

## Международная Школа-конференция С. Б. Стечкина по теории функций

(г. Кыштым, Челябинская обл., 1–10 августа 2023 г.)

Список докладов (по алфавиту) с аннотациями

### International S.B. Stechkin's Workshop-Conference on Function Theory

(Russia, Chelyabinsk region, August 1–10, 2023)

List of talks with abstracts (ordered according to the Russian alphabet)

1. Акишев Г. Неравенство разных метрик Никольского в пространстве со смешанной несимметричной нормой (40 минут)

Akischev G. Nikol'skii different metrics inequality in a space with a mixed asymmetric norm (40 minutes)

В докладе рассматривается  $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)$  – известное пространство Лебега со смешанной нормой  $\|f\|_{\bar{p}}$ ,  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $1 \leq p_j < \infty$ ,  $2\pi$ -периодических функций  $f(\bar{x})$ . Пусть  $\bar{p}^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_m^{(1)})$ ,  $\bar{p}^{(2)} = (p_1^{(2)}, \dots, p_m^{(2)})$ . Символом  $L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$  обозначается пространство функций  $f(\bar{x})$  таких, что  $f^+ \in L_{\bar{p}^{(1)}}(\mathbb{T}^m)$  и  $f^- \in L_{\bar{p}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$ , при этом положим  $\|f\|_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}} = \|f^+\|_{\bar{p}^{(1)}} + \|f^-\|_{\bar{p}^{(2)}}$ , где  $f^+ = \max\{f, 0\}$ ,  $f^- = \max\{-f, 0\}$ . Величина  $\|f\|_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}$  называется смешанной несимметричной нормой. В случае  $p_1^{(1)} = \dots = p_m^{(1)} = p_1$ ,  $p_1^{(2)} = \dots = p_m^{(2)} = p_2$ , пространство  $L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$  определил А. И. Козко и доказал неравенство разных метрик для тригонометрического полинома в этом пространстве. В докладе будет представлено неравенство разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов в пространстве со смешанной несимметричной нормой.

Consider the known Lebesgue space  $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)$  of  $2\pi$ -periodic functions  $f(\bar{x})$  with mixed norm  $\|f\|_{\bar{p}}$ ,  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $1 \leq p_j < \infty$ . Let  $\bar{p}^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_m^{(1)})$  and  $\bar{p}^{(2)} = (p_1^{(2)}, \dots, p_m^{(2)})$ . The symbol  $L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$  stands for the space of functions  $f(\bar{x})$  such that  $f^+ \in L_{\bar{p}^{(1)}}(\mathbb{T}^m)$ ,  $f^- \in L_{\bar{p}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$ , and  $\|f\|_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}} = \|f^+\|_{\bar{p}^{(1)}} + \|f^-\|_{\bar{p}^{(2)}}$ , where  $f^+ = \max\{f, 0\}$  and  $f^- = \max\{-f, 0\}$ . The quantity  $\|f\|_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}$  is called the mixed asymmetric norm. A.I. Kozko defined the space  $L_{\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$  in the case  $p_1^{(1)} = \dots = p_m^{(1)} = p_1$  and  $p_1^{(2)} = \dots = p_m^{(2)} = p_2$  and proved the inequality of different metrics for a trigonometric polynomial in this space. The talk presents the Nikol'skii different metrics inequality for trigonometric polynomials in the space with a mixed nonsymmetric norm.

2. Акопян Р. Р. Многомерный аналог теоремы о двух константах и оптимальное восстановление голоморфных функций в шаре (40 минут)

Akopyan R.R. Multidimensional analogue of the two constant theorem and optimal recovery of holomorphic functions in a ball (40 minutes)

В докладе рассматриваются аналоги теоремы о двух константах для функций, голоморфных в шаре, оценивающих значения голоморфной функции в шаре через  $L^{ps}$ -средние на паре измеримых подмножеств  $G_s$ ,  $s = 0, 1, -$  разбиении сферы. Обсуждается связанная задача оптимального восстановления голоморфной функции в шаре по приближенно заданным предельным граничным значениям на подмножестве сферы.

The talk considers analogs of the two constants theorem for functions that are holomorphic in a ball that estimate the values of a holomorphic function in a ball

in terms of  $L^{p_s}$ -means on a pair of measurable subsets  $G_s$ ,  $s = 0, 1$ , a sphere partition. The related problem of optimal recovery of a holomorphic function in a ball from approximately given limit boundary values on a subset of the sphere is discussed.

3. Акопян Р. Р. Задача Стечкина о приближении оператора дифференцирования в равномерной норме на полупрямой (40 минут)

Соавторы: Арестов В. В., Тимофеев В. Г.

Akopyan R.R. Stechkin's problem on the approximation of a differentiation operator in the uniform norm on the semiaxis (40 minutes)

Co-author: Arestov V.V., Timofeev V.G.

Обсуждается задача Стечкина наилучшего приближения операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами на полупрямой относительно равномерной нормы. Исследуется структура оператора наилучшего приближения, связь оператора наилучшего приближения со сплайном двойственным (по Н. П. Кушцову) экстремальному сплайну в неравенстве Колмогорова на полуоси.

