ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

В. М. Бадков

# ВВЕДЕНИЕ В ЕДИНУЮ ТЕОРИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению 010300 «Математика. Компьютерные науки»,
010200 «Математика. Прикладная математика»
и специальности 010101 «Математика»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2006

УДК 517.587(075.8)
Б 152

Рецензенты:

кафедра прикладной математики и информатики механико-математического факультета Тульского государственного университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор В. И. Иванов);

доктор физико-математических наук, доцент А. Л. Лукашов (Саратовский государственный университет)

**Бадков В. М.**

Б 152 Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов: Учеб. пособие. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. – 132 с.

ISBN 5-7996-0247-1

Пособие содержит алгебраические основы единой теории многочленов, ортогональных на окружности или на отрезке, и тригонометрических ортогональных полиномов. Примерно треть содержания пособия составляют результаты, опубликованные лишь в журнальных статьях. Материал пособия доступен студентам, прослушавшим курсы математического анализа, ТФКП и ТФДП.

Предназначено для студентов специальности «Математика. Компьютерные науки», но может представить интерес для значительно более широкого круга читателей.

**УДК 517.587(075.8)**

ISBN 5-7996-0247-1

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие отражает содержание спецкурса «Ортогональные полиномы», неоднократно прочитанного автором студентам 3–4 курсов математико-механического факультета, обучающихся по специальностям «Математика» и «Математика. Компьютерные науки».

Теория ортогональных полиномов — одна из ветвей математического анализа. Первые результаты об ортогональных полиномах были получены в конце XVIII — начале XIX века, но интенсивно теория ортогональных полиномов начала развиваться с середины XIX века. Огромный вклад в становление и развитие этой теории внесли и российские математики.

Обладая ценными экстремальными и аппроксимативными свойствами, ортогональные полиномы находят все новые и новые применения в математике и других науках.

В настоящее время известно много типов ортогональных полиномов. Пособие посвящено трем из них: 1) многочленам, ортогональным на окружности (гл. 2); 2) тригонометрическим ортогональным полиномам (гл. 3) и 3) многочленам, ортогональным на отрезке (гл. 4). Эти типы ортогональных полиномов удобно изучать в рамках единой теории, основоположником которой является Г. Сегё. В начале 20-х годов XX века Г. Сегё ввел в рассмотрение многочлены, ортогональные на окружности, и выразил через них многочлены, ортогональные на отрезке. Г. Сегё получил также асимптотические представления многочленов, ортогональных на окружности, в терминах функции, носящей ныне его имя. Д. Джексон в 1933 году ввел в рассмотрение ортогональные с весом тригонометрические полиномы. В 1963 году Г. Сегё установил связь этих полиномов с многочленами, ортогональными на окружности, и, пользуясь принадлежащими ему асимптотическими представлениями последних, доказал теорему равносходимости с обычным рядом

Фурье ограниченной функции ее ряда Фурье по тригонометрическим полиномам, ортогональным с достаточно гладким положительным весом.

Дальнейшие результаты по единой теории рассматриваемых трех типов систем ортогональных полиномов и рядов Фурье по ним принадлежат автору этого пособия.

В настоящее время не существует монографий и учебных пособий, посвященных тригонометрическим полиномам, ортогональным с весом (отличным от тождественной константы). Предлагаемое пособие имеет своей целью восполнить этот пробел. Примерно треть содержания пособия составляют результаты, опубликованные лишь в журнальных статьях.

Первая глава пособия является вводной. В ней приведены сведения об ортогональных полиномах в пространствах со скалярным произведением. В этой главе под полиномами понимаются линейные комбинации конечного числа элементов линейно независимой последовательности. Последний параграф главы посвящен конкретным видам скалярных произведений и ортогональных относительно них рациональных функций, а также алгебраических и тригонометрических полиномов. В последующих трех главах излагаются в основном алгебраические свойства этих полиномов в рамках единой теории (асимптотические и аппроксимативные свойства ортогональных полиномов являются содержанием другого спецкурса, читаемого автором; автор предполагает в дальнейшем написать соответствующее пособие).

Глава 2 посвящена многочленам, ортогональным на окружности. В ней, в частности, выводятся рекуррентные соотношения и аналоги формулы Кристоффеля–Дарбу. Из последних выводятся свойства нулей и доказывается поточечное неравенство Турана и его обобщение.

В главе 3 для введенных автором рациональных функций, ортогональных на окружности, устанавливаются выражения через соответствующие ортогональные многочлены. Это позволяет установить соотношения между ядрами Кристоффеля–

Дарбу для тригонометрических ортогональных полиномов и многочленов, ортогональных на окружности, а также между полиномами этих двух систем. Свойства нулей тригонометрических ортогональных полиномов устанавливаются тоже с помощью формул, выражающих их через многочлены, ортогональные на окружности.

В главе 4 многочлены, ортогональные на отрезке, выражаются через многочлены, ортогональные на окружности, и тригонометрические ортогональные полиномы. Свойства нулей многочленов, ортогональных на отрезке, выводятся из свойств нулей тригонометрических ортогональных полиномов. Несколько параграфов посвящено многочленам Якоби (формула Родрига, дифференциальное уравнение, связь с гипергеометрической функцией, формула дифференцирования, рекуррентное соотношение, формула Кристоффеля–Дарбу). Кроме того, вычислены коэффициенты разложения многочлена Якоби одной системы по многочленам Якоби другой системы. Последний результат находит применение при исследовании равносходимости ряда Фурье–Якоби с рядом Фурье–Чебышева.

*В. М. Бадков*

Глава 1

# ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

## § 1. Пространства со скалярным произведением

Напомним некоторые сведения из теории линейных пространств.

**Определение 1.1.** *Множество $E$ элементов $x, y, z, \dots$ называется линейным пространством, если в нем введены операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр, удовлетворяющие аксиомам:*

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) *существует элемент* $\Theta$ (*называемый нулевым*), *такой, что* $x + \Theta = x$;

4) *если* $\lambda, \mu$ — *скаляры, то* $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

5) $1 \cdot x = x, \ \ 0 \cdot x = \Theta$;

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu y$.

*При этом, если скаляры суть вещественные числа, то $E$ называется вещественным линейным пространством, а если скаляры суть комплексные числа, то $E$ называется комплексным линейным пространством.*

**Определение 1.2.** *Вещественное линейное пространство $E$ называется евклидовым, если в нем введено вещественное скалярное произведение, т.е. каждой паре элементов $x$ и $y \in E$ поставлено в соответствие вещественное число $(x, y)$ (скалярное произведение элементов $x$ и $y$), удовлетворяющее аксиомам:*

1) $(x, x) \geq 0; \ \ (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = \Theta$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

**Определение 1.3.** *Комплексное линейное пространство $U$ называется унитарным, если каждой паре его элементов поставлено в соответствие комплексное число $(x, y)$ (скалярное произведение элементов $x$ и $y$), удовлетворяющее аксиомам:*

1) $(x, y) \geq 0; \ \ (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = \Theta$;
2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$[1].

В евклидовом и унитарном пространствах вводят *норму*

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} \tag{1.1}$$

*элемента $x$*. При этом получают *линейное нормированное пространство.*

**Определение 1.4.** *Пусть $E$ — пространство со скалярным произведением. Говорят, что элемент $x \in E$ ортогонален элементу $y \in E$ (и пишут $x \perp y$), если $(x, y) = 0$.*

Очевидно, что $x \perp y \Longleftrightarrow y \perp x$.

**Определение 1.5.** *Система ненулевых элементов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots,$ $\mathbf{e}_m$ пространства со скалярным произведением называется ортогональной, если*

$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = 0 \ \ (k, l \in \{1, \ldots, m\}; \ \ k \neq l). \tag{1.2}$$

Заменяя в этом определении условие (1.2) условием

$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = 0 \ \ (k, l = 0, 1, \ldots; \ \ k \neq l), \tag{1.3}$$

получают соответствующее определение *бесконечной ортогональной системы* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots$ .

**Теорема 1.6 (теорема Пифагора).** *Для ортогональной системы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ элементов пространства со скалярным*

[1] Иногда ещё считают, что $U$ полно в смысле метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

*произведением имеет место равенство*

$$\|\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_m\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{e}_m\|^2. \tag{1.4}$$

**Определение 1.7.** *Система $x_1, x_2, \ldots, x_m$ элементов линейного пространства $E$ называется линейно независимой, если полином $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ совпадает с нулевым элементом $\Theta$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$, т.е.*

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \Theta \iff \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0. \tag{1.5}$$

**Предложение 1.8.** *Если элементы $x_1, \ldots, x_m$ принадлежат ортогональной системе, то они линейно независимы.*

Действительно, в силу теоремы Пифагора и входящих в определения 1.2 и 1.3 условий 2)−3) получаем, что

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m\|^2 = |\lambda_1|^2 \|x_1\|^2 + \cdots + |\lambda_m|^2 \|x_m\|^2,$$

причем $\|x_1\| \neq 0, \ldots, \|x_m\| \neq 0$. Отсюда следует (1.5).

**Определение 1.9.** *Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — бесконечная система элементов пространства $E$ со скалярным произведением. Она называется линейно независимой, если при любом $n \in \mathbb{N}$ система $x_1, \ldots, x_n$ линейно независима. Здесь и всюду ниже $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.*

**Определение 1.10.** *Система $f_1, f_2, \ldots$ элементов пространства $E$ со скалярным произведением называется ортонормированной (также часто называется ортонормальной), если*

$$(f_k, f_l) = \delta_{k,l} \quad (k, l \in \mathbb{N}), \tag{1.6}$$

*где $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера, т.е.*

$$\delta_{k,l} := 0 \quad (k \neq l), \quad \delta_{l,l} = 1. \tag{1.7}$$

## § 2. **Процесс ортогонализации Сонина–Шмидта**

Н. Я. Сонин, а затем Э. Шмидт предложили метод ортогонализации линейно независимой системы функций, известный ныне под названием метода ортогонализации Шмидта. Настоящий параграф посвящен этому методу.

Рассмотрим линейно независимую последовательность $x_1, x_2, \dots$ (возможно, конечную) элементов пространства со скалярным произведением. Положим $e_1 := x_1$ и заметим, что $e_1 \neq \Theta$, так как последовательность $x_1, x_2, \dots$ линейно независима. Положим

$$e_2 := x_2 - \lambda_{2,1} e_1$$

и определим скаляр $\lambda_{2,1}$ из условия $(e_2, e_1) = 0$. Таким образом, имеем уравнение для определения $\lambda_{2,1}$:

$$0 = (e_2, e_1) = (x_2 - \lambda_{2,1} e_1, e_1) = (x_2, e_1) - \lambda_{2,1}(e_1, e_1),$$

откуда

$$\lambda_{2,1} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}.$$

Заметим, что $e_2 = x_2 - \lambda_{2,1} x_1 \neq \Theta$, так как последовательность $x_1, x_2, \dots$ линейно независима, а коэффициент при $x_2$ отличен от нуля (равен единице).

Применим метод математической индукции. Пусть уже построена ортогональная система $\{e_\nu\}_{\nu=1}^{k-1}$, где $e_\nu$ является линейной комбинацией элементов $x_1, \dots, x_\nu$ с единичным коэффициентом при $x_\nu$. Тогда будем искать $e_k$ в виде

$$e_k := x_k - \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu} e_\nu. \tag{2.1}$$

Под знаком суммы в правой части (2.1) $e_\nu$ является линейной комбинацией элементов $x_1, \dots, x_\nu$. Значит, эта сумма есть линейная комбинация элементов $x_1, \dots, x_{k-1}$. Но тогда $e_k$ есть линейная комбинация элементов $x_1, \dots, x_k$, у которой коэффициент при $x_k$ равен единице.

Числа $\lambda_{k,\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, k-1)$ удовлетворяют системе уравнений

$$(e_k, e_l) = 0 \qquad (l = 1, \ldots, k-1). \tag{2.2}$$

С учетом (2.1) $l$-е уравнение системы (2.2) преобразуется следующим образом:

$$0 = (e_k, e_l) = (x_k - \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu} e_\nu, e_l) =$$

$$= (x_k, e_l) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu}(e_\nu, e_l) = (x_k, e_l) - \lambda_{k,l}(e_l, e_l).$$

Таким образом,

$$(e_k, e_l) = 0 \ \ (l = 1, \ldots, k-1) \Longleftrightarrow \lambda_{k,l} = \frac{(x_k, e_l)}{(e_l, e_l)} \ \ (l = 1, \ldots, k-1).$$

Элемент $e_k$ с требуемыми свойствами построен.

Этот процесс завершится построением элемента $e_n$, если ортогонализуемая последовательность состоит из $n$ элементов. Если же она бесконечна, то и система $e_1, e_2, \ldots$ бесконечна.

Если каждый элемент $e_l$ разделить на его норму $\|e_l\| = \sqrt{(e_l, e_l)}$ (см. (1.1)), то получится ортонормированная система $f_1, f_2, \ldots$ :

$$f_l := [(e_l, e_l)]^{-\frac{1}{2}} e_l \qquad (l = 1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

Поскольку коэффициент при $x_l$ в разложении $e_l$ по системе $x_1, x_2, \ldots, x_l$ равен единице (см. (2.1), то у $f_l$ соответствующий коэффициент равен $[(e_l, e_l)]^{-\frac{1}{2}}$ и, таким образом, положителен.

Соотношение (2.1) можно переписать в виде

$$x_k = e_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu} e_\nu. \tag{2.4}$$

В силу (2.3)

$$e_l = [(e_l, e_l)]^{\frac{1}{2}} f_l \qquad (l = 1, 2, \ldots), \tag{2.5}$$

а потому из (2.4) получается разложение

$$x_k = [(e_k, e_k)]^{\frac{1}{2}} f_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu} [(e_\nu, e_\nu)]^{\frac{1}{2}} f_\nu. \tag{2.6}$$

**Замечание 2.1.** В силу (2.6) любая линейная комбинация

$$g = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{2.7}$$

представима в виде

$$g = \sum_{k=1}^{n} b_k f_k, \tag{2.8}$$

причем коэффициенты $b_k$ определяются однозначно, так как, умножая обе части (2.8) скалярно на $f_l$, с учетом ортонормированности системы $\{f_k\}$ получаем, что $(g, f_l) = b_l$ и, следовательно,

$$g = \sum_{k=1}^{n} (g, f_k) f_k. \tag{2.9}$$

Построенная ортонормированная система $f_1, f_2, \ldots$ обладает свойствами:

1) $(f_k, f_l) = \delta_{k,l}$ для всех $k$ и $l$;

2) при каждом $k$ элемент $f_k$ есть полином по системе $x_1, \ldots, x_k$ с положительным старшим (т. е. при $x_k$) коэффициентом.

## § 3. **Первый критерий ортогональности**

Ортогонализуя последовательность $x_1, x_2, \ldots,$ мы получили ортонормальную систему $f_1, f_2, \ldots,$ такую, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ элемент $f_n$ есть полином по системе $x_1, \ldots, x_n$ с положительным старшим коэффициентом (т. е. коэффициентом при $x_n$) и единичной нормой, при $n \geq 2$ ортогональный всем полиномам порядка не выше $n-1$. Следующая теорема показывает, что всякий полином, обладающий этими свойствами, совпадает с $f_n$.

**Теорема 3.1 (первый критерий ортогональности**[2]**).** *Для того чтобы (при $n \geq 2$) полином*

$$G_n = c_n x_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n,\nu} x_\nu \tag{3.1}$$

*совпадал с элементом $f_n$ ортонормированной системы $f_1, f_2, \ldots$, полученной при ортогонализации методом Сонина–Шмидта линейно независимой системы $x_1, x_2, \ldots$ элементов унитарного (либо евклидова) пространства $E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:* 1) $G_n \perp x_1, \ldots, x_{n-1}$ *(или, что то же самое, полином $G_n$ ортогонален всем полиномам порядка не выше $n-1$),* 2) $(G_n, G_n) = 1$ *и* 3) *в* (3.1) $c_n > 0$.

**Доказательство.** Если $G_n = f_n$, то $G_n$ удовлетворяет условиям 1)–3), ибо этим условиям удовлетворяет $f_n$. Таким образом, в части необходимости теорема 3.1 справедлива.

Предположим теперь, что элемент $G_n$ вида (3.1) удовлетворяет условиям 1)–3). Поскольку $G_n$ — полином порядка $n$, то в соответствии с (2.9) имеет место разложение

$$G_n = \sum_{\nu=1}^{n} (G_n, f_\nu) f_\nu. \tag{3.2}$$

По условию 1) $G_n \perp f_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$. Поэтому в правой части (3.2) $(G_n, f_\nu) = 0$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$. Но тогда

$$G_n = (G_n, f_n) f_n. \tag{3.3}$$

Из условия 2) и равенства (3.3) следует, что

$$1 = \|G_n\| = |(G_n, f_n)| \cdot \|f_n\| = |(G_n, f_n)|. \tag{3.4}$$

[2]Так назван частный случай этой теоремы в монографии [16].

