные функционалы. Теорема Хана – Банаха. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма [25, гл. IV, §§1–3, 5, 6]; [28, гл. IV]. *Спектр оператора.* Сопряженные, самосопряженные, симметричные, положительно определенные операторы и их спектральные свойства [28, гл.V]; [26, гл. VII].

Спектр оператора. Сопряженные, самосопряженные, симметричные, положительно определенные операторы и их спектральные свойства [28, гл.V]; [26, гл. VII]. *Дифференцирование операторов в линейных нормированных пространствах*; производные Фреше и Гато; метод Ньютона [26, гл. VIII]).

5. Обобщенные функции. Пространства основных и обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций. Прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста [24, гл. II]; [25, гл. IV, §4; гл.VIII, §8]; [27].

6. Гармонический анализ. Поточечная, равномерная и среднеквадратическая сходимости тригонометрического ряда Фурье. Преобразование Фурье в пространствах L_1 и L_2; основные свойства. Теорема Планшереля [25, гл. VIII]; [24, гл. II]; [29, гл. I].

7. Теория приближения. *Теоремы двойственности* для задач приближения конечномерным подпространством и выпуклым множеством в банаховом пространстве. Теорема двойственности в конкретных пространствах. *Равномерное приближение функций*. Приближение функций многочленами на отрезке. Теоремы Валле-Пуссена и Чебышева. Полиномы Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля. Прямая теорема (Джексона) приближения функций тригонометрическими полиномами. Неравенство Бернштейна для тригонометрических полиномов. Обратные теоремы теории приближения функций (Тиммана – Стечкина, Зигмунда, Бернштейна). Интерполирование функций алгебраическими многочленами. Сходимость. Оценка констант Лебега. Приближение класса функций W_∞^r тригонометрическими многочленами; теорема Фавара – Ахиезера – Крейна. Приближение классом сверток. *Приближение в гильбертовом пространстве* и в пространстве L_p; характеристика элемента наилучшего приближения. *Полиномиальные сплайны*. Интерполяционные сплайны. Оценки погрешности аппроксимации полиномиальными сплайнами второй и третьей степени. Экстремальные свойства полиномиальных сплайнов нечетной степени. Связь интерполяционных сплайнов нечетной степени и интерполяционных сплайнов наилучшего среднеквадратического приближения [32, 33].

8. Всплески. Непрерывные всплески. Прямое и обратное непрерывное всплеск-преобразование. Кратно-масштабный анализ (КМА). Построение всплесков, связанных с известной масштабирующей функцией. Восстановление масштабирующей функции по ее известной маске. Построение КМА по маске. Различные типы ортогональных и биортогональных всплесков. Всплески Мейера. Всплески Добеши, ортонормированные и биортонормированные. Дискретные всплески. Прямое и обратное одномерное дискретное всплеск-преобразование. Применение всплесков к задачам сжатия и обработки сигналов[41-43].

9. Аналитические методы сжатия изображений. Основные форматы хранения изображений без потерь. Биометрические характеристики человеческого зрения. Яркость и цветность. Цветовые пространства. Проблема сжатия изображений с потерями. Одномерное и двумерное дискретное косинусное преобразование. Быстрое косинусное преобразование. Основы метода сжатия по стандарту Jpeg. Основы кратномасштабного анализа. Одномерное и двумерное дискретные вейвлет-преобразования. Основы метода сжатия по стандарту Jpeg2000. Фрактальный метод сжатия изображений, теоретическое обоснование и алгоритм кодирования. Достаточные условия сходимости метода. [34-43]

10. Теория вероятностей. Вероятность, условная вероятность. Математическое ожидание, дисперсия. Схема Бернулли. Одномерные и многомерные распределения вероятностей.

Центральная предельная теорема. Модели марковских процессов. Генераторы случайных чисел и их использование в прикладном анализе. Метод Монте-Карло [10, 13].

11. Основы информатики и программирования. Алгоритм. Операционные системы. Структуры и функции операционных систем. Понятие ресурса, распределение и использование ресурсов. Управление доступом. Управление памятью. Языки программирования. Синтаксис, семантика. Методы трансляции. Генерация и оптимизация кода. Технология программирования. Структурное, модульное программирование. Объектно-ориентированный подход к программированию. Организация разработки программного обеспечения. Тестирование и отладка. Интерфейс [18–23].

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. и др. Математическое моделирование. М.: Наука, 1997.
2. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1988.
3. Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. М.: МГУ, 1984.
4. Моисеев Н. Н. Алгоритмы развития. М.: Наука, 1981.
5. Компьютеры и нелинейные явления. М.: Наука, 1988.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
8. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
10. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1989.
11. Самарский А. А., Гулин А. В. Введение в численные методы. М.: Наука, 1989.
12. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
13. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2, М.: Мир, 1977.
14. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М: Наука, 1973.
15. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир, 1998.
16. Хемминг Р. В. Численные методы. М: Наука, 1973.
17. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1963.
18. Цикридзис Д., Бернстайн Ф. Операционные системы. М.: Мир,1986.
19. Дейтел Г. П. Введение в операционные системы. В 2-х тт. М.: Мир, 1987.
20. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т. 1–2. М.: Мир, 1978.
21. Йодан Э. Структурное проектирование и конструирование программ. М.: Мир, 1979.
22. Майерс Г. Искусство тестирования программ. М.: Финансы и статистика, 1982.
23. Гласс Р., Нуазо Р. Сопровождение программного обеспечения. М.: Мир, 1983.
24. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
25. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
26. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982.
27. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
28. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том V. М.: Физматгиз, 1959.
29. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
30. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1966.
31. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

32. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М., Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1979.
33. Даугавет И. К. Ведение в теорию приближения функций. Учебное пособие. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1977.
34. Воробьев В.П., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб: Военный университет связи, 1999 г. 203 с.
35. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.
36. Методы компьютерной обработки изображений (под ред. Сойфера В.А.). М.: Физматлит, 2003. 784 с.
37. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. 2-е издание. - Издательство Техносфера, 2006. - 488 с.
38. Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. М.: Диалог-Мифи, 2002. - 384 с.
39. Сэломон Д. Сжатие данных, изображений и звука. М.: Техносфера, 2004. 368 с.
40. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.: Издательство Триумф, 2003. 320 с.
41. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: РХД, 2004. 464 с.
42. Чуи Ч. К. Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.
43. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2008.
44. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
45. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
46. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980.
47. Стренг Г., Фикс Г. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
48. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981.
49. Бенерджи П., Баттерфильд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
50. Бребия Н., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982.
51. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.