Stechkin's problem of the best approximation of differentiation operators by bounded linear operators on the semiaxis with respect to the uniform norm is discussed. The structure of the operator of the best approximation and the connection of the operator of the best approximation with the spline dual (according to N.P. Kuptsov) to the extremal spline in Kolmogorov's inequality on the semiaxis are investigated.

4. Алимов А. Р. Чебышёвское приближение подпространствами. Теоремы об очистке (50 минут)

Alimov A.R. Chebyshev approximation by subspaces. Balayage theorems (50 minutes)

Доклад основан на совместной работе с профессором И. Г. Царьковым. Изучаются аппроксимативные и геометрические свойства чебышёвских множеств, составленных из не более, чем счетного объединения аффинных подпространств (плоскостей). Показывается, в частности, что если чебышёвское множество  $M$  в банаховом пространстве составлено по крайней мере из двух плоскостей (не содержащих друг друга), то оно не  $B$ -связно (т. е. его пересечение с некоторым шаром несвязно) и не  $Bo$ -полно. Мы также показываем, что в рефлексивном CLUR-пространстве (и, в частности, в полном равномерно выпуклом пространстве) множество, составленное из счетного числа плоскостей не может быть чебышёвским. В случае конечного объединения плоскостей (не менее двух) мы показываем, что их объединение не может быть чебышёвским множеством ни в каком линейном нормированном пространстве. Получены приложения в пространствах  $C(Q)$ ,  $L^1$  и  $L^\infty$ .

The report is based on a joint paper with Prof. I.G. Tsar'kov. We study approximative and geometric properties of Chebyshev sets composed of at most countably many planes. We show, in particular, that if a Chebyshev subset  $M$  of a Banach space  $X$  consists of at least two planes, then it is not  $B$ -connected (i.e., its intersection with some closed ball is disconnected) and is not  $Bo$ -complete. We also show that, in reflexive (CLUR)-spaces (and, in particular, in complete uniformly convex spaces), a set composed of countably many planes is not a Chebyshev set. For finite unions, we show that any finite union of planes (involving at least two planes) is not a Chebyshev set for any norm on the space. Several applications of our results in the spaces  $C(Q)$ ,  $L^1$  and  $L^\infty$  are also given.

5. Арестов В. В. Приближение операторов дифференцирования ограниченными линейными операторами в пространствах Лебега на оси и родственные задачи в пространствах  $(p, q)$ -мультипликаторов и им преддуальных пространствах (90 минут)

Arestov V.V. Approximation of differentiation operators by bounded linear operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in spaces of  $(p, q)$ -multipliers and their predual spaces (90 minutes)

Рассматривается вариант  $E_{n,k}(N; r, r; p, p)$  четырехпараметрической задачи Стечкина  $E_{n,k}(N; r, s; p, q)$  о наилучшем приближении операторов дифференцирования порядка  $k$  на классе  $n$  раз дифференцируемых функций ( $0 < k < n$ ) в пространствах Лебега на числовой оси. Обсуждается состояние исследований в этой задаче и родственных ей задачах в пространствах  $(p, q)$ -мультипликаторов пространств Лебега и преддуальных им пространствах. Будут даны двусторонние оценки значения  $E_{n,k}(N; r, r; p, p)$  задачи.

We consider a variant  $E_{n,k}(N; r, r; p, p)$  of the four-parameter Stechkin problem  $E_{n,k}(N; r, s; p, q)$  on the best approximation of differentiation operators of order  $k$  on the class of  $n$  times differentiable functions ( $0 < k < n$ ) in Lebesgue spaces on the real axis. The state of research in this problem and related problems in spaces of  $(p, q)$ -multipliers of Lebesgue spaces and spaces predual to them are discussed. Two-sided estimates for the value  $E_{n,k}(N; r, r; p, p)$  of the problem will be given.

6. Бабенко А. Г. Разложение в ряд Тейлора в окрестности нуля сложной функции комплексного переменного специального вида (45 минут)

Соавторы: Горбачев Д. В., Дейкалова М. В., Крякин Ю. В.

Babenko A.G. Expansion in a Taylor series in a neighborhood of 0 of a complex function of a complex variable of a special form (45 minutes)

Co-author: Deikalova M.V., Gorbachev D.V., and Kryakin Yu.V.

Найдены явные формулы коэффициентов в разложении в ряд Тейлора в окрестности нуля сложной функции комплексного переменного специального вида (а именно, внешней функцией является синус, косинус или экспонента, а внутренней — конкретная дробно-линейная функция). Результат получен совместно с Д. В. Горбачевым, М. В. Дейкаловой и Ю. В. Крякиным.

Explicit formulas are found for the coefficients in the expansion in a Taylor series in a neighborhood of 0 of a complex function of a complex variable of a special type (namely, the outer function is the sine, cosine, or exponential, and the inner one is a specific fractional-linear function). The result was obtained jointly with M.V. Deikalova, D.V. Gorbachev, and Yu.V. Kryakin.