Заменяя в (3.3) (вне скалярного произведения) $G_n$ правой частью (3.1), а $f_n$ — правой частью аналогичного разложения

$$f_n = k_n x_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{n,\nu} x_\nu,$$

получаем равенство

$$c_n x_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n,\nu} x_\nu = (G_n, f_n)(k_n x_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{n,\nu} x_\nu).$$

В силу линейной независимости системы $x_1, x_2, \ldots$ коэффициенты при $x_n$ в левой и правой частях этого равенства совпадают, т. е.

$$c_n = (G_n, f_n) k_n. \tag{3.5}$$

В §2 было замечено, что (в силу (2.1) и (2.3))

$$k_n > 0. \tag{3.6}$$

Пользуясь (3.5), (3.6) и условием 3), заключаем, что $(G_n, f_n) > 0$. Но тогда из (3.4) следует, что $(G_n, f_n) = |(G_n, f_n)| = 1$. Таким образом, равенство (3.3) принимает вид $G_n = f_n$. Следовательно, теорема 3.1 верна и в части достаточности.

Простым следствием теоремы 3.1 является

**Теорема 3.2.** *Если последовательность $g_1, g_2, \ldots$ элементов (возможно, конечная) унитарного (либо евклидова) пространства ортонормированна и*

$$g_k = c_k x_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} c_{k,\nu} x_\nu, \quad c_k > 0 \quad (\forall k) \tag{3.7}$$

(*при* $k = 1$ *сумма* $\sum\limits_{\nu=1}^{k-1}$ *отсутствует*), *то*

$$g_k = f_k \quad (\forall k). \tag{3.8}$$

## § 4. **Детерминантные представления ортонормальных полиномов в пространстве со скалярным произведением**

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — линейно независимая система элементов унитарного (либо евклидова) пространства. Положим

$$u_1 := x_1, \tag{4.1}$$

$$u_k := \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \ldots & (x_k, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_k, x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_1, x_{k-1}) & (x_2, x_{k-1}) & \ldots & (x_k, x_{k-1}) \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \end{vmatrix} \quad (k \geq 2). \tag{4.2}$$

Разлагая определитель (4.2) по элементам последней строки, замечаем, что

$$u_k = D_{k-1} x_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu} x_\nu, \tag{4.3}$$

где

$$D_1 := (x_1, x_1), \tag{4.4}$$

$$D_{k-1} := \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \ldots & (x_{k-1}, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_{k-1}, x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ (x_1, x_{k-1}) & (x_2, x_{k-1}) & \ldots & (x_{k-1}, x_{k-1}) \end{vmatrix} \quad (k \geq 2). \tag{4.5}$$

Определитель (4.5) называется определителем Грама.

**Лемма 4.1.** *Числа $D_k$ $(k \in \mathbb{N})$ положительны, т. е.*

$$D_k > 0 \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{4.6}$$

**Доказательство.** Так как система $x_1, x_2, \ldots$ линейно независима, то $x_1 \neq \Theta$, а потому в силу (4.4) $D_1 > 0$. Предположим, что при некотором $k \geq 2$ выполняется неравенство

$D_{k-1} > 0$. Покажем, что тогда при том же $k$ выполнено и неравенство (4.6). Для этого сперва убедимся в том, что

$$(u_k, x_1) = (u_k, x_2) = \cdots = (u_k, x_{k-1}) = 0. \tag{4.7}$$

В самом деле, разлагая определитель (4.2) по элементам последней строки, имеем

$$u_k = A_{k,1}x_1 + A_{k,2}x_2 + \cdots + A_{k,k}x_k. \tag{4.8}$$

Умножив скалярно обе части (4.8) на $x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k-1)$, получим разложение

$$(u_k, x_\nu) = A_{k,1}(x_1, x_\nu) + A_{k,1}(x_2, x_\nu) + \cdots + A_{k,k}(x_k, x_\nu)$$

по элементам последней строки определителя $k$-го порядка, у которого все предыдущие строки совпадают с соответствующими строками определителя (4.2), а $k$-я строка есть

$$(x_1, x_\nu) \;\; (x_2, x_\nu) \;\; \ldots \;\; (x_k, x_\nu).$$

Так как $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$, то этот определитель имеет две одинаковые строки, а потому равен нулю. Равенства (4.7) доказаны.

При $\nu = k$ это рассуждение дает

$$(u_k, x_k) = D_k. \tag{4.9}$$

Так как $D_{k-1} > 0$, то в силу линейной независимости системы $x_1, x_2, \ldots$ из (4.3) следует, что $u_k \neq \Theta$, т. е. $(u_k, u_k) > 0$. Поэтому с учетом (4.7) и (4.3) получаем

$$0 < (u_k, u_k) = (u_k, D_{k-1}x_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu} x_\nu) =$$

$$= (u_k, D_{k-1}x_k) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \overline{\lambda_{k,\nu}}(u_k, x_\nu) = \overline{D_{k-1}}(u_k, x_k).$$

Отсюда в силу (4.9) и положительности $D_{k-1}$ получаем, что $D_{k-1}D_k > 0$ и, следовательно, имеет место (4.6). Лемма 3.1 доказана.

В дополнение к (4.4) и (4.5) положим

$$D_0 := 1. \tag{4.10}$$

В принятых обозначениях справедлива следующая

**Теорема 4.2.** *Для полиномов ортонормальной системы* $f_1, f_2, \ldots$ (*см.* (2.3)) *имеют место детерминантные представления*

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{D_{k-1}D_k}} u_k \ \ (k \in \mathbb{N}), \tag{4.11}$$

*где* $u_k$ *определяются формулами* (4.1) *и* (4.2).

**Доказательство.** При $k = 1$ формула (4.11) очевидна.

Пусть $k \geq 2$. При доказательстве леммы 4.1 было установлено, что $u_k \neq \Theta$, $u_k \perp x_1, \ldots, x_{k-1}$ и $(u_k, u_k) = D_{k-1}(u_k, x_k) = D_{k-1}D_k$. Поэтому норма полинома $(D_{k-1}D_k)^{-\frac{1}{2}} u_k$ равна единице. Его старший коэффициент положителен, так как в (4.8) $A_{k,k} = D_{k-1} > 0$. В силу первого критерия ортогональности (см. теорему 3.1) этот полином совпадает с $f_k$.

## § 5. **Ряд Фурье в пространстве со скалярным произведением**

Ниже несколько раз будет использована теорема Пифагора (см. теорему 1.6). Наряду с ней нам понадобится

**Теорема 5.1.** *Для любых элементов* $x, y$ *унитарного* (*или евклидова*) *пространства* $E$ *имеет место неравенство Коши*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \tag{5.1}$$

**Доказательство.** Если $x$ или $y = \Theta$, то $(x, y) = 0$ и, следовательно, (5.1) выполняется. Пусть $x$ и $y \neq \Theta$. Положим

$x_0 := \frac{x}{\|x\|}$, $y_0 := \frac{y}{\|y\|}$. Тогда будут выполняться равенства

$$\|x_0\| = \|y_0\| = 1; \tag{5.2}$$

$$x = \|x\|x_0, \;\; y = \|y\|y_0; \tag{5.3}$$

$$(y_0 - (y_0, x_0)x_0, x_0) = (y_0, x_0) - (y_0, x_0)\|x_0\|^2 = 0. \tag{5.4}$$

В силу (5.4) и (5.2)

$$0 \leq (y_0 - (y_0, x_0)x_0, y_0 - (y_0, x_0)x_0) = (y_0 - (y_0, x_0)x_0, y_0) =$$

$$= (y_0, y_0) - (y_0, x_0)(x_0, y_0) = 1 - |(x_0, y_0)|^2,$$

откуда получаем, что $|(x_0, y_0)| \leq 1$. А тогда в силу (5.3)

$$|(x, y)| = |(\|x\|x_0, \|y\|y_0)| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot |(x_0, y_0)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

**Определение 5.2.** *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система, полученная при ортогонализации методом Сонина–Шмидта линейно независимой системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов унитарного (либо евклидова) пространства $E$. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, f_k) f_k \tag{5.5}$$

*будем называть рядом Фурье элемента $x \in E$ по системе $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$; при этом частную сумму*

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} (x, f_k) f_k \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{5.6}$$

*этого ряда будем называть $n$-й суммой Фурье элемента $x$ по системе $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$.*

Имеет место

**Теорема 5.3.** *Разность $x - s_n(x)$ ортогональна любому полиному*

$$g_n = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n. \tag{5.7}$$

**Доказательство.** В силу замечания 2.1 элемент (5.7) однозначно представим в виде (см. (2.8))

$$g_n = b_1 f_1 + \cdots + b_n f_n. \tag{5.8}$$

Поэтому для доказательства теоремы 5.3 достаточно установить, что

$$x - s_n(x) \perp f_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{5.9}$$

Но (5.9) следует из того, что при $\nu = 1, \ldots, n$ в силу (5.6)

$$(x - s_n(x), f_\nu) = (x, f_\nu) - (s_n(x), f_\nu) =$$

$$= (x, f_\nu) - \Big( \sum_{k=1}^{n} (x, f_k) f_k, f_\nu \Big) =$$

$$= (x, f_\nu) - \sum_{k=1}^{n} (x, f_k) \delta_{k,\nu} = (x, f_\nu) - (x, f_\nu) = 0.$$

С помощью теоремы 5.3 легко доказывается

**Теорема 5.4.** *Среди линейных комбинаций* (5.7) (*при фиксированном* $n$ *и переменных* $c_1, \ldots, c_n$) *сумма Фурье* (5.6) *наименее уклоняется от* $x \in E$ *по норме пространства* $E$, *т. е.*

$$\|x - g_n\| \geq \|x - s_n(x)\|, \tag{5.10}$$

*причем знак равенства в* (5.10) *достигается тогда и только тогда, когда* $g_n = s_n(x)$.

**Доказательство.** Действительно, в силу теоремы 5.3 $x - s_n(x) \perp s_n(x) - g_n$. Поэтому, применяя теорему Пифагора, имеем

$$\|x - g_n\|^2 = \|[x - s_n(x)] + [s_n(x) - g_n]\|^2 =$$
$$= \|x - s_n(x)\|^2 + \|s_n(x) - g_n\|^2 \geq \|x - s_n(x)\|^2,$$

причем

$$\|x - g_n\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 \iff g_n = s_n(x).$$

**Определение 5.5.** *Система* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *называется замкнутой в* $E$, *если любой элемент* $x \in E$ *можно сколь угодно точно приблизить полиномами по этой системе.*

В силу замечания 2.1, очевидно, ортогонализуемая методом Сонина–Шмидта система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и соответствующая ей ортонормальная система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ одновременно замкнуты или не замкнуты в $E$. Система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ может быть не замкнутой в $E$, но при этом некоторые элементы все же могут быть сколь угодно точно приближены полиномами по этой системе. В таком случае говорят, что для этих элементов выполняется условие замкнутости.

**Теорема 5.6.** *Если хотя бы для одного из элементов* $x$ *и* $y \in E$ *выполняется условие замкнутости, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x, f_k)\overline{(y, f_k)} \tag{5.11}$$

*сходится, причем его сумма равна* $(x, y)$.

**Доказательство.** По теореме 5.3 $\quad x - s_n(x) \perp s_n(y)$. Поэтому

$$(x - s_n(x), y - s_n(y)) = (x - s_n(x), y) - (x - s_n(x), s_n(y)) =$$

$$= (x - s_n(x), y) = (x, y) - (s_n(x), y) =$$

$$= (x, y) - \Big(\sum_{k=1}^{n}(x, f_k) f_k, y\Big) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n}(x, f_k)\overline{(y, f_k)}. \tag{5.12}$$

Следовательно, по неравенству Коши (5.1)

$$|(x, y) - \sum_{k=1}^{n}(x, f_k)\overline{(y, f_k)}| = |(x - s_n(x), y - s_n(y))| \leq$$

$$\leq \|x - s_n(x)\| \cdot \|y - s_n(y)\|. \tag{5.13}$$

Пусть условие замкнутости выполнено для элемента $y$. Тогда по теореме 5.4 при $n \to \infty$ в (5.13) $\|y - s_n(y)\| \to 0$. При этом в силу (5.10) $\|x - s_n(x)\| \le \|x\|$. Поэтому из (5.13) следует, что ряд (5.11) сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x, f_k)\overline{(y, f_k)} = (x, y). \tag{5.14}$$

**Следствие 5.7.** *Если для элемента $x \in E$ выполнено условие замкнутости, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, f_k)|^2 = \|x\|^2. \tag{5.15}$$

Действительно, достаточно в теореме 5.6 взять $y = x$.

Формула (5.15) называется *равенством Парсеваля,* а формула (5.14) — *обобщенным равенством Парсеваля.*

Для $y = x$ (5.12) принимает вид

$$\|x - s_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, f_k)|^2. \tag{5.16}$$

Из (5.16) в силу неотрицательности левой части вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, f_k)|^2 \le \|x\|^2.$$

Устремляя здесь $n$ к бесконечности, получаем *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, f_k)|^2 \le \|x\|^2. \tag{5.17}$$

Из (5.16) и теоремы 5.4 следует

**Теорема 5.8.** *Равенство* (5.15) *имеет место тогда и только тогда, когда для $x$ выполняется условие замкнутости.*

Таким образом, для замкнутости системы $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in E$ выполнялось равенство Парсеваля (5.15).

**Определение 5.9.** *Система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется полной в $E$, если в $E$ не существует ненулевого элемента $g$, ортогонального всем $f_k$.*

**Теорема 5.10.** *Из замкнутости в унитарном (либо евклидовом) пространстве $E$ ортонормальной системы $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ следует ее полнота в $E$.*

**Доказательство.** В самом деле, если элемент $g$ ортогонален всем $f_k$, то в правой части равенства Парсеваля

$$\|g\|^2 = |(g, f_1)|^2 + |(g, f_2)|^2 + \cdots$$

все слагаемые равны нулю, а потому $g = \Theta$.

**Теорема 5.11.** *Из полноты ортонормальной системы $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ в полном в смысле метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$ унитарном (либо евклидовом) пространстве $E$ следует ее замкнутость в $E$.*

**Доказательство.** Пусть $x \in E$. Тогда в силу (5.6) и теоремы Пифагора

$$\|s_{n+m}(x) - s_n(x)\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+m} (x, f_k) f_k \Big\|^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+m} \|(x, f_k) f_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+m} |(x, f_k)|^2.$$

Из этого равенства и неравенства Бесселя (5.17) следует фундаментальность последовательности $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. В силу полноты пространства $E$ эта последовательность сходится к некоторому элементу $g \in E$. При этом $x - s_n(x) \to x - g$.

Покажем, что при всех $l \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $(g, f_l) = (x, f_l)$. В самом деле, при $n \geq l$

$$(s_n(x), f_l) = \Big( \sum_{k=1}^{n} (x, f_k) f_k, f_l \Big) = \sum_{k=1}^{n} (x, f_k) \delta_{k,l} = (x, f_l).$$

Поэтому $(g, f_l)-(x, f_l) = (g-(s_n(x), f_l)$, так что по неравенству Коши

$$|(g, f_l) - (x, f_l)| \le \|g - s_n(x)\| \cdot \|f_l\| = \|g - (s_n(x)\|.$$

Из этого неравенства в силу сходимости $s_n(x)$ к $g$ следует, что $(g, f_l) = (x, f_l)$.

Из доказанного равенства видно, что $(g - x, f_l) = 0$ при всех $l \in \mathbb{N}$. Но $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $E$. Следовательно, $g = x$. Итак, $s_n(x) \to x$, т. е. для элемента $x$ выполняется условие замкнутости. В силу произвольности $x$ система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $E$. Теорема 5.11 доказана.

Заметим, что для полинома (5.7) условие замкнутости, очевидно, выполняется. Поэтому для него справедливо равенство Парсеваля, причем ряд обрывается на $n$-м элементе:

$$\|g_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(g_n, f_k)|^2. \tag{5.18}$$

С помощью (5.18) может быть доказана

**Теорема 5.12.** *Среди полиномов*

$$\widetilde{g_n} := x_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k \tag{5.19}$$

*(при фиксированном $n \ge 2$ и переменных $c_1, \dots, c_{n-1}$) минимальную норму в $E$ имеет полином $\widetilde{f_n} := (k_n)^{-1} f_n$, где $k_n$ — старший коэффициент полинома $f_n$ (т.е. коэффициент при $x_n$ в разложении $f_n$ по системе $x_1, \dots, x_n$; в силу (4.11) и (4.3) $k_n = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}$, а $D_n$ определяется формулами (4.4), (4.5) и (4.10)).*

**Доказательство.** Так как $\widetilde{g_n}$ и $\widetilde{f_n}$ имеют единичные старшие коэффициенты, то $\widetilde{g_n} - \widetilde{f_n}$ есть полином по системе

$x_1, \dots, x_{n-1}$, а в силу замечания 2.1 — и по системе $f_1, \dots, f_{n-1}$. Поэтому с учетом равенства $\widetilde{f_n} := (k_n)^{-1} f_n$, имеем

$$\widetilde{g_n} = \frac{1}{k_n} f_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu f_\nu. \tag{5.20}$$

Применяя (5.18), из (5.20) получаем, что

$$\|\widetilde{g_n}\|^2 = \frac{1}{k_n^2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} |b_\nu|^2, \tag{5.21}$$

откуда

$$\|\widetilde{g_n}\|^2 \geq \frac{1}{k_n^2} = \|\widetilde{f_n}\|^2. \tag{5.22}$$

Знак равенства в неравенстве (5.22) достигается тогда и только тогда, когда $b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$, т. е. (в силу (5.20)) тогда и только тогда, когда $\widetilde{g_n} = \widetilde{f_n}$.

