РЕШЕТКА РАЗБИЕНИЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В. А. Баранский, Т. А. Королева

Пусть n – натуральное число. *Разбиением числа* n называется последовательность целых неотрицательных чисел

$$u = (u_1, u_2, ...)$$

такая, что $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq ...$, u содержит лишь конечное число ненулевых компонент и $n = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. *Длиной* разбиения называется число его ненулевых компонент.

Понятие разбиения натурального числа впервые появилось в 1669 году в письме Лейбница к Иоганну Бернулли. Основы же теории разбиений чисел были заложены Эйлером. В монографии [1] можно ознакомиться с интересной историей этой теории и многочисленными ее достижениями.

Через NPL, $NPL(n)$, $NPL(n,t)$, где $1 \leq t \leq n$, обозначим соответственно

- множество всех разбиений всех натуральных чисел;
- множество всех разбиений натурального числа n;
- множество всех разбиений длины t натурального числа n.

На множестве NPL определим отношение $\geq$, полагая

$u = (u_1, u_2, ...) \geq v = (v_1, v_2, ...)$, если $u_1 + ... + u_i \geq v_1 + ... + v_i$ $(i = 1,2,...)$.

Теорема. NPL является решеткой относительно $\leq$.

Найдены быстрые алгоритмы вычисления пересечения и объединения элементов этой решетки.

Для любых натуральных чисел n и t таких, что $1 \leq t \leq n$, $NPL(n)$ и $NPL(n,t)$ являются подрешетками решетки NPL. Указано устройство решетки NPL через ее подрешетки $NPL(n)$.

Введенное отношение $\geq$ охарактеризовано на языке преобразований разбиений чисел, что дает возможность использования решетки NPL и ее подрешеток для исследования функций нескольких целых неотрицательных аргументов.

Указанный нами порядок на NPL содержит порядок Юнга (см. стр. 30[2]) и содержится в лексикографическом порядке.

Литература

1. Эндрюс Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256с.
2. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 558с.