7. Бердышев В. И. Две модели движения наблюдателя в условиях противодействия объекта (60 минут)

Berdyshev V.I. Two models of the movement of an observer in the conditions of counteraction of an object. (60 minutes)

8. Бердышева Е. Е. Приближение многозначных функций метрическими интегральными операторами (30 минут)

Соавторы: Nira Dyn, Elza Farkhi, Alona Mokhov (Тель-Авив)

Berdysheva E.E. Approximation of set-valued functions by metric integral operators (30 minutes)

Coauthors: Nira Dyn, Elza Farkhi, and Alona Mokhov (Tel Aviv)

Мы изучаем многозначные функции, отображающие компактный отрезок вещественной оси во множество непустых компактных подмножеств пространства  $\mathbb{R}^d$ . В ранних работах по приближению многозначных функций практически исключительно изучаются многозначные функции с выпуклыми значениями. Обычные методы, применяющиеся для работы с многозначными функциями, включают в себя линейные комбинации Минковского и интеграл Аумана. Известно, что эти методы обладают свойством конвексификации (овыпукливания). Как следствие, использующие их методы приближения дают аппроксимирующие функции с выпуклыми значениями, даже если исходная функция не обладала этим свойством. Понятно, что такие методы бесполезны для работы с многозначными функциями с произвольными, т. е. не обязательно выпуклыми, значениями.

Основываясь на понятии так называемых метрических пар, введенном Зви Артштейном, мои соавторы Нира Дин, Елза Фархи и Алона Мохов разработали методы, которые хорошо подходят для работы с многозначными функциями в общем случае. Эти методы включают в себя метрические цепи, метрические линейные комбинации, метрические выборки и метрический интеграл.

Доклад посвящен метрической адаптации интегральных операторов приближения для многозначных функций ограниченной вариации с компактным графиком. Адаптация операторов происходит посредством замены интеграла Римана на взвешенный метрический интеграл. Важным примером является метрическая аппроксимация Фурье: это адаптация частичных сумм тригонометрических рядов Фурье к многозначным функциям. С другой стороны, мы рассматриваем классические линейные положительные операторы, такие как оператор Бернштейна–Дюррмайера и оператор Канторовича.

We study set-valued functions (SVFs, multifunctions) that map a compact real interval in the set of compact non-empty subsets of  $\mathbb{R}^d$ . Older approaches investigated almost exclusively approximation of SVFs with convex values. The standard techniques used for work with SVFs include Minkowski linear combinations and Aumann integral. These techniques are known to suffer from the phenomenon called convexification. As a result, approximation methods built on them deliver approximants whose values are convex, even if the function to be approximated did not have this property. Clearly, such methods are useless when one wants to approximate a set-valued function with general, not necessarily convex values.

Using the concept of metric pairs that goes back to Z. Artstein, my co-authors N. Dyn, E. Farkhi, and A. Mokhov developed in a series of works techniques that are appropriate for work with SVFs with general, not necessarily convex values. These techniques include metric chains, metric linear combinations, metric selections and metric integral.

In this talk we discuss metric adaptation of integral approximation operators to set-valued functions of bounded variation with compact graphs. The operators are adapted by replacing the Riemann integral by the weighted metric integral. One important example is the metric Fourier approximation that is an adaptation of partial sums of trigonometric Fourier series to SVFs. On the other hand, we consider classical positive linear operators such as the Bernstein–Durrmeyer operator and the Kantorovich operator.

9. Бородин П. А. Плотность квантованных приближений (50 минут)  
Borordin P.A. Density of quantized approximations (50 minutes)

В докладе формулируются и обсуждаются новые результаты об условиях на множество  $M$  в банаховом пространстве  $X$ , необходимых или достаточных для того, чтобы порождаемая им аддитивная полугруппа  $R(M)$  (множество всевозможных сумм элементов из  $M$ ) была плотна в  $X$ . Приводятся известные и новые результаты о приближении простейшими дробями (логарифмическими производными многочленов) в различных пространствах функций комплексного переменного. При этом некоторые из известных теорем, в частности теорема Кореваара, выводятся из новых общих результатов о плотности полугруппы.

In this talk, we formulate and discuss new results on conditions for a set  $M$  in a Banach space  $X$  that are necessary or sufficient for the additive semigroup  $R(M)$  generated by it (the set of all possible sums of elements from  $M$ ) to be dense in  $X$ . Known and new results on approximation by simple partial fractions (logarithmic derivatives of polynomials) are given in various spaces of functions of a complex variable. At the same time, some of the well-known theorems, in particular, Korevaar's theorem, are derived from new general results on the density of a semigroup.

10. Волков Ю.С. Условия наследования геометрических свойств при сплайн интерполяции (60 минут)  
Volkov Yu.S. Conditions for inheritance of geometric properties in spline interpolation (60 minutes)

Рассматривается задача интерполяции с наследованием таких геометрических свойств данных как положительность, монотонность, выпуклость кубическими и квадратическими сплайнами. Получаемые условия также называются условиями формосохранения. Дается обзор известных результатов, подробно разобран математический аппарат, лежащий в основе методов получения достаточных условий формосохранения, рассматривается развитие аппарата. Показано, что в случае строгой положительности интерполируемой функции или производной всегда можно добиться наследования интерполянтом знака функции или соответствующей производной путем загущения сетки. Также рассматривается задача интерполяции в среднем интегральными сплайнами.