## § 6. **Определения алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов**

В этом и последующих параграфах будут рассматриваться алгебраические и тригонометрические ортогональные полиномы. Роль последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет играть одна из последовательностей:

$$1,\ z,\ z^2, \dots, \tag{6.1}$$

$$1,\ z,\ z^{-1},\ z^2,\ z^{-2}, \dots, \tag{6.2}$$

$$1,\ \cos\tau,\ \sin\tau,\ \cos 2\tau,\ \sin 2\tau, \dots . \tag{6.3}$$

В (6.1) и (6.2) $z$ — комплексное число. При действительных $z = t$ вместо (6.1) будем писать $1,\ t,\ t^2, \dots$ .

Сначала рассмотрим алгебраические многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ действительной прямой. Пусть

$\alpha(t)$ — заданная на $[-1,1]$ неубывающая и ограниченная функция. Будем считать, что $\alpha(t)$ задана в $\mathbb{R} =: (-\infty, \infty)$, для чего положим $\alpha(t) = \alpha(-1)$ при $t < -1$ и $\alpha(t) = \alpha(1)$ при $t > 1$.

Точку $t_0$ назовем *точкой роста функции* $\alpha(t)$, если в любой окрестности этой точки $\alpha(t)$ не является константой. Таким образом, если $t_1 < t_0$ и $t_2 > t_0$, то

$$\alpha(t_2) - \alpha(t_1) > 0. \tag{6.4}$$

Ясно, что точка $t_0 \notin [-1,1]$ не является точкой роста для $\alpha(t)$. Будем считать, что $\alpha(t)$ имеет бесконечное множество точек роста. Рассмотрим величину

$$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)d\alpha(t), \tag{6.5}$$

где $f$ и $g$ — алгебраические многочлены. Интеграл (6.5) является интегралом Римана–Стилтьеса. В качестве $E$ рассмотрим множество всех алгебраических многочленов с действительными коэффициентами. Покажем, что в таком $E$ величина (6.5) является скалярным произведением. Из перечисленных в определении 1.2 свойств скалярного произведения в проверке, очевидно, нуждается лишь первое из них:

$$(f,f) = 0 \Longleftrightarrow f(t) \equiv 0 \tag{6.6}$$

(заметим, что в рассматриваемой ситуации вместо $f = \Theta$ можно писать $f(t) \equiv 0$). Докажем (6.6). Если $f(t) \equiv 0$, то, очевидно, $(f,f) = 0$. Остается показать, что если алгебраический многочлен $f(t) \not\equiv 0$, то $(f,f) > 0$. Пусть $\deg f = n > 0$ (т. е. степень $f$ равна $n > 0$). Тогда $f(t) = 0$ не более чем в $n$ точках отрезка $[-1,1]$. Так как $\alpha(t)$ имеет бесконечное число точек роста на $[-1,1]$, то найдется точка роста $t_0 \in (-1,1)$, не являющаяся нулем для $f(t)$. Поэтому для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$m(t_0,\varepsilon) := \min_{t_0-\varepsilon \le t \le t_0+\varepsilon} f^2(t) > 0. \tag{6.7}$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [-1, 1]$ и

$$(f, f) = \int\limits_{-1}^{1} f^2((t) d\alpha(t) \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f^2(t) d\alpha(t) \geq m(t_0, \varepsilon)[\alpha(t_0 + \varepsilon) - \alpha(t_0 - \varepsilon)].$$

Отсюда в силу (6.4) и (6.7) следует, что $(f, f) > 0$. Свойство (6.6) доказано.

Итак, величина (6.5) является скалярным произведением в линейном вещественном пространстве $E$, состоящем из всех алгебраических многочленов с вещественными коэффициентами. Разумеется, последовательность $1, t, t^2, \ldots$ принадлежит этому $E$. Она линейно независима в $E$, так как для любого алгебраического многочлена $f(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ (где $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \ldots\}$) из $E$ выполнено условие (6.6) и, таким образом,

$$(f, f) = 0 \Longleftrightarrow c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Ортогонализуя методом Сонина–Шмидта последовательность $1,\ t,\ t^2, \ldots$ относительно скалярного произведения (6.5), получаем систему алгебраических многочленов $\{p_{\alpha,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$, обладающую свойствами: 1) $\deg p_{\alpha,n} = n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$; 2) при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ старший коэффициент $k_{\alpha,n}$ многочлена $p_{\alpha,n}$ положителен и 3) выполнено условие ортонормальности

$$\int\limits_{-1}^{1} p_{\alpha,m}(t) p_{\alpha,n}(t) d\alpha(t) = \delta_{m,n} \quad (m, n \in \mathbb{Z}_+). \tag{6.8}$$

Вместо случая отрезка $[-1, 1]$ можно рассмотреть случай отрезка $[a, b]$, где $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Случай конечного $[a, b]$ сводится к рассмотренному случаю отрезка $[-1, 1]$ линейной заменой переменной $t$. Для возможности ортогонализации последовательности $1,\ t,\ t^2,\ \ldots$ относительно скалярного произведения

$$(f, g) := \int\limits_a^b f(t)g(t)d\alpha(t) \tag{6.9}$$

в случае бесконечного отрезка $[a, b]$ надо от $\alpha(t)$ дополнительно потребовать, чтобы существовали конечные моменты

$$\int\limits_a^b t^n d\alpha(t) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{6.10}$$

Если на $[0, 2\pi]$ задана неубывающая ограниченная функция $\sigma(\tau)$ с бесконечным множеством точек роста, то можно ввести в рассмотрение скалярное произведение

$$(f, g) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\tau})\overline{g(e^{i\tau})}d\sigma(\tau) \tag{6.11}$$

для любых двух алгебраических многочленов $f(z)$ и $g(z)$ с комплексными коэффициентами. С помощью соглашения

$$\sigma(\tau + 2\pi) - \sigma(\tau) = \sigma(2\pi) - \sigma(0) \tag{6.12}$$

распространим определение $\sigma(\tau)$ с отрезка $[0, 2\pi]$ на все значения $\tau \in \mathbb{R}$ (сначала на значения $\tau \in (2\pi, 4\pi]$ и $\tau \in [-2\pi, 0)$, затем на значения $\tau \in (4\pi, 6\pi]$ и $\tau \in [-4\pi, -2\pi)$ и т. д.). Полученная функция $\sigma(\tau)$ обладает легко проверяемым свойством (оно доказывается так же, как равенство интегралов от одной и той же $2\pi$-периодической функции по различным промежуткам длины $2\pi$)

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_a^{a+2\pi} f(e^{i\tau})\overline{g(e^{i\tau})}d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\tau})\overline{g(e^{i\tau})}d\sigma(\tau),$$

т. е. интегрировать в (6.11) можно по любому отрезку длины $2\pi$.

В качестве $E$ рассмотрим унитарное пространство алгебраических многочленов (с комплексными коэффициентами) со скалярным произведением (6.11). Этому $E$ принадлежит последовательность (6.1). Она линейно независима в $E$, так как в силу бесконечности множества точек роста у $\sigma(\tau)$ выполняется условие

$$(f, f) = 0 \Longleftrightarrow f(z) \equiv 0$$

для любого алгебраического многочлена $f$. Ортогонализуя методом Сонина–Шмидта относительно скалярного произведения (6.11) последовательность (6.1), получаем последовательность $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ алгебраических многочленов со свойствами: 1) $\deg \varphi_{\sigma,n} = n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$; 2) $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ старший коэффициент $\kappa_{\sigma,n}$ многочлена $\varphi_{\sigma,n}$ положителен и 3) выполняется условие ортонормальности

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_{\sigma,m}(e^{i\tau}) \overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} d\sigma(\tau) = \delta_{m,n} \qquad (m, n \in \mathbb{Z}_+). \qquad (6.13)$$

Так как в (6.13) значения многочленов $\varphi_{\sigma,m}$ и $\varphi_{\sigma,n}$ берутся в точках окружности $\Gamma_1 := \{z : |z| = 1\}$, то многочлены $\varphi_{\sigma,n}$ называются *многочленами, ортонормированными* (часто — *ортогональными*) на (единичной) окружности (относительно скалярного произведения (6.11)).

Если вместо последовательности (6.1) ортогонализовать методом Сонина–Шмидта последовательность (6.2) относительно того же скалярного произведения (6.11) (в унитарном пространстве $E$, состоящем из всевозможных полиномов по системе (6.2)), то получится последовательность $\{R_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ рациональных функций со свойствами: 1) $R_{\sigma,0}(z) = \mathrm{const} > 0$; 2) при любом $n \in \mathbb{N}$ функция $R_{\sigma,2n-1}(z)$ есть линейная комбинация степеней $1, z, z^{-1}, \dots, z^{n-1}, z^{1-n}, z^n$, с положительным старшим коэффициентом (т. е. коэффициентом при $z^n$), а функция $R_{\sigma,2n}(z)$ есть линейная комбинация степеней $1, z, z^{-1}, \dots, z^n, z^{-n}$ с положительным старшим коэффициентом (т. е. коэффициентом при $z^{-n}$); 3) выполняется условие ортонормальности

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_{\sigma,m}(e^{i\tau})\overline{R_{\sigma,n}(e^{i\tau})}d\sigma(\tau) = \delta_{m,m} \qquad (m, n \in \mathbb{Z}_+). \quad (6.14)$$

Функции $R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})$ и $R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$, очевидно, являются тригонометрическими полиномами порядка $n$ с комплексными коэффициентами.

Если ортогонализовать методом Сонина–Шмидта относительно скалярного произведения

$$(f, g) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)g(\tau)d\sigma(\tau) \quad (6.15)$$

последовательность (6.3), то получим последовательность тригонометрических полиномов $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ со свойствами: 1) $T_{\sigma,0} = \mathrm{const} > 0$; 2) при $n \in \mathbb{N}$ полином $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ есть линейная комбинация гармоник $1, \cos\tau, \sin\tau, \dots, \cos(n-1)\tau, \sin(n-1)\tau, \cos n\tau$ с положительным старшим коэффициентом (т. е. с коэффициентом при $\cos n\tau$), а полином $T_{\sigma,2n}(\tau)$ есть линейная комбинация гармоник $1, \cos\tau, \sin\tau, \dots, \cos n\tau, \sin n\tau$ с положительным старшим коэффициентом (т. е. с коэффициентом при $\sin n\tau$); 3) выполнено условие ортонормальности

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} T_{\sigma,m}(\tau)T_{\sigma,n}(\tau)d\sigma(\tau) = \delta_{m,n} \qquad (m, n \in \mathbb{Z}_+). \quad (6.16)$$

При выполнении условия (6.12) в формулах (6.13), (6.14) и (6.16) промежуток интегрирования $[0, 2\pi]$ можно заменить любым отрезком длины $2\pi$.

В случае, когда $\alpha(t)$ абсолютно непрерывна, в (6.8) вместо $d\alpha(t)$ можно писать $\alpha'(t)dt$. Из курса ТФДП известно, что производная неубывающей ограниченной на конечном отрезке функции суммируема (по Лебегу) на нем. Так как $\alpha(t)$ не убывает, то $\alpha'(t) \geq 0$ (там, где существует, т. е. почти всюду). В силу абсолютной непрерывности $\alpha(t)$ и бесконечности ее множества точек роста производная этой функции не эквивалентна нулю (поскольку абсолютно непрерывная функция с эквивалентной нулю производной является константой и не имеет точек роста). Таким образом, $\alpha'(t)$ можно принять за вес $p(t)$ (весом на $[a, b]$ называют неотрицательную, суммируемую функцию, не эквивалентную нулю на $[a, b]$; неэквивалентность нулю на $[a, b]$ неотрицательной измеримой функции равносильна положительности ее интеграла по $[a, b]$). В этом случае вместо $p_{\alpha,n}(t)$ будем писать $p_n(t)$ и говорить, что система $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормальна на $[-1, 1]$ с весом $p(t)$.

Аналогично в случае, когда $\sigma(\tau)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, в формулах (6.13), (6.14) и (6.16) вместо $d\sigma(\tau)$ можно писать $\sigma'(\tau)d\tau$ и рассматривать вес $\varphi(\tau) := \sigma'(\tau)$. Соответствующие ортонормированные последовательности полиномов называются ортонормированными (или ортонормальными) с весом $\varphi(\tau)$.

Иногда вместо ортогональности относительно скалярного произведения (6.5) говорят об ортогональности по мере (или относительно меры) $d\alpha(t)$. Основанием для этого служит тот факт, что $\alpha(t)$ порождает меру Стилтьеса.

Аналогично в случаях (6.13), (6.14) и (6.16) говорят об ортогональности по мере $d\sigma(\tau)$.

Для рассмотренных в этом параграфе систем ортогональных полиномов верны все факты, установленные в предыдущих параграфах для ортогональных последовательностей в пространствах со скалярным произведением.

Глава 2

# МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА ОКРУЖНОСТИ

## § 7. Рекуррентные формулы, круговые параметры

Пусть

$$g_m(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_m z^m \tag{7.1}$$

— алгебраический многочлен степени $m \in \mathbb{Z}_+$ с комплексными коэффициентами. Тогда через $g_m^*(z)$ принято обозначать многочлен

$$g_m^*(z) := z^m \overline{g_m(1/\overline{z})} = \overline{c_m} + \overline{c_{m-1}} z + \cdots + \overline{c_0} z^m. \tag{7.2}$$

В теории многочленов, ортогональных на окружности, важную роль играют многочлены

$$\varphi_{\sigma,n}^*(z) := z^n \overline{\varphi_{\sigma,n}(1/\overline{z})} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{7.3}$$

При $z = e^{i\tau}$ формула (7.3) принимает вид

$$\varphi_{\sigma,n}^*(e^{i\tau}) = e^{in\tau} \overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+,\ \tau \in \mathbb{R}). \tag{7.4}$$

**Теорема 7.1.** *Имеют место рекуррентные формулы*

$$\kappa_{\sigma,n}\, z\, \varphi_{\sigma,n}(z) = \kappa_{\sigma,n+1}\, \varphi_{\sigma,n+1}(z) - \varphi_{\sigma,n+1}(0)\, \varphi_{\sigma,n+1}^*(z), \tag{7.5}$$

$$\kappa_{\sigma,n}\, \varphi_{\sigma,n}^*(z) = \kappa_{\sigma,n+1}\, \varphi_{\sigma,n+1}^*(z) - \overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}\, \varphi_{\sigma,n+1}(z), \tag{7.6}$$

*выражающие предыдущие многочлены через последующие, и рекуррентные формулы*

$$\kappa_{\sigma,n}\, \varphi_{\sigma,n+1}(z) = \kappa_{\sigma,n+1}\, z\, \varphi_{\sigma,n}(z) + \varphi_{\sigma,n+1}(0)\, \varphi_{\sigma,n}^*(z), \tag{7.7}$$

$$\kappa_{\sigma,n}\, \varphi_{\sigma,n+1}^*(z) = \kappa_{\sigma,n+1}\, \varphi_{\sigma,n}^*(z) + \overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}\, z\, \varphi_{\sigma,n}(z), \tag{7.8}$$

*выражающие последующие многочлены через предыдущие.*

**Доказательство.** Сначала докажем формулу (7.5). Так как $\kappa_{\sigma,n}e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})$ — линейная комбинация функций $1, e^{-i\tau},\ldots,e^{-in\tau}$, а $z^\nu$ — линейная комбинация многочленов $\varphi_{\sigma,0}(z),\ldots,\varphi_{\sigma,\nu}(z)$, то

$$\kappa_{\sigma,n}e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau}) = \overline{\sum_{\nu=0}^{n}\overline{c_{n,\nu}}e^{i\nu\tau}} =$$

$$= \overline{\sum_{\nu=0}^{n} d_{n,\nu}\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})} = \sum_{\nu=0}^{n}\overline{d_{n,\nu}}\;\overline{\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})}. \qquad (7.9)$$

Умножив равенства (7.9) на $(2\pi)^{-1}\varphi_l(e^{i\tau})d\sigma(\tau)$ и проинтегрировав затем по отрезку $[0,2\pi]$, получим

$$I_{n,l} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa_{\sigma,n}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})[e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,l}(e^{i\tau})]\,d\sigma(\tau) =$$

$$= \overline{d_{n,l}} \qquad (l = 0,1,\ldots,n). \qquad (7.10)$$

Выражение $e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,l}(e^{i\tau})$ в (7.10) является линейной комбинацией гармоник $1, e^{-i\tau},\ldots,e^{-in\tau}$ с коэффициентом при $e^{-in\tau}$, равным $\varphi_l(0)$. Поэтому в силу ортогональности по мере $d\sigma(\tau)$ многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$ многочленам меньшей степени из (7.10) следует, что

$$\overline{d_{n,l}} = I_{n,l} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa_{\sigma,n}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})\varphi_{\sigma,l}(0)e^{-in\tau}d\sigma(\tau) =$$

$$= \varphi_{\sigma,l}(0)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 d\sigma(\tau) =$$

$$= \varphi_{\sigma,l}(0) \qquad (l = 0,1,\ldots,n). \qquad (7.11)$$

Пользуясь (7.9) и (7.11), получаем, что

$$\varkappa_{\sigma,n+1}e^{-i(n+1)\tau}\varphi_{\sigma,n+1}(e^{i\tau}) - \varkappa_{\sigma,n}e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n+1} \overline{d_{n+1,\nu}}\;\overline{\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})} - \sum_{\nu=0}^{n} \overline{d_{n,\nu}}\;\overline{\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})} =$$

$$= \varphi_{\sigma,n+1}(0)\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(e^{i\tau})}. \tag{7.12}$$

Умножая все части (7.12) на $e^{i(n+1)\tau}$ и учитывая (7.4), убеждаемся в справедливости равенства

$$\varkappa_{\sigma,n+1}\varphi_{\sigma,n+1}(z) - \varkappa_{\sigma,n}z\varphi_{\sigma,n}(z) = \varphi_{\sigma,n+1}(0)\varphi^*_{\sigma,n+1}(z) \tag{7.13}$$

при $z = e^{i\tau}$ ($\tau \in \mathbb{R}$), а значит, и для всех $z \in \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Формула (7.13) равносильна формуле (7.5).

