Влад Смолин

спецкурс

Аксиоматическая теория множеств и основания математики

– Что такое теорема? (*Почти во всех современных математических статьях теорема — это утверждение, имеющее вывод из аксиом системы ZFC теории множеств. Корректность такого вывода можно проверить на компьютере.*)

– А что такое множество? И как система ZFC избегает "парадоксов теории множеств"?

– Как получить истинное утверждение о натуральных числах, которое нельзя вывести из аксиом Арифметики Пеано, но можно доказать, используя аксиомы ZFC?

– Почему не существует формулы $\varphi(x)$ такой, что задаваемое ею множество $\{\, x \mid x$ *— формула и справедливо* $\varphi(x) \,\}$ совпадает с множеством всех истинных формул?

– Почему континуум-гипотезу[1] неразрешима[2], и как построить модель для аксиом ZFC, в которой континуум-гипотеза нарушается?

– Почему, несмотря на то, что упомянутая выше модель содержит лишь счётное число различных множеств, в ней выполняется утверждение о том, что количество различных множеств несчётно?

– Почему математики верят в существование сильно недостижимых кардиналов, хотя Теорема Гёделя о неполноте запрещает доказать, что они существуют? (Более того, она запрещает получить доказательство того, что вопрос об их существовании неразрешим!)

Если вы хотите посещать спецкурс,

напишите об этом мне в telegram: https://t.me/inko1

Задача: Назовём прямую *почти белой* (*почти чёрной*), если все её точки за исключением не более чем счётного числа покрашены в белый (чёрный) цвет. Можно ли покрасить плоскость так, чтоб каждая горизонтальная прямая оказалась почти белой, а каждая вертикальная — почти чёрной?

Задача посложнее: Два игрока по очереди выбирают несчётные подмножества $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots$ вещественной прямой. Цель первого — добиться, чтоб множество $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ оказалось пустым, цель второго — ему помешать. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

---

[1] Континуум-гипотеза (она же первая проблема Гильберта) утверждает, что для каждого несчётного подмножества A вещественной прямой R существует биекция между A и R

[2] Эту гипотеза невозможно ни доказать, ни опровергнуть в системе ZFC аксиом теории множеств