The problem of interpolation with the inheritance of such geometric properties of data as positivity, monotonicity, and convexity by cubic and quadratic splines is considered. The resulting conditions are also called shape-preserving conditions. An overview of the known results is given, the mathematical apparatus underlying the methods for obtaining sufficient conditions for shape preservation is analyzed in detail, and the development of the apparatus is considered. It is shown that, for a strictly positive function (or a function whose derivative is positive), it is possible to find an interpolant of the same sign as the initial function (its derivative, respectively) by thickening the mesh. The problem of interpolation in the mean by integral splines is also considered.

11. Горбачев Д. В. Уточнение оценки среднего угла для пучка прямых в проблеме Фейеш Тота (50 минут)  
Соавтор: Лепетков Д. Р., Gorbachev D.V. Refinement of the mean angle estimate for a pencil of lines in the Fejesh Tóth problem (50 minutes)  
Co-authors: Lepetkov D.R.

Рассматривается геометрическая проблема Фейеш Тота о максимуме  $E$  среднего значения суммы углов между прямыми в  $\mathbb{R}^3$  с общим центром. Л. Фейеш Тот предположил, что экстремум достигается на пучке прямых, распределенных вдоль координатных осей. В этом случае  $E = \pi/3 = 1.047\dots$ . Эта гипотеза до сих пор не доказана. Сам Фейеш Тот показал, что  $E \leq 1.256\dots$ . Недавно F. Fodor, V. Vigh и T. Zarnocz доказали, что  $E \leq 1.178\dots$ . Наконец, D. Bilyk и R.W. Matzke установили, что  $E \leq 1.110\dots$ . Мы уточняем эту оценку при помощи экстремальной задачи  $A$  типа Дельсарта:  $E \leq A < 1.08326$ . При помощи двойственной проблемы  $B$  мы показываем, что решение задачи  $A$  не позволяет доказать гипотезу Фейеш Тота, так как  $1.05210 < B \leq A$ . Интересно, что верность гипотезы Фейеш Тота легко устанавливается для случая суммы квадратов углов.

The geometric problem of Fejes Tóth on the maximum  $E$  of the mean value of the sum of angles between lines in  $\mathbb{R}^3$  with a common center is considered. L. Fejes Tóth suggested that the extremum is reached on a pencil of lines distributed along the coordinate axes. In this case  $E = \pi/3 = 1.047\dots$ . This hypothesis has not yet been proven. Fejes Tóth himself showed that  $E \leq 1.256\dots$ . Recently, F. Fodor, V. Vigh, and T. Zarnocz proved that  $E \leq 1.178\dots$ . Finally, D. Bilyk and R.W. Matzke established that  $E \leq 1.110\dots$ . We refine this estimate using an extremal problem  $A$  of the Delsarte type:  $E \leq A < 1.08326$ . Using the dual problem  $B$ , we show that the solution of problem  $A$  does not allow us to prove the Fejes Tóth conjecture since  $1.05210 < B \leq A$ . Interestingly, the correctness of Fejes Tóth's conjecture is easily established for the case of the sum of the squares of the angles.

12. Иванов В. И. Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой (60 минут)  
Ivanov V.I. Generalized Hankel transform on the line (60 minutes)

В 2012 году Бен Саид, Кобаяши и Орстед определили унитарное  $(k, a)$ -обобщенное преобразование Фурье в евклидовом пространстве. Классическое преобразование Фурье ( $a = 2, k = 0$ ) и преобразование Данкля ( $a = 2$ ) являются его частными случаями. В отличие от преобразования Данкля  $(k, a)$ -обобщенное преобразование Фурье при  $a \neq 2$  обладает деформационными свойствами и, например, пространство Шварца для него не является инвариантным. Но для  $a = 2/n, n$  натуральное, одномерное обобщенное преобразование Фурье функции из пространства Шварца все еще быстро убывает к нулю на бесконечности, и оно достаточно содержательно для изучения. При  $a = 2r - 1$  замена переменной снимает деформационные свойства обобщенного преобразования Фурье, и оно становится правильным обобщением преобразования Данкля. При  $a = 2r$  деформационные свойства обобщенного преобразования Фурье, называемого обобщенным преобразованием Ганкеля, заменой переменной не устраняются и этот случай требует отдельного исследования. В докладе будет идти речь об описании инвариантного подпространства для обобщенного преобразования Ганкеля, операторах обобщенного сдвига, условиях  $L_p$ -сходимости и сходимости почти всюду обобщенных средних.

In 2012, Ben Said, Kobayashi, and Orsted defined the unitary  $(k, a)$ -generalized Fourier transform in Euclidean space. The classical Fourier transform ( $a = 2, k = 0$ ) and the Dunkl transform ( $a = 2$ ) are its special cases. In contrast to the Dunkl transform, the  $(k, a)$ -generalized Fourier transform for  $a \neq 2$  has deformation properties, and, for example, the Schwartz space is not invariant for it. But for  $a = 2/n$ , where  $n$  is natural, the one-dimensional generalized Fourier transform of a function from the Schwartz space still rapidly decreases to zero at infinity, and it is meaningful enough

to study. When  $a = 2r - 1$ , the change of variable removes the deformation properties of the generalized Fourier transform, and it becomes a proper generalization of the Dunkl transform. For  $a = 2r$ , the deformation properties of the generalized Fourier transform, which is called the generalized Hankel transform, are not eliminated by a change of variable, and this case requires a separate study. The report describes the invariant subspace for the generalized Hankel transform, generalized translation operators, conditions for the  $L_p$ -convergence, and convergence almost everywhere of generalized means.