В равенстве (7.13) положим $z = e^{i\tau}$ и перейдем к комплексно-сопряженным величинам. Тогда, приняв во внимание (7.4), убедимся в справедливости (7.6).

Из (7.6) находим, что

$$\varphi^*_{\sigma,n+1}(z) = \frac{\varkappa_{\sigma,n}}{\varkappa_{\sigma,n+1}}\varphi^*_{\sigma,n}(z) + \frac{\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}}{\varkappa_{\sigma,n+1}}\varphi_{\sigma,n+1}(z). \tag{7.14}$$

Заменяя в (7.5) многочлен $\varphi^*_{\sigma,n+1}(z)$ его выражением по формуле (7.14), получаем

$$\varkappa_{\sigma,n}z\varphi_{\sigma,n}(z) = \varkappa_{\sigma,n+1}\varphi_{\sigma,n+1}(z) -$$

$$-\varphi_{\sigma,n+1}(0)\left[\frac{\varkappa_{\sigma,n}}{\varkappa_{\sigma,n+1}}\varphi^*_{\sigma,n}(z) + \frac{\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}}{\varkappa_{\sigma,n+1}}\varphi_{\sigma,n+1}(z)\right] =$$

$$= \left\{\varkappa_{\sigma,n+1} - \frac{|\varphi_{\sigma,n+1}(0)|^2}{\varkappa_{\sigma,n+1}}\right\}\varphi_{\sigma,n+1}(z) - \varphi_{\sigma,n+1}(0)\frac{\varkappa_{\sigma,n}}{\varkappa_{\sigma,n+1}}\varphi^*_{\sigma,n}(z) =$$

$$= \frac{\varkappa^2_{\sigma,n+1} - |\varphi_{\sigma,n+1}(0)|^2}{\varkappa_{\sigma,n+1}}\varphi_{\sigma,n+1}(z) - \varphi_{\sigma,n+1}(0)\frac{\varkappa_{\sigma,n}}{\varkappa_{\sigma,n+1}}\varphi^*_{\sigma,n}(z). \tag{7.15}$$

При $z = 0$ (7.6) превращается в равенство

$$\kappa_{\sigma,n}^2 = \kappa_{\sigma,n+1}^2 - |\varphi_{\sigma,n+1}(0)|^2. \tag{7.16}$$

Учитывая (7.16), можем переписать (7.15) в следующем виде

$$\kappa_{\sigma,n} z \varphi_{\sigma,n}(z) = \frac{\kappa_{\sigma,n}^2}{\kappa_{\sigma,n+1}} \varphi_{\sigma,n+1}(z) - \varphi_{\sigma,n+1}(0) \frac{\kappa_{\sigma,n}}{\kappa_{\sigma,n+1}} \varphi_{\sigma,n}^*(z). \tag{7.17}$$

Умножив обе части (7.17) на $\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}}$, получим эквивалентное (7.7) равенство.

Подставив в (7.7) $z = e^{i\tau}$ и перейдя к комплексно-сопряженным величинам, с учетом (7.4) убедимся в справедливости (7.8). Теорема 7.1 доказана.

Разделив на $\kappa_{\sigma,n}\kappa_{\sigma,n+1}$ левые и правые части формул (7.7) и (7.8), получим соотношения

$$\Phi_{\sigma,n+1}(z) = z\Phi_{\sigma,n}(z) - \overline{a_{\sigma,n}} \Phi_{\sigma,n}^*(z) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{7.18}$$

$$\Phi_{\sigma,n+1}^*(z) = z\Phi_{\sigma,n}^*(z) - a_{\sigma,n} z \Phi_{\sigma,n}(z) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{7.19}$$

в которых использованы обозначения

$$\Phi_{\sigma,n}(z) := [\kappa_{\sigma,n}]^{-1} \varphi_{\sigma,n}(z) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{7.20}$$

$$a_{\sigma,n} := -[\kappa_{\sigma,n+1}]^{-1} \overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{7.21}$$

Числа (7.21) называются *круговыми параметрами* (или просто *параметрами*) системы $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$.

## § 8. Условие замкнутости в $\mathcal{C}_{d\sigma}^2$ системы $\{e^{in\tau}\}_{n=0}^{\infty}$ в терминах круговых параметров

Через $\mathcal{C}_{d\sigma}^2$ условимся обозначать унитарное пространство комплекснозначных функций $f(z)$, заданных и непрерывных на единичной окружности $\Gamma_1$, со скалярным произведением (6.11). Рассмотрим вопрос о замкнутости в $\mathcal{C}_{d\sigma}^2$ системы $\{e^{in\tau}\}_{n=0}^{\infty}$ в терминах круговых параметров. Для этого сначала убедимся в справедливости следующего утверждения.

**Лемма 8.1.** *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\tau}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})d\sigma(\tau) = -\frac{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}{\kappa_{\sigma,n}\kappa_{\sigma,n+1}}. \tag{8.1}$$

**Доказательство.** Равенство (7.5) при $z = e^{i\tau}$ умножим на $d\sigma(\tau)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, 2\pi]$. В результате получим, что

$$\kappa_{\sigma,n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\tau}\varphi_{\sigma,n}(\tau)d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_{\sigma,n+1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau) - \frac{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*_{\sigma,n+1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau). \tag{8.2}$$

В силу ортогональности по мере $d\sigma$ многочлена $\varphi_{\sigma,n+1}$ многочленам меньшей степени

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_{\sigma,n+1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau) = 0. \tag{8.3}$$

По этой же причине, учитывая (7.4), получаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*_{\sigma,n+1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\tau}\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(e^{i\tau})}d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{\kappa_{\sigma,n+1}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\varphi_{\sigma,n+1}(e^{i\tau})|^2 d\sigma(\tau) = \frac{1}{\kappa_{\sigma,n+1}}. \tag{8.4}$$

Из (8.2)–(8.4) следует (8.1).

**Теорема 8.2.** *Пусть $\mathcal{C}^2_{d\sigma}$ — унитарное пространство комплекснозначных функций $f(z)$, заданных и непрерывных на единичной окружности $\Gamma_1$, со скалярным произведением*

(6.11)[3]. *Тогда для замкнутости в* $\mathcal{C}^2_{d\sigma}$ *последовательности* $1, e^{i\tau}, e^{i2\tau}, \ldots$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих трех условий*:

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_{\sigma,n} = \infty, \tag{8.5}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_{\sigma,\nu}(0)|^2 = \infty, \tag{8.6}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\sigma,\nu}|^2 = \infty \qquad \left(a_{\sigma,\nu} := -\frac{\overline{\varphi_{\sigma,\nu+1}(0)}}{\kappa_{\sigma,\nu+1}}\right). \tag{8.7}$$

**Доказательство.** Пусть $f_0(z) := z^{-1}$. Тогда в силу (8.1) ее $\nu$-й коэффициент Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma,\nu}\}_{\nu=0}^{\infty}$ равен

$$\lambda_{\sigma,\nu} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})}d\sigma(\tau) =$$

$$= -\frac{\overline{\varphi_{\sigma,\nu+1}(0)}}{\kappa_{\sigma,\nu}\kappa_{\sigma,\nu+1}} \quad (\nu \in \mathbb{Z}_+). \tag{8.8}$$

Поэтому с учетом (8.1) и (7.16) имеем

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_{\sigma,\nu}|^2 = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\kappa^2_{\sigma,\nu+1} - \kappa^2_{\sigma,\nu}}{\kappa^2_{\sigma,\nu}\kappa^2_{\sigma,\nu+1}} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \left\{\frac{1}{\kappa^2_{\sigma,\nu}} - \frac{1}{\kappa^2_{\sigma,\nu+1}}\right\} = \frac{1}{\kappa^2_{\sigma,0}} - \frac{1}{\kappa^2_{\sigma,n+1}}. \tag{8.9}$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_0(e^{i\tau})|^2 d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma(\tau) = \frac{1}{\kappa^2_{\sigma,0}}. \tag{8.10}$$

[3] Совпадающие на носителе меры $d\sigma$ функции $f(z)$ и $g(z)$ отождествляются.

По теореме 5.8 из (8.8)−(8.10) следует, что условие замкнутости в $\mathcal{C}^2_{d\sigma}$ для функции $f_0$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется (8.5). В случае замкнутости в $\mathcal{C}^2_{d\sigma}$ последовательности

$$1,\ e^{i\tau},\ e^{i2\tau},\dots \tag{8.11}$$

условие замкнутости имеет место для всех $f \in \mathcal{C}^2_{d\sigma}$ (и, в частности, для $f_0$), а потому выполняется (8.5).

Обратно, пусть выполняется (8.5). Покажем, что последовательность (8.11) замкнута в $\mathcal{C}^2_{d\sigma}$. Каждую функцию $f(e^{i\tau}) \in \mathcal{C}^2_{d\sigma}$ можно сколь угодно точно приблизить в $C_{2\pi}$, а значит, и в $\mathcal{C}^2_{d\sigma}$ тригонометрическими полиномами, т. е. полиномами по системе

$$1,\ e^{i\tau},\ e^{-i\tau},\ e^{i2\tau},\ e^{-i2\tau},\dots . \tag{8.12}$$

Поэтому для доказательства замкнутости в $\mathcal{C}^2_{d\sigma}$ последовательности (8.11) достаточно установить, что условие замкнутости выполняется для функций

$$e^{-i\tau},\ e^{-i2\tau},\ e^{-i3\tau}\dots . \tag{8.13}$$

В силу (8.5) для $e^{-i\tau}$ оно (по доказанному) выполняется. Предположим, что оно выполняется при некотором $k \in \mathbb{N}$ для функции $e^{-ik\tau}$. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $f(z)$, такой, что

$$\|e^{-ik\tau} - f(e^{i\tau})\| < 2^{-1}\varepsilon. \tag{8.14}$$

Для этого же $\varepsilon$ и многочлена $f$ найдется многочлен $g(z)$, такой, что

$$\|e^{-ik\tau} - g(e^{i\tau})\| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|f(0)| + 1}. \tag{8.15}$$

Вводя теперь многочлен

$$h(z) := [f(z) - [f(0)]z^{-1} + f(0)g(z),$$

в силу (8.14) и (8.15) получаем, что

$$
\begin{gathered}
\|e^{-i(k+1)\tau} - h(e^{i\tau})\| = \\
= \|e^{-i(k+1)\tau} - e^{-i\tau} f(e^{i\tau}) + f(0)[e^{-ik\tau} - g(e^{i\tau})]\| \leq \\
\leq \|e^{-ik\tau} - f(e^{i\tau})\| + |f(0)| \cdot \|e^{-ik\tau} - g(e^{i\tau})\| \leq \\
\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(0)|}{|f(0)|+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{gathered}
$$

Итак, методом индукции доказана выполнимость условия замкнутости для каждой из функций (8.13).

Необходимость и достаточность условия (8.5) для замкнутости в $\mathcal{C}^2_{d\sigma}$ последовательности (8.11) доказана.

В силу (7.16)

$$
\kappa^2_{\sigma,n} = |\varphi_{\sigma,0}(0)|^2 + \cdots + |\varphi_{\sigma,n}(0)|^2 \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{8.16}
$$

Поэтому условие (8.6) равносильно условию (8.5).

Убедимся в том, что

$$
\lim_{n\to\infty} \kappa_{\sigma,n} < \infty \implies \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\sigma,\nu}|^2 < \infty. \tag{8.17}
$$

В самом деле, из (8.16) видно, что $\kappa^2_{\sigma,n} \uparrow$ . Поэтому из (7.21) следует, что

$$
|a_{\sigma,\nu}|^2 \leq |\varphi_{\sigma,\nu+1}(0)|^2 / \kappa^2_{\sigma,1}. \tag{8.18}
$$

Поскольку условия (8.5) и (8.6) равносильны, то

$$
\lim_{n\to\infty} \kappa_{\sigma,n} < \infty \implies \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_{\sigma,\nu}(0)|^2 < \infty. \tag{8.19}
$$

Из (8.18) и (8.19) следует (8.17).

Докажем теперь, что

$$
\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\sigma,\nu}|^2 < \infty \implies \lim_{n\to\infty} \kappa_{\sigma,n} < \infty. \tag{8.20}
$$

В силу (7.16) и (7.21) $\kappa^2_{\sigma,k+1}/\kappa^2_{\sigma,k} = (1-|a_{\sigma,k}|^2)^{-1}$. Поэтому

$$\ln(\kappa^2_{\sigma,n}/\kappa^2_{\sigma,0}) = \ln(1-|a_{\sigma,0}|^2)^{-1} + \dots + \ln(1-|a_{\sigma,n-1}|^2)^{-1}. \quad (8.21)$$

Если $|a_{\sigma,0}|^2 + |a_{\sigma,1}|^2 + \dots < \infty$, то $a_{\sigma,\nu} \to 0$ $(\nu \to \infty)$, откуда и из неравенства $|a_{\sigma,\nu}| < 1$ следует, что $(1-|a_{\sigma,\nu}|^2)^{-1} = O(1)$. Поэтому $\ln(1-|a_{\sigma,\nu}|^2)^{-1} = \ln[1+|a_{\sigma,\nu}|^2(1-|a_{\sigma,\nu}|^2)^{-1}] = O(|a_{\sigma,\nu}|^2)$, в силу чего из (8.21) следует справедливость утверждения (8.20).

Из формул (8.17) и (8.20) вытекает равносильность условий (8.5) и (8.7). Поскольку (8.5) равносильно как (8.7), так и (8.6), то (8.7) равносильно (8.6).

Так как уже доказано, что условие (8.5) равносильно замкнутости в $\mathcal{C}^2_{d\sigma}$ последовательности (8.11), то этим свойством обладает и каждое из равносильных (8.5) условий (8.6) и (8.7). Теорема 8.2 доказана.

**Замечание 8.3.** В монографии Я. Л. Геронимуса [5] доказано, что верна теорема, получающаяся из теоремы 8.2 при замене в ее формулировке пространства $\mathcal{C}^2_{d\sigma}$ пространством $L^2_{d\sigma}$ суммируемых с квадратом по мере $d\sigma(\tau)$ на $[0, 2\pi]$ функций.

## § 9. Теорема Сегё о явном выражении многочлена, ортогонального на окружности с весом специального вида

Легко проверить, что система $1, z, z^2, \dots$ ортонормальна на единичной окружности $\Gamma_1 := \{z : |z| = 1\}$ с весом $\varphi(\tau) \equiv 1$. Следующая теорема, принадлежащая Г. Сегё [12] (в [12] она сформулирована в несколько иной, хотя и равносильной форме), дает менее тривиальный пример явного выражения для многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$.