13. Ильясов Н. А. О правильных оценках между наилучшими приближениями и модулями гладкости (60 минут)  
 Ilyasov N.A. On true estimates between best approximations and moduli of smoothness (60 minutes)

14. Ковалевский А. А. Точные условия в  $L_1$ -теории существования решений вырождающихся эллиптических уравнений (45 минут)  
 Kovalevsky A.A. Sharp conditions in the  $L_1$ -theory of existence of solutions of degenerate elliptic equations (45 minutes)

В докладе обсуждаются точные условия существования слабых решений задачи Дирихле для класса вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка с  $L_1$ -правой частью.

In the talk, we discuss sharp conditions for the existence of weak solutions of the Dirichlet problem for a class of second-order degenerate elliptic equations with  $L_1$ -right-hand side.

15. Конягин С. В. О норме проекции Рисса из  $L^\infty$  в  $L^p$  (50 минут)  
 Соавторы: Hervé Queffelec, Eero Saksman, Kristian Seip  
 Konygin S.V. On the norm of the Riesz projection from  $L^\infty$  to  $L^p$  (50 minutes)  
 Coauthors: Hervé Queffelec, Eero Saksman, and Kristian Seip

Мы показываем, что проекция Рисса из  $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$  в  $L^p(\mathbb{T}^\infty)$  является неограниченным оператором для любого  $p > 2$ .

We show that the Riesz projection from  $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$  to  $L^p(\mathbb{T}^\infty)$  is an unbounded operator for any  $p > 2$ .

16. Леонтьева А. О. Неравенство Бернштейна для производной Рисса дробного порядка, меньшего единицы, целых функций экспоненциального типа и тригонометрических полиномов (30 минут)  
 Leont'eva A.O. Bernstein inequality for Riesz derivative of fractional order less than one of entire functions of exponential type and trigonometric polynomials (30 minutes)

Рассматривается неравенство Бернштейна для производной Рисса порядка  $0 < \alpha < 1$  целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси. Для производной Рисса получена интерполяционная формула, эта формула имеет неравномерные узлы. С ее помощью получено точное неравенство Бернштейна, а именно, выписаны экстремальная целая функция и точная константа. Кроме того, в аналогичном неравенстве для тригонометрических полиномов порядка  $n$  получена асимптотика точной константы по  $n$ .

We consider Bernstein inequality for Riesz derivative of order  $0 < \alpha < 1$  of entire functions of exponential type that are bounded on the real axis. The interpolation

formula for the Riesz derivative is obtained; this formula has non-equidistant nodes. Using this formula, we obtain the sharp Bernstein inequality for all  $0 < \alpha < 1$ ; more precisely, we find an extremal entire function and an exact constant. Besides this, we obtain the asymptotic with respect to  $n$  of the exact constant in the analogous inequality for trigonometric polynomials of order  $n$ .

17. Малыгина Е. Г. Астрофотографии и соответствующий инструментарий (30 минут)  
Malygina E.G. Astrophotography and related tools (30 minutes)

18. Малыхин Ю. В. Полиномиальное приближение локально-постоянных функций и улучшение аппроксимации (50 минут)

Соавтор: Рютин К. С.

Malykhin Yu.V. Polynomial approximation of locally constant functions and amplification of approximation (50 минут)

Coauthor: Ryutin K.S.

Мы рассмотрим полиномиальное приближение функций, заданных на объединении нескольких отрезков и постоянных на каждом из отрезков. Приведем простые и явные оценки погрешности приближения в зависимости от геометрии этой системы отрезков. Дадим следствия для метода полиномиального улучшения аппроксимации функций с дискретным множеством значений (например, для колмогоровских поперечников классов булевых функций).

We consider the polynomial approximation of functions defined on the union of some segments and being constant on each of the segments. We will provide simple and explicit bounds on the error of the approximation in terms of the geometry of this system of segments. Also, we will give corollaries on the amplification of the approximation method for functions with a discrete set of values, e.g., for Kolmogorov widths of classes of boolean functions.

19. Масютин Д. И. О связи классов функций ограниченной вариации и классов функций с фрактальным графиком (30 минут)

Masyutin D.I. On the connection between classes of functions of bounded variation and classes of functions with fractal graph (30 минут)

Для непрерывной на отрезке вещественнозначной функции  $f$  вводится понятие модуля фрактальности  $\nu(f, \varepsilon)$ , сопоставляющего каждому  $\varepsilon > 0$  минимальное число квадратов со сторонами длины  $\varepsilon$ , параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции  $f$ . Для невозрастающей функции  $\mu : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  рассматривается класс  $F^\mu$  непрерывных на отрезке функций таких, что  $\nu(f, \varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))$ . Описано соотношение классов  $F^{\mu_1}$  и  $F^{\mu_2}$  при различных  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Установлена связь между классами  $F^\mu$  и классами непрерывных функций ограниченной вариации  $BV_\Phi[a, b] \cap C[a, b]$  для произвольных выпуклых функций  $\Phi$ .