**Теорема 9.1.** *Пусть вес $\varphi(\tau)$ имеет вид*

$$\varphi(\tau) := |g_m(e^{i\tau})|^{-2}, \quad (9.1)$$

*где $g_m(z)$ — алгебраический многочлен степени $m \in \mathbb{Z}_+$ с положительным коэффициентом при $z^m$, все нули которого находятся внутри единичного круга $D := \{z : |z| < 1\}$. Тогда для* *многочленов системы* $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, *ортонормированной на* $\Gamma_1$ *с весом* (9.1), *при* $n \geq m$ *имеют место явные выражения*

$$\varphi_n(z) = z^{n-m} g_m(z). \tag{9.2}$$

**Доказательство.** Пусть $n \geq m$ и $Q_n(z) := z^{n-m} g_m(z)$. Так как $g_m(z)$ — многочлен степени $m$ с положительным старшим коэффициентом, то $Q_n(z)$ — многочлен степени $n$ с положительным старшим коэффициентом. В силу первого критерия ортогональности для доказательства формулы (9.2) достаточно установить, что 1) $Q_n(z)$ имеет единичную норму и что 2) он ортогонален степеням $z^\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ (причем при $m = n = 0$ проверять нужно только первое из этих двух свойств). Свойство 1) проверяется легко:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q_n(e^{i\tau})|^2 \varphi(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{i(n-m)\tau} g_m(e^{i\tau})|^2 |g_m(e^{i\tau})|^{-2} d\tau = 1.$$

Для доказательства свойства 2) рассмотрим интеграл

$$I_{n,\nu} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_n(e^{i\tau}) e^{-i\nu\tau} \varphi(\tau) d\tau.$$

С учетом (9.1) и (9.2) имеем

$$I_{n,\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-m)\tau} g_m(e^{i\tau}) e^{-i\nu\tau} d\tau}{|g_m(e^{i\tau})|^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-\nu)\tau} [e^{im\tau} \overline{g_m(e^{i\tau})}]^{-1} d\tau. \tag{9.3}$$

Введем в рассмотрение многочлен (см. (7.1) и (7.2))

$$g_m^*(z) := z^m \overline{g_m(1/\overline{z})}. \tag{9.4}$$

Многочлен $g_m^*(z)$ получается из $g_m(z)$ по следующему правилу: если

$$g_m(z) = c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \cdots + c_1 z + c_0,$$

то

$$g_m^*(z) = \overline{c_0} z^m + \overline{c_1} z^{m-1} + \cdots + \overline{c_{m-1}} z + \overline{c_m}.$$

Покажем, что $g_m^*(z)$ не имеет нулей на $\overline{D}$. В самом деле, пусть $a \neq 0$ является нулем для $g_m^*(z)$, т. е. $g_m^*(a) = 0$. Тогда по формуле (9.4) имеем

$$0 = g_m^*(a) = a^m \overline{g_m(1/\overline{a})}.$$

Отсюда следует, что $1/\overline{a}$ — нуль для $g_m(z)$, и так как все нули многочлена $g(z)$ находятся внутри $D$, то $|a|^{-1} = |1/\overline{a}| < 1$, т. е. $|a| > 1$. Таким образом, отличная от нуля точка из круга $\overline{D}$ не может быть нулем для $g_m^*(z)$.

Допустим теперь, что $g_m^*(0) = 0$. Тогда, полагая в (9.4) $z = x^{-1}$, где $x \in (-\infty, \infty)$, получаем

$$g_m^*(x^{-1}) = x^{-m} \overline{g_m(\overline{x})} = \overline{x^{-m} g_m(x)}.$$

Устремляя здесь $x$ к бесконечности, имеем: $0 = g_m^*(0) = \overline{c_m}$, где $c_m$ — старший коэффициент $g_m(z)$. Так как по условию доказываемой теоремы $c_m > 0$, то приходим к противоречию. Поэтому $g_m^*(0) \neq 0$. Итак, установлено, что $g_m^*(z) \neq 0$ на $\overline{D}$.

В силу (9.4)

$$g_m^*(e^{i\tau}) = e^{im\tau} \overline{g_m(e^{i\tau})}. \tag{9.5}$$

Поэтому (9.3) можно переписать в виде

$$I_{n,\nu} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-\nu)\tau} [g_m^*(e^{i\tau})]^{-1} d\tau. \tag{9.6}$$

Производя в (9.6) замену переменной $e^{i\tau} = \zeta$, имеем: $d\tau = (i\zeta)^{-1}d\zeta$. При этом отрезок интегрирования $[0, 2\pi]$ преобразуется в единичную окружность $\Gamma_1$. Таким образом, из (9.6) получаем, что

$$I_{n,\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \zeta^{n-\nu}[g_m^*(\zeta)]^{-1}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{F(\zeta)}{\zeta}d\zeta, \tag{9.7}$$

где $F(\zeta) := \zeta^{n-\nu}[g_m^*(\zeta)]^{-1}$. Так как $g_m^*(\zeta) \neq 0$ $(\zeta \in \overline{D})$, то функция $F(\zeta)$ аналитична в круге $D$ и на его границе $\Gamma_1$. Поэтому по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} F(\zeta)\zeta^{-1}d\zeta = F(0). \tag{9.8}$$

При $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ показатель $n-\nu$ положителен и, следовательно, $F(0) = 0$. Отсюда в силу (9.7) и (9.8) следует, что $I_{n,\nu} = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$. Теорема 9.1 доказана.

**Замечание 9.2.** Формула (9.2) справедлива и в случае веса $\varphi(\tau) \equiv 1$, т. е. при $m = 0$ и $g_0(z) \equiv 1$. В этом случае $\varphi(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$.

## § 10. **Связь между многочленами систем, ортогональных на окружности с весами $\varphi(\tau)$ и $\varphi(k\tau)$**

Первый критерий ортогональности используется также при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 10.1.** *Пусть $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ — системы алгебраических многочленов, ортонормированные на единичной окружности с весами $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau) := \varphi(k\tau)$, соответственно, где $k$ — фиксированное число, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Тогда*

$$\psi_{nk+\nu}(z) = z^{\nu}\varphi_n(z^k) \quad (n = 0, 1, \ldots;\ \nu = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{10.1}$$

**Доказательство.** Правую часть формулы (10.1) обозначим через $Q_{kn+\nu}(z)$. Пусть $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $\mu, \nu \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Тогда

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} Q_{nk+\nu}(e^{i\tau}) \overline{Q_{mk+\mu}(e^{i\tau})} \psi(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_n(e^{ik\tau}) \overline{\varphi_m(e^{ik\tau})} e^{i(\nu-\mu)\tau} \varphi(k\tau) d\tau. \tag{10.2}$$

Заменив в (9.2) $k\tau$ на $u$, получим

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = \frac{1}{2\pi k} \int\limits_0^{2k\pi} \varphi_n(e^{iu}) \overline{\varphi_n(e^{iu})} \varphi(u) e^{i\frac{u}{k}(\nu-\mu)} du =$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{2\pi k} \int\limits_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} \varphi_n(e^{iu}) \overline{\varphi_m(e^{iu})} \varphi(u) e^{i\frac{u}{k}(\nu-\mu)} du. \tag{10.3}$$

Полагая $u = 2\pi l + v$ в $l$-м слагаемом суммы из (10.3), получаем, что

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{2\pi k} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i(2\pi l+v)}) \times$$

$$\times \overline{\varphi_m(e^{i(2\pi l+v)})} \varphi(2\pi l + v) e^{i\frac{2\pi l+v}{k}(\nu-\mu)} dv. \tag{10.4}$$

В силу $2\pi$-периодичности функций $e^{iv}$ и $\varphi(v)$ вместо (10.4) можно написать:

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{2\pi k} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_n(e^{iv}) \overline{\varphi_m(e^{iv})} \varphi(v) e^{i\frac{2\pi l+v}{k}(\nu-\mu)} dv. \tag{10.5}$$

Правая часть (10.5) равна

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_n(e^{iv}) \overline{\varphi_m(e^{iv})} \varphi(v) e^{i\frac{v}{k}(\nu-\mu)} dv \ \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (e^{i\frac{2\pi}{k}(\nu-\mu)})^l.$$

Так как при $\mu \neq \nu$ справедливо неравенство $e^{i\frac{2\pi}{k}(\nu-\mu)} \neq 1$, то по формуле суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{l=0}^{k-1}(e^{i\frac{2\pi}{k}(\nu-\mu)})^l = \frac{1-(e^{i\frac{2\pi}{k}(\nu-\mu)})^k}{1-e^{i\frac{2\pi}{k}(\nu-\mu)}} = 0.$$

Поэтому из (10.5) следует, что

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = 0 \ \ (\mu \neq \nu), \tag{10.6}$$

$$I_{m,n}^{\nu,\nu} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(e^{iv})\overline{\varphi_m(e^{iv})}\varphi(v)dv = \delta_{m,n}. \tag{10.7}$$

В силу (10.6) и (10.7)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q_{nk+\nu}(e^{i\tau})\overline{Q_{mk+\mu}(e^{i\tau})}\psi(\tau)d\tau = \delta_{nk+\nu,mk+\mu}. \tag{10.8}$$

Поскольку степень многочлена $Q_{nk+\nu}(z)$ равна его номеру, а старший коэффициент положителен, и при этом каждое $s \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде $s = nk+\nu$, то в силу первого критерия ортогональности из (10.8) следует (10.1). Теорема доказана.

## § 11. **Аналоги формулы Кристоффеля–Дарбу**

Будем употреблять обозначение

$$K_{\sigma,n}(z,\zeta) := \sum_{\nu=0}^{n}\varphi_{\sigma,\nu}(z)\overline{\varphi_{\sigma,\nu}(\zeta)}. \tag{11.1}$$

Следующая теорема дает удобные выражения для ядра (11.1).

**Теорема 11.1.** *При всех* $z,\zeta\in\mathbb{C}$ $(z\overline{\zeta}\neq 1)$ *и* $n\in\mathbb{Z}_+$ *выполняются равенства*

$$K_{\sigma,n}(z,\zeta)=\frac{\varphi^*_{\sigma,n+1}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,n+1}(\zeta)}-\varphi_{\sigma,n+1}(z)\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(\zeta)}}{1-z\overline{\zeta}},\qquad(11.2)$$

$$K_{\sigma,n}(z,\zeta)=\frac{\varphi^*_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}-z\overline{\zeta}\varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}}{1-z\overline{\zeta}}.\qquad(11.3)$$

**Доказательство.** В силу (7.8) и (7.7)

$$\varphi^*_{\sigma,n+1}(z)=\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}}\varphi^*_{\sigma,n}(z)+\frac{\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}}{\kappa_{\sigma,n}}z\varphi_{\sigma,n}(z),\qquad(11.4)$$

$$\varphi_{\sigma,n+1}(z)=\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}}z\varphi_{\sigma,n}(z)+\frac{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}{\kappa_{\sigma,n}}\varphi^*_{\sigma,n}(z).\qquad(11.5)$$

Заменяя в (11.4)$-$(11.5) $z$ на $\zeta$ и переходя затем к комплексно-сопряженным величинам, получаем, что

$$\overline{\varphi^*_{\sigma,n+1}(\zeta)}=\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}}\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}+\frac{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}{\kappa_{\sigma,n}}\overline{\zeta\varphi_{\sigma,n}(\zeta)},\qquad(11.6)$$

$$\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(\zeta)}=\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}}\overline{\zeta\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}+\frac{\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}}{\kappa_{\sigma,n}}\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}.\qquad(11.7)$$

Правую часть (11.2) обозначим через $A_{\sigma,n+1}(z,\zeta)$. Тогда с учетом формул (11.4)$-$(11.7) получим, что

$$(1-z\overline{\zeta})A_{\sigma,n+1}(z,\zeta)=$$

$$=\varphi^*_{\sigma,n+1}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,n+1}(\zeta)}-\varphi_{\sigma,n+1}(z)\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(\zeta)}=$$

$$=\left[\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}}\varphi^*_{\sigma,n}(z)+\frac{\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}}{\kappa_{\sigma,n}}z\varphi_{\sigma,n}(z)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}}\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}+\frac{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}{\kappa_{\sigma,n}}\overline{\zeta\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}\right]-$$

$$-\left[\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}}z\varphi_{\sigma,n}(z)+\frac{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}{\kappa_{\sigma,n}}\varphi^*_{\sigma,n}(z)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\kappa_{\sigma,n+1}}{\kappa_{\sigma,n}}\overline{\zeta\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}+\frac{\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}}{\kappa_{\sigma,n}}\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}\right]. \qquad (11.8)$$

Раскроем скобки в правой части (11.8). Тогда после приведения подобных членов придем к равенству

$$(1-z\overline{\zeta})A_{\sigma,n+1}(z,\zeta)=\left[\frac{\kappa^2_{\sigma,n+1}}{\kappa^2_{\sigma,n}}-\frac{|\varphi_{\sigma,n+1}(0)|^2}{\kappa^2_{\sigma,n}}\right]\varphi^*_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}-$$

$$-\left[\frac{\kappa^2_{\sigma,n+1}}{\kappa^2_{\sigma,n}}-\frac{|\varphi_{\sigma,n+1}(0)|^2}{\kappa^2_{\sigma,n}}\right]z\varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\zeta\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}. \qquad (11.9)$$

В силу (7.16) выражения в квадратных скобках в правой части (11.9) равны единице. Поэтому

$$(1-z\overline{\zeta})A_{\sigma,n+1}(z,\zeta)=\varphi^*_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}-z\varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\zeta\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}=$$

$$=\varphi^*_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}-\varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,n}\zeta}+\varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,n}\zeta}-$$

$$-z\varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\zeta\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}. \qquad (11.10)$$

Из (11.10) видно, что

$$(1-z\overline{\zeta})A_{\sigma,n+1}(z,\zeta)=(1-z\overline{\zeta})A_{\sigma,n}(z,\zeta)+(1-z\overline{\zeta})\varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}.$$

Отсюда после сокращения на $1-z\overline{\zeta}$ получим, что

$$\varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}=A_{\sigma,n+1}(z,\zeta)-A_{\sigma,n}(z,\zeta). \qquad (11.11)$$

Заменив в (11.11) $n$ на $\nu$, получим равенства

$$\varphi_{\sigma,\nu}(z)\overline{\varphi_{\sigma,\nu}(\zeta)}=A_{\sigma,\nu+1}(z,\zeta)-$$

$$-A_{\sigma,\nu}(z,\zeta) \qquad (\nu=0,\ldots,n). \qquad (11.12)$$

Суммируя равенства (11.12), с учетом (11.1) приходим к соотношению

$$K_{\sigma,n}(z,\zeta)=A_{\sigma,n+1}(z,\zeta)-A_{\sigma,0}(z,\zeta). \qquad (11.13)$$

Поскольку $A_{\sigma,0}(z,\zeta) = 0$, то из (11.13) следует (11.2).

В силу первого из равенств (11.10) формулу (11.2) можно переписать в виде (11.3). Теорема доказана.

## § 12. **Нули многочленов, ортогональных на окружности**

Рассмотрим вопрос о расположении нулей многочленов $\varphi_{\sigma,n}(z)$ и $\varphi^*_{\sigma,n}(z)$.

**Теорема 12.1.** *При $n \in \mathbb{N}$ все нули многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$ находятся внутри единичного круга $D := \{z : |z| < 1\}$. Многочлен $\varphi^*_{\sigma,n}(z)$ не имеет нулей ни в круге $D$, ни на его границе $\Gamma_1$.*

**Доказательство.** Из (11.2) и (11.3) при $\zeta = z \notin \Gamma_1$ получаем, что

$$0 < K_{\sigma,n}(z,z) = \frac{|\varphi^*_{\sigma,n+1}(z)|^2 - |\varphi_{\sigma,n+1}(z)|^2}{1-|z|^2} =$$

$$= \frac{|\varphi^*_{\sigma,n}(z)|^2 - |z\varphi_{\sigma,n}(z)|^2}{1-|z|^2}. \tag{12.1}$$

В силу (9.4) имеем

$$|\varphi^*_{\sigma,n}(z)| = |\varphi_{\sigma,n}(z)| = |z\varphi_{\sigma,n}(z)| \qquad (z \in \Gamma_1,\ n \in \mathbb{Z}_+). \tag{12.2}$$

Из (12.1) и (12.2) легко следует, что при $n \in \mathbb{Z}_+$

$$|\varphi_{\sigma,n+1}(z)| < |\varphi^*_{\sigma,n+1}(z)| \iff |z| < 1, \tag{12.3}$$

$$|z\varphi_{\sigma,n}(z)| < |\varphi^*_{\sigma,n}(z)| \iff |z| < 1, \tag{12.4}$$

$$|\varphi_{\sigma,n+1}(z)| > |\varphi^*_{\sigma,n+1}(z)| \iff |z| > 1, \tag{12.5}$$

$$|z\varphi_{\sigma,n}(z)| > |\varphi^*_{\sigma,n}(z)| \iff |z| > 1. \tag{12.6}$$

В силу каждой из формул (12.3) и (12.4) многочлен $\varphi^*_{\sigma,n}(z)$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ не имеет нулей в $D$. Из (12.2) видно, что если $\varphi^*_{\sigma,n+1}(z_0) = 0$ в некоторой точке $z_0 \in \Gamma_1$, то и $\varphi_{\sigma,n+1}(z_0) = 0$.