For a real-valued function  $f$  continuous on a closed interval, its modulus of fractality  $\nu(f, \varepsilon)$  is defined as the function that maps any  $\varepsilon > 0$  to the smallest number of squares of size  $\varepsilon$  parallel to the coordinate axes that cover the graph of  $f$ . For a nonincreasing function  $\mu : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , we consider the class  $F^\mu$  of functions continuous on an interval such that  $\nu(f, \varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))$ . The relation between the classes  $F^{\mu_1}$  and  $F^{\mu_2}$  is described for different  $\mu_1$  and  $\mu_2$ . The connection is established between the classes  $F^\mu$  and the classes of continuous functions of bounded variation  $BV_\Phi[a, b] \cap C[a, b]$  for arbitrary convex functions  $\Phi$ .

20. Мироненко А. В. (30 минут)

Другой подход к приближению многочленами (30 минут)

Mironenko A.V. Another approach to approximation by polynomials (30 minutes)

21. Надь Б. (Сегед, Венгрия) Задачи минимакса и максимина для тригонометрических полиномов с весами (60 минут)

Соавторы: С. Ревес (Будапешт, Венгрия), Б. Фаркаш (Вупперталь, Германия)

Nagy B. (Szeged, Hungary) Minimax and maximin problems for weighted trigonometric polynomials (60 minutes)

Coauthors: Révész Sz.D. (Budapest, Hungary), Farkas B. (Wuppertal, Germany)

Мы исследуем минимаксную задачу Боянова – Чебышёва для тригонометрических полиномов в супремум-норме с весом. Метод суммы сдвигов обеспечивает удобную основу для таких вопросов. Расширяя наши предыдущие результаты, мы достигаем значительной общности и доказываем точные результаты для минимаксных, максиминных и равноколеблющихся узловых систем, а также поведение локальных (интервальных) максимумов. Это незавершенная работа, совместная со Силардом Ревесом и Балинтом Фаркашом.

We investigate the Bojanov–Chebyshev minimax problem for trigonometric polynomials in weighted supremum norm. The sum of translates method provides a convenient framework for such questions. Extending our earlier results, we reach considerable generality and prove precise results for minimax, maximin, and equioscillating node systems, and the local (interval) maxima behavior. This is a work in progress, joint with Szilard Révész and Balint Farkas.

22. Никифорова Т. М. Задачи минимакса и максимина для сумм сдвигов на вещественной оси (30 минут)

Nikiforova T.M. Minimax and maximin problems for sums of shifts on the real axis (30 minutes)

В докладе будут обсуждаться задачи минимакса и максимина на вещественной оси для сумм сдвигов. Этот класс функций обобщает многочлены с весом. Единственной экстремальной в задачах минимакса и максимина является одна и та же функция. Основным методом решения задач является сведение их к аналогичным на отрезке. Для сведения к отрезку задачи минимакса на оси доказывается аналог теоремы Машкара – Рахманова – Саффа для сумм сдвигов, что представляет отдельный интерес. Для отрезка  $[0, 1]$  и единичного веса задача минимакса для многочленов с фиксированными кратностями корней была решена Б. Д. Бояновым в 1979 году. Взвешенную задачу Боянова на отрезке решили венгерские математики Б. Фаркаш, Б. Надь и С. Ревес в 2021 году.

The talk will present the solution to the minimax and maximin problems on the real axis for sums of translates. The sums of translates generalize weighted algebraic polynomials. We prove that there is a unique function that is extremal in both problems. The key in our proof is a reduction to the problem on a segment. It is interesting that for this, we obtain an analog of the Mhaskar–Rakhmanov–Saff theorem. The minimax problem for polynomials with fixed root multiplicities on  $[0, 1]$  was solved by B.D. Bojanov in 1979. A weighted Bojanov problem on the segment was solved by B. Farkas, B. Nagy, and Sz.Gy. Révész in 2021.

23. Новиков С. И. Оптимальная интерполяция на конечном отрезке (40 минут)  
Novikov S.I. Optimal interpolation on a finite segment (40 minutes)

Найдено точное решение задачи интерполяции с наименьшим значением  $L_2$ -нормы производной порядка  $r$  ( $r \geq 2$ ) на конечном отрезке  $[a, b]$  для интерполируемых данных из единичного шара пространства  $l_2^N$ . Интерполирование производится в узлах произвольной конечной сетки  $\Delta_N: a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$  классом гладких функций с абсолютно непрерывной  $(r - 1)$ -й производной. Результат выражается через максимальное собственное значение матрицы некоторой квадратичной формы.

An exact solution to the interpolation problem with the smallest value of  $L_2$ -norm of a derivative of order  $r$  ( $r \geq 2$ ) on a finite segment  $[a, b]$  is found for interpolated data from the unit ball of the space  $l_2^N$ . The interpolation is performed at the knots of an arbitrary finite grid  $\Delta_N: a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$  by the class of smooth functions with an absolutely continuous derivative of order  $r - 1$ . The result is expressed in terms of the largest eigenvalue of the matrix of a certain quadratic form.