Поэтому правая часть (7.6) при $z = z_0$ равна нулю. Но тогда при $z = z_0$ нулю равна и левая часть (7.6), т. е. $\varphi^*_{\sigma,n}(z_0) = 0$. Повторяя это рассуждение, последовательно получаем

$$0 = \varphi^*_{\sigma,n+1}(z_0) = \varphi^*_{\sigma,n}(z_0) = \dots = \varphi^*_{\sigma,0}(z_0) = \kappa_{\sigma,0} > 0.$$

Из этого противоречия следует, что многочлен $\varphi^*_{\sigma,n}(z)$ ни при каком $n \in \mathbb{Z}_+$ не может иметь нулей на $\Gamma_1$. Отсюда в силу (12.2) следует, что $\varphi_{\sigma,n}(z) \neq 0$ $(z \in \Gamma_1)$. Из (12.5), а также и из (12.6) следует, что $\varphi_{\sigma,n}(z) \neq 0$ $(|z| > 1)$. Таким образом, все нули $\varphi_{\sigma,n}(z)$ находятся в $D$. Теорема 12.1 доказана.

**Замечание 12.2.** Так как $\kappa_{\sigma,n} > 0$, то $\varphi_{\sigma,n}(z)$ имеет $n$ нулей, считая с их кратностями. По доказанной теореме все они принадлежат внутренности единичного круга. Многочлен $\varphi^*_{\sigma,n}(z)$ может не иметь ни одного нуля. В качестве примера можно привести меру $d\sigma(\tau) = d\tau$. Для нее $\varphi_{\sigma,n}(z) = z^n$. Следовательно, $\varphi^*_{\sigma,n}(z) \equiv 1 > 0$.

## § 13. **Формулы, содержащие** $K_{\sigma,n}(e^{i\tau}, e^{i\tau})$

Функция $[K_{\sigma,n}(z,z)]^{-1}$ называется *функцией Кристоффеля.* В §12 выражения (12.1) для $K_{\sigma,n}(z,z)$ использовались при выяснении вопроса о расположении нулей многочленов $\varphi_{\sigma,n}(z)$ и $\varphi^*_{\sigma,n}(z)$. В этом параграфе устанавливаются используемые в дальнейших построениях формулы, содержащие функцию $K_{\sigma,n}(e^{i\tau}, e^{i\tau})$.

**Лемма 13.1.** *Для любой неубывающей ограниченной функции $\sigma(\tau)$ с бесконечным множеством точек роста на $[0, 2\pi]$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется равенство*

$$K_{\sigma,n-1}(e^{i\tau}, e^{i\tau}) + n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 =$$
$$= 2\Re\{e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}\}. \tag{13.1}$$

**Доказательство.** В силу (11.1) и (11.2)

$$(1-z\overline{\zeta})\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_{\sigma,k}(z)\overline{\varphi_{\sigma,k}(\zeta)}=$$

$$=\varphi^*_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}-\varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}. \tag{13.2}$$

Дифференцируя (13.2) по $z$, имеем

$$-\overline{\zeta}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_{\sigma,k}(z)\overline{\varphi_{\sigma,k}(\zeta)}+(1-z\overline{\zeta})\sum_{k=0}^{n-1}\varphi'_{\sigma,k}(z)\overline{\varphi_{\sigma,k}(\zeta)}=$$

$$=\varphi^{*\prime}_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(\zeta)}-\varphi'_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,n}(\zeta)}.$$

Отсюда при $\zeta=z=e^{i\tau}$ в силу (11.1) получаем равенство

$$e^{-i\tau}K_{\sigma,n-1}(e^{i\tau},e^{i\tau})=\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}-{\varphi^*_{\sigma,n}}'(e^{i\tau})\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(e^{i\tau})},$$

после умножения на $e^{i\tau}$ принимающее вид

$$K_{\sigma,n-1}(e^{i\tau},e^{i\tau})=$$

$$=e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}-e^{i\tau}{\varphi^*_{\sigma,n}}'(e^{i\tau})\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(e^{i\tau})}. \tag{13.3}$$

Дифференцируя по $\tau$ формулу $\varphi^*_{\sigma,n}(e^{i\tau})=e^{in\tau}\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}$ (см. (7.4)) и затем сокращая на $i$, имеем

$$e^{i\tau}{\varphi^*_{\sigma,n}}'(e^{i\tau})=ne^{in\tau}\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}-e^{in\tau}\overline{e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})}. \tag{13.4}$$

Подставляя правую часть (13.4) вместо $e^{i\tau}{\varphi^*_{\sigma,n}}'(e^{i\tau})$ в правую часть (13.3), с учетом (7.4) находим, что

$$K_{\sigma,n-1}(e^{i\tau},e^{i\tau})=e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}+$$

$$+[e^{in\tau}\overline{e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})}-ne^{in\tau}\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}]\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(e^{i\tau})}=$$

$$=e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}+$$

$$+e^{in\tau}\overline{e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})}e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})-n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2=$$

$$= e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} + \overline{e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau}) - n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 =$$

$$= 2\Re\{e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}\} - n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2. \qquad (13.5)$$

Из (13.5) следует (13.1).

**Следствие 13.2.** *В условиях леммы* 13.1

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_{\sigma,k}(e^{i\tau})|^2 + n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 \le 2|\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|. \qquad (13.6)$$

**Лемма 13.3.** *Пусть* $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *— система многочленов, ортонормированная на окружности* $|z| = 1$ *по мере* $d\sigma(\tau)$. *Тогда для любой из ветвей функции* $\gamma_{\sigma,n}(\tau) := \arg\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})$ *при всех* $\theta, \tau \in \mathbb{R}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\gamma_{\sigma,n}(\tau) - \gamma_{\sigma,n}(\theta) =$$

$$= \frac{n}{2}(\tau - \theta) + \frac{1}{2}\int_{\theta}^{\tau} |\varphi_{\sigma,n}(e^{iu})|^{-2} \sum_{\nu=0}^{n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2\, du. \qquad (13.7)$$

**Доказательство.** Равенство $\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau}) = e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|$ продифференцируем по $\tau$. Тогда получим

$$ie^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau}) = e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}\frac{d}{d\tau}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})| + i\gamma'_{\sigma,n}(\tau)|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}.$$

Умножая обе части этого равенства на $-2i\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}$, с учетом соотношения $\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} = e^{-i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|$ имеем

$$2e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} =$$

$$= -2i|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|\frac{d}{d\tau}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})| + 2\gamma'_{\sigma,n}(\tau)|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2. \qquad (13.8)$$

Из (13.8) и (13.1) следует, что

$$2\gamma'_{\sigma,n}(\tau)|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 = n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 + \sum_{\nu=0}^{n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})|^2.$$

Отсюда легко находим, что

$$\gamma'_{\sigma,n}(\tau) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^{-2}\sum_{\nu=0}^{n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})|^2. \qquad (13.9)$$

Интегрируя (13.9), получаем (13.7).

**Замечание 13.4.** Формула (13.7) будет использована ниже при исследовании поведения нулей тригонометрических ортогональных полиномов и многочленов, ортогональных на отрезке. Неравенство (13.6) применяется в следующем параграфе при решении одной экстремальной задачи для алгебраических многочленов, все нули которых принадлежат $\overline{D}$.

### § 14. **Неравенство Турана и его обобщение**

П. Туран установил, что для любого алгебраического многочлена $Q_n(z)$ степени $n \in \mathbb{N}$, все нули которого принадлежат $\overline{D}$, имеет место неравенство с точной константой

$$\|Q'_n(e^{i\tau})\|_\infty \geq \frac{n}{2}\|Q_n(e^{i\tau})\|_\infty, \qquad (14.1)$$

где под $\|f(\tau)\|_\infty$ понимается максимум модуля на отрезке $[0, 2\pi]$ функции $f \in C_{2\pi}$ (т. е. непрерывной $2\pi$-периодической функции$f(\tau)$). Знак равенства в неравенстве(14.1) достигается при $Q_n(z) = (1+z)^n$.

П. Эрдеш высказал гипотезу о том, что если $Q_n(z)$ не имеет нулей в $D$, то имеет место неравенство

$$\|Q'_n(e^{i\tau})\|_\infty \leq \frac{n}{2}\|Q_n(e^{i\tau})\|_\infty \qquad (14.2)$$

с точной константой, противоположное (14.1). Эту гипотезу доказал П. Лакс.

Заметим, что если все нули $Q_n(z)$ принадлежат окружности $|z| = 1$, то в силу приведенных результатов П. Турана и

П. Лакса неравенства (14.1) и (14.2) выполняются одновременно, а потому в этом случае

$$\|Q_n'(e^{i\tau})\|_\infty = \frac{n}{2}\|Q_n(e^{i\tau})\|_\infty. \tag{14.3}$$

В общем случае, когда не налагается никаких ограничений на расположение нулей $Q_n(z)$, справедливо неравенство

$$\|Q_n'(e^{i\tau})\|_\infty \le n\|Q_n(e^{i\tau})\|_\infty \tag{14.4}$$

с точной константой (знак равенства в (14.4) достигается при $Q_n(z) = z^n$). Оно является следствием известного неравенства С. Н. Бернштейна

$$\|t_n'(\tau)\|_\infty \le n\|t_n(\tau)\|_\infty \tag{14.5}$$

для тригонометрического полинома $t_n$ порядка $n$.

Заметка, в которой П. Туран привел доказательство неравенства (14.1), содержит его замечание о том, что, наряду с (14.1), можно доказать более сильное, чем (14.1), неравенство

$$|Q_n'(e^{i\tau})| \ge \frac{n}{2}|Q_n(e^{i\tau})| \qquad (n \in \mathbb{N},\ \tau \in \mathbb{R}) \tag{14.6}$$

с точной константой. Знак равенства в (14.6) достигается на многочлене $Q_n(z) = (1+z)^n$ при $\tau = 0$.

В этом параграфе с помощью неравенства (13.6), являющегося следствием равенства (13.1) (в свою очередь являющегося следствием аналога формулы Кристоффеля–Дарбу для многочленов, ортогональных на окружности), будет доказано более общее, чем (14.6), неравенство, а именно будет доказана

**Теорема 14.1.** *Пусть $n$ и $j \in \mathbb{N}$, $j \le n$. Тогда для всякого многочлена $Q_n(z)$ степени $n$, все нули которого принадлежат $\overline{D} := \{z:\ |z| \le 1\}$, имеет место неравенство*

$$|Q_n^{(j)}(e^{i\tau})| \ge \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{2^j}|Q_n(e^{i\tau})| \quad (\tau \in \mathbb{R}). \tag{14.7}$$

*Знак равенства в* (14.7) *достигается на многочлене* $Q_n(z) =$ $= (1+z)^n$ *в точке* $\tau = 0$.

Приступая к доказательству теоремы 14.1 при $j = 1$, прежде всего покажем, что можно ограничиться рассмотрением случая, когда все нули $Q_n(z)$ находятся внутри круга $D$. Для этого рассмотрим многочлен

$$q_{n,R}(z) = \mathcal{P}_n(Rz), \tag{14.8}$$

где $R > 1$, $\mathcal{P}_n(z)$ — многочлен степени $n$. Покажем, что если все нули $\mathcal{P}_n(z)$ принадлежат $\overline{D}$, то все нули $q_{n,R}(z)$ находятся внутри $D$. Действительно, если $q_{n,R}(z_0) = 0$, то в силу (14.8) $|Rz_0| \leq 1$, а тогда $|z_0| \leq R^{-1} < 1$. Предположим теперь, что неравенство (14.6) верно для всех многочленов $Q_n(z)$, все нули которых принадлежат $D$. Тогда оно верно для $q_{n,R}(z)$, т. е.

$$|{q_{n,R}}'(e^{i\tau})| \geq \frac{n}{2}|q_{n,R}(e^{i\tau})|. \tag{14.9}$$

В силу (14.8)

$${q_{n,R}}'(z) = \frac{d}{dz}\mathcal{P}_n(Rz) = R{\mathcal{P}_n}'(Rz). \tag{14.10}$$

С учетом (14.8) и (14.10) неравенство (14.9) можно записать в виде

$$R|{\mathcal{P}_n}'(Re^{i\tau})| \geq \frac{n}{2}|\mathcal{P}_n(Re^{i\tau})|. \tag{14.11}$$

Так как левая и правая части (4.11) суть непрерывные функции от $R$, то при $R \to 1+0$ из (14.11) получаем неравенство

$$|\mathcal{P}_n'(e^{i\tau})| \geq \frac{n}{2}|\mathcal{P}_n(e^{i\tau})|.$$

Итак, если (14.6) верно для всех $Q_n(z)$, все нули которых принадлежат $D$, то оно верно и для всех $Q_n(z)$, все нули которых принадлежат $\overline{D}$.

При доказательстве (14.6), очевидно, можно считать, что старший коэффициент многочлена $Q_n(z)$ (т. е. коэффициент при $z^n$) положителен. Поскольку при этом все нули $Q_n(z)$ принадлежат $D$, то по теореме Сегё (теорема 9.1) $Q_n(z) = \varphi_{\sigma,n}(z)$, где $\varphi_{\sigma,n}(z)$ принадлежит системе $\{\varphi_{\sigma,k}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ многочленов, ортонормированной на окружности $\Gamma_1$ по мере

$$d\sigma(\tau) = |Q_n(e^{i\tau})|^{-2} d\tau. \tag{14.12}$$

Поэтому неравенство (14.6) достаточно доказать для $n$-го многочлена системы $\{\varphi_{\sigma,k}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ в случае произвольной меры $d\sigma(\tau)$, не обязательно удовлетворяющей условию (14.12).

Для доказательства неравенства

$$|\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})| \geq \frac{n}{2} |\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})| \qquad (\tau \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}) \tag{14.13}$$

достаточно в левой части (13.6) зачеркнуть первое слагаемое и затем обе части полученного при этом неравенства разделить на $|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|$. Это можно сделать, поскольку по теореме 12.1 выполняется неравенство $|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})| > 0 \ \ (\tau \in \mathbb{R})$. Итак, неравенство П. Турана (14.6), а вместе с ним и неравенство (14.7) при $j = 1$ доказаны.

Итак, теорема 14.1 в случае $j = 1$ полностью доказана.

В случае $j > 1$ неравенство (14.7) будет получено из (14.6) путем применения следующих двух лемм.

**Лемма 14.2.** *Пусть $n \geq 2$, $F$ — выпуклое множество в $\mathbb{C}$, содержащее точки $z_1, z_2, \ldots,\ z_n$. Тогда при любом выборе чисел $m_1, \ldots, m_n$, удовлетворяющих условиям*

$$0 < m_1, \ldots,\ 0 < m_n; \ \ m_1 + \cdots + m_n = 1, \tag{14.14}$$

*точка*

$$\zeta := m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n \tag{14.15}$$

*принадлежит $F$.*

**Доказательство.** Пусть $n = 2$. Тогда в силу (14.14) и (14.15) выполняется равенство $\zeta = m_1 z_1 + (1 - m_1) z_2$ $(0 < m_1 < 1)$, означающее, что $\zeta$ принадлежит отрезку, соединяющему

$z_1$ с $z_2$. В силу выпуклости $F$ этот отрезок содержится в $F$. Значит, $\zeta \in F$. Таким образом, при $n = 2$ лемма доказана.

Предположим, что для некоторого $n \geq 2$ лемма верна. Пусть

$$0 < m_1, \ldots,\ 0 < m_{n+1};\ \ m_1 + \cdots + m_{n+1} = 1, \tag{14.16}$$

$$\zeta := m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n + m_{n+1} z_{n+1}. \tag{14.17}$$

Тогда точка

$$\xi := \frac{m_1}{m_1 + \cdots + m_n} z_1 + \cdots + \frac{m_n}{m_1 + \cdots + m_n} z_n \tag{14.18}$$

принадлежит $F$, так как коэффициенты при $z_1, \ldots, z_n$ в (14.18) положительны, и их сумма равна единице. В силу условий (14.16)–(14.18)

$$\zeta = (m_1 + \cdots + m_n)\xi + m_{n+1} z_{n+1} = (1 - m_{n+1})\xi + m_{n+1} z_{n+1},$$

т. е. $\zeta$ принадлежит отрезку, соединяющему $\xi$ и $z_{n+1}$. Так как $\xi$ и $z_{n+1}$ принадлежат $F$, а $F$ — выпуклое множество, то этот отрезок принадлежит $F$. Итак, лемма 14.2 доказана.