24. Паюченко Н. С. Неравенства колмогоровского типа с несимметричными ограничениями на вторую производную (30 минут)  
Payuchenko N.S. Kolmogorov-type inequalities with asymmetric restrictions on the second derivative (30 minutes)

В неравенстве Колмогорова, которое оценивает сверху  $L_q$ -норму промежуточной производной функции через  $L_r$ -норму функции и  $L_p$ -норму старшей производной или  $L_p$ -норму несимметричной срезки старшей производной, в некоторых случаях найдена точная константа. Доказано, что точная константа в неравенстве колмогоровского типа для несимметричных срезов второй производной на оси и периоде для показателей  $q \leq 1$ ,  $r \leq 1/2$ ,  $p \leq 1$ ,  $2/q = 1/r + 1/p$  равна точной константе в неравенстве на отрезке по классу функций с абсолютно непрерывной производной, обращающейся в ноль на концах отрезка, и таких, что функция выпукла на одной части отрезка и вогнута на другой. А в случае неравенства для положительной срезки второй производной точная константа равна точной константе в неравенстве на отрезке по классу выпуклых функций с абсолютно непрерывной производной, обращающейся в 0 на левом конце отрезка. При этом в неравенстве с положительной срезкой экстремальной функции не существует.

In Kolmogorov's inequality, which estimates from above the  $L_q$ -norm of an intermediate derivative of a function in terms of the  $L_r$ -norm of the function and the  $L_p$ -norm of the highest derivative or the  $L_p$ -norm of an asymmetric cutoff of the highest derivative, in some cases, an exact constant is found. It is proved that the exact constant in the Kolmogorov-type inequality for asymmetric cutoffs of the second derivative on the axis and period for the exponents  $q \leq 1$ ,  $r \leq 1/2$ ,  $p \leq 1$ ,  $2/q = 1/r + 1/p$  is equal to an exact constant in the inequality on an interval in the class of functions with an absolutely continuous derivative that vanishes at the ends of the interval and such that the function is convex on one part of the interval and concave on the other. And in the case of an inequality for a positive cutoff of the second derivative, the exact constant is equal to the exact constant in the inequality on the segment in the class of convex functions with an absolutely continuous derivative that vanishes at the left end of the segment. Moreover, there is no extremal function in the inequality with a positive cutoff.

25. Плещева Е. А. Интерполяционно-ортогональные базисы всплесков на основе нескольких функций на периоде (40 минут)  
Plescheva E.A. Interpolation-orthogonal wavelet bases based on several functions on a period (40 minutes)
26. Пьянков А. Д. Неравенства разных норм тригонометрического полинома в пространствах Орлича (60 минут)  
P'yankov A.D. Inequalities of different norms of a trigonometric polynomial in Orlicz spaces (60 minutes)

Исследованы и оценены точно по порядку норм нормы тригонометрических полиномов, определенных на функциональных пространствах Орлича. Метод получения оценки состоит в получении порядковой оценки сверху и обосновании ее неулучшаемости – приведении полинома, на котором достигается эта оценка. Получение порядковой оценки сверху проходит в три этапа: аппроксимация нормы полинома более простым объектом – соответствующей нормой подходящего вектора (нормой полинома на равномерной сетке), получение оценки норм векторов, компоновка двух предыдущих результатов и формирование оценки норм для полинома.

The norms of trigonometric polynomials defined on Orlicz function spaces are investigated and exactly estimated in the order of the norms. To obtain an estimate, we first obtain an order estimate from above and prove that it is unimprovable, i.e., find a polynomial on which this estimate is achieved. The order estimate from above is obtained in three steps: approximating the norm of the polynomial by a simpler object – the corresponding norm of a suitable vector (the norm of a polynomial on a uniform grid), estimating the norms of vectors, combining these two results, and estimating the norms of the polynomial.

27. Разумовская Е. В. Гипотеза Холла для подклассов однолистных функций (30 минут)  
Razumovskaya E.V. Hall's conjecture for subclasses of univalent functions (30 minutes)

Рассматривается задача об изучении длины образа луча при отображении функциями из определенных геометрических подклассов однолистных функций. В 2022 году задача была решена в классе звездных однолистных функций порядка  $\alpha$ , тем самым подтвердив гипотезу, сформулированную Холлом. Приводятся исследования этой задачи для других подклассов.

The problem of studying the length of the image of a ray when mapped by functions from certain geometric subclasses of univalent functions is considered. In 2022, the problem was solved in the class of stellar univalent functions of order  $\alpha$ , thereby confirming the conjecture formulated by Hall. Studies of this problem for other subclasses are given.

28. Рокина (Пестовская) А. Э. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля в  $L^p(-1; 1)$ ,  $0 \leq p \leq \infty$ , с ограничением на расположение корней (40 минут)  
Rokina A.E. Polynomials that deviate least from zero in  $L^p(-1; 1)$ ,  $0 \leq p \leq \infty$ , with restrictions on the location of their roots (40 minutes)

Рассмотрена задача Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля относительно  $L^p$ -средних на отрезке  $[-1; 1]$  с ограничением на расположение нулей многочленов, а именно, на множестве  $\mathcal{P}_n(D_R)$  многочленов степени  $n$  с единичным

старшим коэффициентом, не обращающихся в нуль в открытом круге радиуса  $R \geq 1$ . Получено точное решение для геометрического среднего (при  $p = 0$ ) для всех  $R \geq 1$ , а также при  $0 < p < \infty$  для всех  $R \geq 1$  в случае многочленов четной степени. При  $0 < p < \infty$ ,  $R \geq 1$  получены двусторонние оценки величины наименьшего уклонения.

We consider Chebyshev's problem on polynomials that deviate least from zero with respect to the  $L^p$ -means on the interval  $[-1; 1]$  under a constraint on the location of the roots of polynomials. Namely, we consider the problem on the set  $\mathcal{P}_n(D_R)$  of polynomials of degree  $n$  with the unit leading coefficient that do not vanish in an open disc of radius  $R \geq 1$ . An exact solution is obtained for the geometric mean (for  $p = 0$ ) for all  $R \geq 1$ , and also for  $0 < p < \infty$  and all  $R \geq 1$  in the case of polynomials of even degree. For  $0 < p < \infty$  and  $R \geq 1$ , we obtain two-sided estimates for the value of the least deviation.

29. Саидусайнов М. С. Некоторые неравенства между наилучшей одновременной аппроксимацией и модулем непрерывности в весовом пространстве Бергмана (50 минут)

Saidusainov M.S. Some inequalities between the best simultaneous approximation and module of continuity in the weighted Bergman space (50 minutes)

30. Теляковский Д. С. Об исключительных множествах в теореме Грина (60 минут)  
Telyakovskii D.S. On exceptional sets in Green's formula (60 minutes)

Пусть область  $G \subset \mathbb{R}^2$  и функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  определены в  $\bar{G}$ . Согласно теореме Грина, если  $G$ ,  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  достаточно хорошие, то справедлива формула

$$\int_{\partial G^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Р. Феск (1965) показал, что условия, при которых верна формула Грина можно ослабить: как непрерывность функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , так и существование у них частных производных первого порядка можно не предполагать на исключительном множестве, которое является счетным объединением замкнутых множеств  $E_j$ , маленьких в некотором смысле.

Нами показано, если на  $E_j$  функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  на  $E_j$  имеют выпуклый вверх модуль непрерывности  $\omega_j(t)$ , то формула Грина справедлива, если  $H_{t\omega_j(t)}(E_j) = 0$ . Это дает более точную характеристику условий при которых верна теорема Грина, чем теорема Р. Феска.

Let  $G$  be a domain on the  $\mathbb{R}^2$  plane, and let functions  $P(x, y)$  and  $Q(x, y)$  be defined on  $\bar{G}$ . Under strong enough conditions on  $G$ ,  $P(x, y)$ , and  $Q(x, y)$ , Green's formula

$$\int_{\partial G^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

holds. R.M. Fesq (1965) had shown that Green's formula is valid with weaker than the usual assumptions. One does not need to assume the continuity of  $P(x, y)$  and  $Q(x, y)$  nor the existence of their first order derivatives on some exceptional set  $E = \bigcup E_j$ , where each  $E_j$  is closed and "small" in some sense.

We prove Green's formula under more precise conditions than R.M. Fesq did. Let functions  $P(x, y)$  and  $Q(x, y)$  be continuous on the set  $E_j$ , and let  $\omega_j(t)$  be their upper convex modulus of continuity on  $E_j$ . Green's formula holds if  $H_{t\omega_j(t)}(E_j) = 0$  for each  $j$ .

31. Холщевникова Н. Н. Множество Лузина (60 минут)  
Kholshchevnikova N.N. Luzin set (60 minutes)

Построение в ZFC множества, которое при одних дополнительных теоретико-множественных предположениях оказывается множеством Лузина, а при других – нет.

Construction in ZFC of a set which, under some additional set-theoretic assumptions, is a Luzin set, while under others, it does not.

32. Царьков И. Г. Теория рефлексивности в несимметрично нормированных пространствах (60 минут)  
Tsar'kov I.G. Theory of reflexivity in asymmetrically normed spaces (60 minutes)

Будут обсуждены свойства несимметрично нормируемых конус-пространств, при которых выполняются аналоги теорем Джеймса. Среди них в частности будут рассмотрены условия, при которых всякое конус-подпространство рефлексивного конус-пространства рефлексивно. Тем самым, мы выясним, когда такие конус-пространства являются множествами существования.

We will discuss the properties of asymmetrically normed cone spaces under which analogs of James's theorems hold. Among them, conditions will be considered under which any cone-subspace of a reflexive cone-space is reflexive. Thus, we will find out when such cone spaces are existence sets.

33. Черных Н. И. Специальные решения уравнения Эйлера движения сплошной среды в торе (60 минут)  
Chernykh N.I. Special solutions of the Euler equation of motion of a continuous medium in a torus. (60 minutes)

Дополнительно к рассмотренным ранее вместе с Ю. Н. Субботиным и В. П. Верещагиным случаям будет рассматриваться случай винтообразного движения сплошной среды в торе.

In addition to the cases considered earlier together with Yu.N.Subbotin and V.P.Vereshchagin, the case of helical motion of a continuous medium in a torus will be considered.

34. Шабозов М. Ш. О наилучшем совместном приближении аналитических функций в пространстве Харди  $H_q$ ,  $q \geq 1$  (60 минут)  
Shabozov M.Sh. On the best joint approximation of analytic functions in the Hardy space  $H_q$ ,  $q \geq 1$  (60 minutes)