**Лемма 14.3.** *Если все корни $z_1, \ldots, z_n$ многочлена $Q_n(z)$ степени $n \geq 2$ принадлежат выпуклому множеству $F$, то и все корни ${Q_n}'(z)$ принадлежат $F$.*

**Доказательство.** Легко видеть, что

$$\frac{{Q_n}'(z)}{Q_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}. \tag{14.19}$$

Предположим, что

$${Q_n}'(a) = 0;\ \ a \neq z_k \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{14.20}$$

(если $a$ совпадает с какой-либо из точек $z_1, \ldots, z_n$, то $a \in F$ и доказывать нечего). Тогда в силу (14.19)

$$0 = \overline{{Q_n}'(a)} \,/\, \overline{Q_n(a)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{a} - \overline{z}_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a - z_k}{(\overline{a} - \overline{z_k})(a - z_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a - z_k}{|a - z_k|^2} \; = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|a - z_\nu|^2} \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (a - z_k), \qquad (14.21)$$

где

$$m_k := \frac{|a - z_k|^{-2}}{\sum_{\nu=1}^{n} |a - z_\nu|^{-2}} > 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k = 1. \qquad (14.22)$$

Из (14.21) следует, что $\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (a - z_k) = 0$, а потому

$$a \sum_{k=1}^{n} m_k - \sum_{k=1}^{n} m_k z_k = 0. \qquad (14.23)$$

Из (14.22) и (14.23) следует, что $a$ удовлетворяет условиям (14.14) и (14.15) (при $\zeta = a$). Поэтому на основании леммы 14.2 $a \in F$. Лемма 14.3 доказана.

Из неравенства (14.6) и леммы 14.3 легко следует справедливость неравенства (14.7). Действительно, положим $F := \overline{D}$. Тогда $F$ — выпуклое множество. Так как все нули $Q_n(z)$ принадлежат $\overline{D}$, то по лемме 14.2 все нули производных ${Q_n}'(z), \ldots, Q_n^{(j-1)}(z)$ принадлежат $\overline{D}$. Поэтому, применяя (14.6) $j - 1$ раз, получаем (14.7).

Утверждение о точности неравенства (14.7) легко проверяется путем вычисления величин $Q_n(1)$ и $Q_n^{(j)}(1)$ для многочлена $Q_n(z) = (1 + z)^n$.

**Замечание 14.4.** Очевидно, из (14.7) легко следует неравенство, получающееся из (14.7) при замене знаков модулей знаками норм (как в (14.1)). При этом сохраняет силу замечание о его точности.

## § 15. **Многочлены второго рода, функция Каратеодори, моменты меры**

Наряду с системой $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ рассматривают систему $\{\psi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, определяемую равенствами

$$\psi_{\sigma,0}(z) := \varphi_{\sigma,0}(z) = \kappa_{\sigma,0}, \qquad (15.1)$$

$$\psi_{\sigma,n}(z) := \frac{1}{2\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z}[\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})-$$

$$-\varphi_{\sigma,n}(z)]\, d\sigma(\tau) \qquad (z\in\mathbb{C};\ n\in\mathbb{N}), \tag{15.2}$$

где

$$c_0 := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\sigma(\tau). \tag{15.3}$$

Поскольку дробь $[\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})-\varphi_{\sigma,n}(z)]/(e^{i\tau}-z)$ в (15.2) есть многочлен по $z$ степени $n-1$ с коэффициентом $\kappa_{\sigma,n}$ при $z^{n-1}$, то выражение перед $d\sigma(\tau)$ под знаком интеграла в (15.2) есть многочлен по $z$ степени $n$ с коэффициентом $\kappa_{\sigma,n}$ при $z^n$. Поэтому $\psi_{\sigma,n}(z)$ — многочлен степени $n$, а его старший коэффициент равен $\kappa_{\sigma,n}$.

Система $\{\psi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ называется *системой многочленов второго рода, ассоциированной с мерой* $d\sigma(\tau)$.

Полагая в (15.2) $z=0$, с учетом ортогональности $\varphi_{\sigma,n}(z)$ константам и равенства (15.3) получаем, что при $n\in\mathbb{N}$

$$\psi_{\sigma,n}(0) = \frac{1}{2\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})\, d\sigma(\tau)-$$

$$-\varphi_{\sigma,n}(0)\frac{1}{2\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi} d\sigma(\tau) = -\varphi_{\sigma,n}(0). \tag{15.4}$$

Рассмотрим функцию

$$F_\sigma(z) := \frac{1}{2\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z}\, d\sigma(\tau) \qquad (z\in D). \tag{15.5}$$

Она называется *функцией Каратеодори.* Так как

$$\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} = \frac{1+ze^{-i\tau}}{1-ze^{-i\tau}} = 1+2\sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu e^{-i\nu\tau} \qquad (z\in D), \tag{15.6}$$

а ряд в (15.6) сходится равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ и $z$ в любом круге $|z| \le \rho < 1$, то из (15.5) и (15.6) следует, что

$$F_\sigma(z) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{2\pi} \Big[1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu e^{-i\nu\tau}|\Big]\, d\sigma(\tau) =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2c_\nu}{c_0} z^\nu \qquad (z \in D), \tag{15.7}$$

где

$$c_\nu := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\tau}\, d\sigma(\tau) \qquad (\nu \in \mathbb{Z}_+). \tag{15.8}$$

Числа (15.8) называются *моментами меры* $d\sigma(\tau)$.

Для всех $\theta \in \mathbb{R}$ и $\rho \in [0,1)$ выполняется неравенство

$$P(\rho, \tau - \theta) := \Re \frac{e^{i\tau} + \rho e^{i\theta}}{e^{i\tau} - \rho e^{i\theta}} = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\tau - \theta) + \rho^2} > 0. \tag{15.9}$$

Из (15.5) и (15.9) следует, что для всех $\theta \in \mathbb{R}$ и $\rho \in [0,1)$

$$\Re F_\sigma(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{2\pi} P(\rho, \tau - \theta)\, d\sigma(\tau) > 0, \tag{15.10}$$

т. е.

$$\Re F_\sigma(z) > 0 \qquad (z \in D). \tag{15.11}$$

**Лемма 15.1.** *При всех* $n \in \mathbb{Z}_+$ *и* $z \in \mathbb{C}$ *справедливо равенство*

$$\varphi^*_{\sigma,n}(z)\psi_{\sigma,n}(z) + \varphi_{\sigma,n}(z)\psi^*_{\sigma,n}(z) = \frac{2}{c_0} z^n. \tag{15.12}$$

**Доказательство.** При $n = 0$ (15.12) следует непосредственно из (15.1) и (15.3). Для доказательства (15.12) при $n \in \mathbb{N}$

предварительно убедимся в справедливости для всех $z \in D$ и $n \in \mathbb{N}$ равенств

$$\psi_{\sigma,n}(z) = -F_\sigma(z)\varphi_{\sigma,n}(z) + \frac{z^n}{\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(e^{i\tau})}}{1 - ze^{-i\tau}}\, d\sigma(\tau), \qquad (15.13)$$

$$\psi^*_{\sigma,n}(z) = F_\sigma(z)\varphi^*_{\sigma,n}(z) - \frac{z^n}{\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}}{1 - ze^{-i\tau}}\, d\sigma(\tau). \qquad (15.14)$$

Доказываем (15.13). В силу (15.2) и (15.5)

$$\psi_{\sigma,n}(z) = -F_\sigma(z)\varphi_{\sigma,n}(z) + \frac{1}{2\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})\, d\sigma(\tau). \quad (15.15)$$

Пользуясь разложением (15.6) и ортогональностью $\varphi_{\sigma,n}(z)$ многочленам меньшей степени, получаем из (15.15), что

$$\psi_{\sigma,n}(z) = -F_\sigma(z)\varphi_{\sigma,n}(z) + \frac{1}{\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{z^n e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}{1 - ze^{-i\tau}}\, d\sigma(\tau),$$

откуда в силу (7.4) следует (15.13).

Докажем (15.14). Учитывая (7.3) и (15.2), имеем

$$\psi^*_{\sigma,n}(z) = z^n \frac{1}{2\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-i\tau} + z^{-1}}{e^{-i\tau} - z^{-1}}[\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} - \overline{\varphi_{\sigma,n}(1/\overline{z})}]\, d\sigma(\tau).$$

Отсюда в силу (7.3) следует, что

$$\psi^*_{\sigma,n}(z) = F_\sigma(z)\varphi^*_{\sigma,n}(z) - \frac{z^n}{2\pi c_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z}\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}\, d\sigma(\tau). \quad (15.16)$$

Пользуясь соотношением

$$\frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} = \frac{2}{1 - ze^{-i\tau}} - 1$$

и ортогональностью $\varphi_{\sigma,n}(z)$ константам, выводим из (15.16) равенство (15.14).

Складывая равенство (15.13), умноженное на $\varphi^*_{\sigma,n}(z)$, с равенством (15.14), умноженным на $\varphi_{\sigma,n}(z)$, имеем

$$\varphi^*_{\sigma,n}(z)\psi_{\sigma,n}(z) + \varphi_{\sigma,n}(z)\psi^*_{\sigma,n}(z) =$$

$$= \frac{z^n}{\pi c_0} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi^*_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,n}(e^{i\tau})} - \varphi_{\sigma,n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}}{1 - ze^{-i\tau}}\, d\sigma(\tau).$$

Дробь под знаком последнего интеграла в силу (11.2) есть $K_{\sigma,n-1}(z, e^{i\tau})$. Поэтому

$$\varphi^*_{\sigma,n}(z)\psi_{\sigma,n}(z) + \varphi_{\sigma,n}(z)\psi^*_{\sigma,n}(z) =$$

$$= \frac{2z^n}{c_0} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot K_{\sigma,n-1}(z, e^{i\tau})\, d\sigma(\tau). \tag{15.17}$$

Докажем, что для любого многочлена $Q_n(z)$ степени не выше $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} Q_n(e^{i\tau}) K_{\sigma,n}(z, e^{i\tau})\, d\sigma(\tau) = Q_n(z). \tag{15.18}$$

В самом деле, многочлен $Q_n(z)$ можно представить в виде

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_{\sigma,k}(z). \tag{15.19}$$

В силу (15.19) и (11.1) левая часть (15.18) равна

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_{\sigma,k}(e^{i\tau}) \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\sigma,\nu}(z)\overline{\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})}\, d\sigma(\tau),$$

а это выражение в силу ортонормированности системы $\{\varphi_{\sigma,\nu}(z)\}_{\nu=0}^{\infty}$ по мере $d\sigma(\tau)$ равно правой части (15.19), а значит, и $Q_n(z)$. Формула (15.18) доказана.

Из (15.17) и (15.18) легко следует справедливость леммы 15.1.

**Следствие 15.2.** *Справедливо равенство*

$$\Re\{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\psi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}\} = \frac{1}{c_0} \qquad (\tau \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{Z}_+). \tag{15.20}$$

Для доказательства (15.20) надо в (15.12) положить $z = e^{i\tau}$ и учесть (7.4).

**Следствие 15.3.** *Справедливо равенство*

$$c_0\Re\left\{\frac{\psi^*_{\sigma,n}(e^{i\tau})}{\varphi^*_{\sigma,n}(e^{i\tau})}\right\} = \frac{1}{|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2} \qquad (\tau \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{Z}_+). \tag{15.21}$$

Для доказательства (15.21) надо обе части (15.20) умножить на $c_0|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^{-2}$ и принять во внимание (7.4).

**Лемма 15.4.** *Равномерно внутри $D$*

$$F_\sigma(z) - \frac{\psi^*_{\sigma,n}(z)}{\varphi^*_{\sigma,n}(z)} = O(|z|^{n+1}) \qquad (n \to \infty). \tag{15.22}$$

**Доказательство.** Пользуясь соотношением

$$\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} = \frac{2z}{e^{i\tau}-z} + 1$$

и ортогональностью $\varphi_{\sigma,n}(z)$ константам, получаем равенство

$$\frac{z^n}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z}\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}\,d\sigma(\tau) = \frac{z^{n+1}}{\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}}{e^{i\tau}-z}\,d\sigma(\tau).$$

Поэтому (15.16) можно переписать в виде

$$F_\sigma(z) - \frac{\psi^*_{\sigma,n}(z)}{\varphi^*_{\sigma,n}(z)} =$$

$$= \frac{z^{n+1}}{\varphi^*_{\sigma,n}(z)} \cdot \frac{1}{\pi c_0} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}}{e^{i\tau} - z}\, d\sigma(\tau) \qquad (z \in D;\ n \in \mathbb{N}). \quad (15.23)$$

Пользуясь (12.1), заключаем, что

$$0 < \kappa^2_{\sigma,0} < |\varphi^*_{\sigma,n}(z)|^2 (1 - |z|^2)^{-1} \qquad (z \in D;\ n \in \mathbb{N}). \quad (15.24)$$

Из (15.24) легко следует неравенство

$$\frac{1}{|\varphi^*_{\sigma,n}(z)|} < \frac{1}{\kappa_{\sigma,0}\sqrt{1 - |z|^2}} \qquad (z \in D;\ n \in \mathbb{N}). \quad (15.25)$$

В силу неравенства Коши и равенства (15.3)

$$\left| \frac{1}{\pi c_0} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}}{e^{i\tau} - z}\, d\sigma(\tau) \right| \le$$

$$\le \frac{2}{c_0(1 - |z|)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2\, d\sigma(\tau) \cdot c_0 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{c_0}(1 - |z|)} \qquad (z \in D;\ n \in \mathbb{N}). \quad (15.26)$$

Из (15.23), (15.25) и (15.26) вытекает справедливость леммы 15.4.

**Следствие 15.5.** *Равномерно внутри $D$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi^*_{\sigma,n}(z)}{\varphi^*_{\sigma,n}(z)} \ = \ F_\sigma(z). \quad (15.27)$$

Равенство (15.27) легко следует из (15.22).

**Следствие 15.6.** *Ряды Маклорена дроби $\psi^*_{\sigma,n}(z)/\varphi^*_{\sigma,n}(z)$ и функции Каратеодори $F_\sigma(z)$ имеют одинаковые коэффициенты при $z^0, z^1, \ldots, z^n$.*

**Доказательство.** Если бы при некотором $\nu = 0, 1, \ldots, n$ коэффициенты при $z^\nu$ в рассматриваемых рядах Маклорена не совпали, то при $z \to 0$ отношение к $z^\nu$ левой части (15.22) стремилось бы к ненулевому пределу, а правой части (15.22) — к нулю.

**Следствие 15.7.** *Справедливы равенства*

$$c_\nu := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\nu\tau}\, d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\nu\tau}\frac{d\tau}{|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n). \qquad (15.28)$$

**Доказательство.** В силу следствия 15.6 и формул (15.7)–(15.8) при $z \in D$ имеем разложение

$$\frac{c_0}{2}\cdot\frac{\psi^*_{\sigma,n}(z)}{\varphi^*_{\sigma,n}(z)} = \frac{c_0}{2} + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_{n,\nu} z^\nu. \qquad (15.29)$$

Так как $\varphi^*_{\sigma,n}(z) \neq 0 \quad (z \in \overline{D})$, то левая часть (15.29) аналитична в некоторой области, содержащей $\overline{D}$. Поэтому ряд в (15.29) равномерно сходится на $\Gamma_1$. Но тогда, положив $c_{-\nu} := \overline{c_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, $c_{n,-\nu} := \overline{c_{n,\nu}}$ $(\nu > n)$, в силу (15.21) и (15.29) получим, что

$$\frac{1}{|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2} = c_0\Re\frac{\psi^*_{\sigma,n}(e^{i\tau})}{\varphi^*_{\sigma,n}(e^{i\tau})} = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu\tau} + \sum_{|\nu|>n} c_{n,\nu} e^{i\nu\tau}. \quad (15.30)$$

Из (15.30) следует (15.28).

Глава 3

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

## § 16. Выражение полиномов $R_{\sigma,n}(z)$ через многочлены, ортогональные на окружности

При $z \in \mathbb{C},\ \ z \neq 0;\ \ \ n \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\varphi^*_{\sigma,n}(z) := z^n \overline{\varphi_{\sigma,n}(1/\overline{z})}. \tag{16.1}$$

**Теорема 16.1.** *При* $z \in \mathbb{C},\ \ z \neq 0$, *имеют место формулы*

$$R_{\sigma,2n}(z) = z^{-n}\varphi^*_{\sigma,2n}(z) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{16.2}$$

$$R_{\sigma,2n-1}(z) = z^{1-n}\varphi_{\sigma,2n-1}(z) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{16.3}$$

**Доказательство.** Введем обозначения

$$Q_{2n}(z) := z^{-n}\varphi^*_{\sigma,2n}(z) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{16.4}$$

$$Q_{2n-1}(z) := z^{1-n}\varphi_{\sigma,2n-1}(z) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{16.5}$$

Прежде всего заметим, что из формул (16.1) и (16.4)–(16.5) следует, что $|Q_n(e^{i\tau})|^2 = |\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2$ $(\tau \in \mathbb{R},\ \ n \in \mathbb{Z}_+)$. Поэтому в силу ортонормальности системы $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |Q_n(e^{i\tau})|^2 d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 d\sigma(\tau) = 1 \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{16.6}$$

Теперь заметим, что в силу (16.4) $Q_{2n}(z)$ есть линейная комбинация степеней $1, z, z^{-1}, \ldots, z^n, z^{-n}$. Ее старший коэффициент (т. е. коэффициент при $z^{-n}$) в силу (16.4) равен коэффициенту при $z^0$ у $\varphi^*_{\sigma,2n}(z)$, т. е. числу $\overline{\kappa_{\sigma,2n}} = \kappa_{\sigma,2n} > 0$. В силу определения $R_{\sigma,2n}(z)$, формулы (16.6) и первого критерия ортогональности для доказательства (16.2) остается показать, что для $n \in \mathbb{N}$ и $\nu = 0, \pm 1, \dots, \pm(n-1), n$

$$I_{2n,\nu} := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} Q_{2n}(e^{i\tau}) e^{-i\nu\tau} d\sigma(\tau) = 0. \qquad (16.7)$$

В силу (16.4) и (16.1)

$$I_{2n.\nu} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-in\tau} \varphi^*_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) e^{-i\nu\tau} d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-in\tau} e^{i2n\tau} \overline{\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})} e^{-i\nu\tau} d\sigma(\tau),$$

откуда

$$\overline{I_{2n,\nu}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) e^{-i(n-\nu)\tau} d\sigma(\tau). \qquad (16.8)$$

Так как (16.7) доказываем при $1 - n \le \nu \le n$, то в (16.8) $0 \le n - \nu \le 2n - 1$, а потому в силу ортогональности $\varphi_{\sigma,2n}(z)$ степеням $1, z, \dots, z^{2n-1}$ из (16.8) следует, что $\overline{I_{2n.\nu}} = 0$. Поэтому выполняется (16.7), т. е. (16.2) доказано.

Теперь докажем (16.3). В силу (16.5) $Q_{2n-1}(z)$ есть линейная комбинация степеней $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}, z^{1-n}, z^n$. Ее старший коэффициент (т. е. коэффициент при $z^n$) равен $\kappa_{\sigma,2n-1} > 0$. Отсюда в силу (16.6) и первого критерия ортогональности следует, что для доказательства (16.3) надо установить равенства

$$I_{2n-1,\nu} := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_{2n-1}(e^{i\tau})e^{-i\nu\tau}d\sigma(\tau) = 0 \qquad (16.9)$$

при $\nu = 0, \pm 1, \dots, \pm(n-1)$.

В силу (16.5)

$$I_{2n-1,\nu} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})e^{-i(n+\nu-1)\tau}d\sigma(\tau). \qquad (16.10)$$

Равенства (16.9) доказываем при условии $-(n-1) \leq \nu \leq$ $\leq n-1$, равносильном условию $0 \leq n+\nu-1 \leq 2n-2$. Но $\varphi_{\sigma,2n-1} \perp 1, z, \dots, z^{2n-2}$; следовательно, из (16.10) следует (16.9), а значит, и (16.3.). Теорема доказана.

## § 17. **Соотношения между ядрами систем** $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}$, $\{R_{\sigma,n}(z)\}$ **и** $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}$

Рассмотрим ядра

$$D^{(R)}_{\sigma,n}(z,\zeta) := \sum_{k=0}^{n} R_{\sigma,k}(z)\overline{R_{\sigma,k}(\zeta)} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \qquad (17.1)$$

$$D^{(T)}_{\sigma,n}(\theta,\tau) := \sum_{k=0}^{n} T_{\sigma,k}(\theta)T_{\sigma,k}(\tau) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+) \qquad (17.2)$$

и установим их связь с ядрами системы $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$.

**Теорема 17.1.** *При $z \neq 0$ и $\zeta \neq 0$ выполняются равенства*

$$D^{(R)}_{\sigma,2n}(z,\zeta) = (z\overline{\zeta})^{-n}K_{\sigma,2n}(z,\zeta) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \qquad (17.3)$$

$$D^{(R)}_{\sigma,2n-1}(z,\zeta) = (z\overline{\zeta})^{1-n}K_{\sigma,2n-1}(z,\zeta) \qquad (n \in \mathbb{N}). \qquad (17.4)$$

**Доказательство.** Сначала докажем (17.3). Полагая

$$A_k := R_{\sigma,2k-1}(z)\overline{R_{\sigma,2k-1}(\zeta)} + R_{\sigma,2k}(z)\overline{R_{\sigma,2k}(\zeta)} \qquad (17.5)$$

при $k \in \mathbb{N}$, в силу (16.2) и (16.3) имеем

$$A_k = z^{1-k}\varphi_{\sigma,2k-1}(z)\overline{\zeta}^{\,1-k}\overline{\varphi_{\sigma,2k-1}(\zeta)} + z^{-k}\varphi^*_{\sigma,2k}(z)\,\overline{\zeta}^{\,-k}\overline{\varphi^*_{\sigma,2k}(\zeta)}.$$

В правой части этого равенства вынесем за скобки $(z\overline{\zeta})^{-k}$, а затем внутри скобок добавим и вычтем $z\overline{\zeta}\varphi_{\sigma,2k}(z)\overline{\varphi_{\sigma,2k}(\zeta)}$. Тогда получим, что

$$A_k = (z\overline{\zeta})^{-k}\{[z\overline{\zeta}\varphi_{\sigma,2k-1}(z)\overline{\varphi_{\sigma,2k-1}(\zeta)} + z\overline{\zeta}\varphi_{\sigma,2k}(z)\overline{\varphi_{\sigma,2k}(\zeta)}]+$$

$$+[\varphi^*_{\sigma,2k}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,2k}(\zeta)} - z\overline{\zeta}\varphi_{\sigma,2k}(z)\overline{\varphi_{\sigma,2k}(\zeta)}]\}.$$

В силу (11.1) выражение в первых квадратных скобках есть $z\overline{\zeta}K_{\sigma,2k}(z,\zeta) - z\overline{\zeta}K_{\sigma,2k-2}(z,\zeta)$, а в силу (11.3) выражение во вторых квадратных скобках есть $(1 - z\overline{\zeta})K_{\sigma,2k}(z,\zeta)$. Поэтому

$$A_k = (z\overline{\zeta})^{-k}\{z\overline{\zeta}K_{\sigma,2k}(z,\zeta) - z\overline{\zeta}K_{\sigma,2k-2}(z,\zeta) + (1 - z\overline{\zeta})K_{\sigma,2k}(z,\zeta)\}.$$

Отсюда, раскрыв круглые скобки и вычеркнув слагаемые с противоположными знаками, получим, что

$$A_k = (z\overline{\zeta})^{-k}\{K_{\sigma,2k}(z,\zeta) - z\overline{\zeta}K_{\sigma,2k-2}(z,\zeta)\} =$$

$$= (z\overline{\zeta})^{-k}K_{\sigma,2k}(z,\zeta) - (z\overline{\zeta})^{1-k}K_{\sigma,2k-2}(z,\zeta)\} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Поэтому

$$A_1 + \cdots + A_n = (z\overline{\zeta})^{-n}K_{\sigma,2n}(z,\zeta) - (z\overline{\zeta})^0 K_{\sigma,0}(z,\zeta). \qquad (17.6)$$

Вычитаемое в правой части (17.6) есть $\kappa^2_{\sigma,0} = R_{\sigma,0}(z)\overline{R_{\sigma,0}(\zeta)}$, так что, учитывая (17.5), вместо (17.6) можем написать

$$\sum_{k=1}^{n}[R_{\sigma,2k-1}(z)\overline{R_{\sigma,2k-1}(\zeta)} + R_{\sigma,2k}(z)\overline{R_{\sigma,2k}(\zeta)}] =$$

$$= (z\overline{\zeta})^{-n}K_{\sigma,2n}(z,\zeta) - R_{\sigma,0}(z)\overline{R_{\sigma,0}(\zeta)}.$$

Прибавляя $R_{\sigma,0}(z)\overline{R_{\sigma,0}(\zeta)}$ к обеим частям этого равенства, в силу (17.1) получаем (17.3).

Теперь докажем (17.4). В силу (17.1), (17.3) и (16.2)

$$D^{(R)}_{\sigma,2n-1}(z,\zeta) = D^{(R)}_{\sigma,2n}(z,\zeta) - R_{\sigma,2n}(z)\overline{R_{\sigma,2n}(\zeta)} =$$

$$= (z\overline{\zeta})^{-n}K_{\sigma,2n}(z,\zeta) - (z\overline{\zeta})^{-n}\varphi^*_{\sigma,2n}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,2n}(\zeta)} =$$

$$= [(z\overline{\zeta})^{-n}K_{\sigma,2n}(z,\zeta) - (z\overline{\zeta})^{-n}\varphi_{\sigma,2n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,2n}(\zeta)}] -$$

$$-[(z\overline{\zeta})^{-n}\varphi^*_{\sigma,2n}(z)\overline{\varphi^*_{\sigma,2n}(\zeta)} - (z\overline{\zeta})^{-n}\varphi_{\sigma,2n}(z)\overline{\varphi_{\sigma,2n}(\zeta)}].$$

Выражение в первых квадратных скобках совпадает с $(z\overline{\zeta})^{-n}K_{\sigma,2n-1}(z,\zeta)$, а во вторых квадратных скобках (в силу (11.2)) — есть $(1-z\overline{\zeta})(z\overline{\zeta})^{-n}K_{\sigma,2n-1}(z,\zeta)$. Таким образом,

$$D^{(R)}_{\sigma,2n-1}(z,\zeta) = (z\overline{\zeta})^{-n}K_{\sigma,2n-1}(z,\zeta) - (1-z\overline{\zeta})(z\overline{\zeta})^{-n}K_{\sigma,2n-1}(z,\zeta).$$

Отсюда легко следует (17.4).

**Теорема 17.2.** *При всех $n \in \mathbb{Z}_+$, $\theta$ и $\tau \in \mathbb{R}$*

$$D^{(T)}_{\sigma,2n}(\theta,\tau) = D^{(R)}_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau}). \tag{17.7}$$

**Доказательство.** Поскольку любой комплексный тригонометрический полином $t_n(\tau)$ порядка не выше $n$ имеет вид $t_{n,1}(\tau)+it_{n,2}(\tau)$, где $t_{n,1}$ и $t_{n,2}$ — вещественные тригонометрические полиномы порядка не выше $n$, то $t_n(\tau)$ можно представить в виде

$$t_n(\tau) = \sum_{k=0}^{2n} c_k T_{\sigma,k}(\tau), \tag{17.8}$$

где $c_k$ $(k = 0,1,\ldots,2n)$ — комплексные числа вида (см. замечание 2.1)

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} t_n(\tau)T_{\sigma,k}(\tau)\,d\sigma(\tau). \tag{17.9}$$

В силу (17.8) и (17.9) заключаем, что при $\theta \in \mathbb{R}$

$$t_n(\theta) = \sum_{k=0}^{2n} c_k T_{\sigma,k}(\theta) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} t_n(\tau) T_{\sigma,k}(\tau)\, d\sigma(\tau) T_{\sigma,k}(\theta).$$

С учетом (17.2) это равенство можно переписать в виде

$$t_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} t_n(\tau) D^{(T)}_{\sigma,2n}(\theta,\tau)\, d\sigma(\tau). \tag{17.10}$$

Аналогично проверяется, что любой полином

$$r_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k z^k \qquad (\lambda_k \in \mathbb{C}) \tag{17.11}$$

представляется в виде

$$r_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} r_n(e^{i\tau}) D^{(R)}_{\sigma,2n}(z, e^{i\tau})\, d\sigma(\tau). \tag{17.12}$$

В силу формул Эйлера $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ и $2i \sin\theta = = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ любой тригонометрический полином (17.8) с комплексными коэффициентами легко представляется в виде $t_n(\theta) = r_n(e^{i\theta})$ (см. (17.11). Поэтому из (17.12) вытекает, что

$$t_n(\theta) = r_n(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} r_n(e^{i\tau}) D^{(R)}_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})\, d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} t_n(\tau) D^{(R)}_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})\, d\sigma(\tau). \tag{17.13}$$

Из (17.10) и (17.13) следует, что для любого полинома (17.8)

$$0 = t_n(\theta) - t_n(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} t_n(\tau)[D^{(T)}_{\sigma,2n}(\theta,\tau) - D^{(R)}_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})]\, d\sigma(\tau). \qquad (17.14)$$

Положив в (17.14)

$$t_n(\tau) = t_{n,\theta}(\tau) := \overline{D^{(T)}_{\sigma,2n}(\theta,\tau)} - \overline{D^{(R)}_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})},$$

получим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D^{(T)}_{\sigma,2n}(\theta,\tau) - D^{(R)}_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})|^2\, d\sigma(\tau) = 0. \qquad (17.15)$$

Так как $\sigma(\tau)$ имеет бесконечное множество точек роста, то из (17.15) вытекает равенство $D^{(T)}_{\sigma,2n}(\theta,\tau) - D^{(R)}_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau}) = 0$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$. Теорема 17.2 доказана.

**Следствие 17.3.** *При всех $n \in \mathbb{Z}_+$, $\theta$ и $\tau \in \mathbb{R}$*

$$D^{(T)}_{\sigma,2n}(\theta,\tau) = D^{(R)}_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau}) = e^{-in(\theta-\tau)} K_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau}). \qquad (17.16)$$

Доказательство следует из (17.7) и (17.3).

**Замечание 17.4.** Так как $D^{(T)}_{\sigma,2n}(\theta,\tau)$ при всех $\theta$ и $\tau \in \mathbb{R}$ принимает действительные значения, то в силу (17.16) тем же свойством обладают $D^{(R)}_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})$ и $e^{-in(\theta-\tau)} K_{\sigma,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau})$.

## § 18. **Выражение действительных и мнимых частей полиномов $R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})$ и $R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$ через $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$**

Полиномы

$$R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}), \;\; R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) \qquad (n \in \mathbb{N}) \qquad (18.1)$$

ортогональны гармоникам

$$1, e^{i\tau}, e^{-i\tau}, \dots, e^{i(n-1)\tau}, e^{-i(n-1)\tau} \tag{18.2}$$

в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_{\sigma,k}(e^{i\tau})\, e^{\pm i\nu\tau} d\sigma(\tau) = 0 \tag{18.3}$$

при $\nu = 0, 1, \dots, n-1$; $k = 2n-1, 2n$. Следовательно, таким же свойством обладают любые линейные комбинации полиномов (18.1) и комплексно-сопряженных к ним и, в частности, функции

$$u_{\sigma,k}(\tau) := \Re R_{\sigma,k}(e^{i\tau}),\ v_{\sigma,k}(\tau) := \Im R_{\sigma,k}(e^{i\tau}) \tag{18.4}$$

при $k = 2n-1, 2n$. Всюду в этом параграфе для тригонометрических полиномов порядка не выше $n$ будем использовать обозначения: $t_n(\tau)$, $t_{n,1}(\tau)$, $t_{n,2}(\tau), \dots$ . Поскольку любой $t_{n-1}(\tau)$ есть линейная комбинация гармоник (18.2), то функции (18.4), являясь ортогональными этим гармоникам, ортогональны любому $t_{n-1}(\tau)$, а потому и полиномам $\{T_{\sigma,\nu}(\tau)\}_{\nu=0}^{2n-2}$ :

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_{\sigma,k}(\tau)T_{\sigma,\nu}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{\sigma,\nu}(\tau)T_{\sigma,\nu}(\tau)d\sigma(\tau) = 0 \tag{18.5}$$

$$(\nu = 0, 1, \dots, 2n-2; k = 2n-1, 2n).$$

Функции (18.4) суть тригонометрические полиномы порядка $n$, а потому являются линейными комбинациями полиномов $\{T_{\sigma,\nu}(\tau)\}_{\nu=0}^{2n}$. В силу (18.5) у этих линейных комбинаций отличными от нуля могут быть разве лишь коэффициенты при $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$. Задачу нахождения этих коэффициентов решает следующая

**Теорема 18.1.** *При $n \in \mathbb{N}$ для функций* (18.4) *имеют место следующие представления в виде линейных комбинаций полиномов $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$:*

$$u_{\sigma,2n-1}(\tau) = (c_n)^{-1} T_{\sigma,2n-1}(\tau), \tag{18.6}$$

$$v_{\sigma,2n-1}(\tau) = -\frac{c_n}{2}\frac{\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}T_{\sigma,2n-1}(\tau)+$$

$$+\frac{c_n}{2}\frac{\kappa_{\sigma,2n-1}}{\kappa_{\sigma,2n}}T_{\sigma,2n}(\tau), \tag{18.7}$$

$$u_{\sigma,2n}(\tau) = \frac{c_n}{2}\frac{\kappa_{\sigma,2n-1}}{\kappa_{\sigma,2n}}T_{\sigma,2n-1}(\tau)+$$

$$+\frac{c_n}{2}\frac{\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}T_{\sigma,2n}(\tau), \tag{18.8}$$

$$v_{\sigma,2n}(\tau) = -\frac{1}{c_n}T_{\sigma,2n}(\tau), \tag{18.9}$$

*где* $\kappa_{\sigma,2n}$ *— старший коэффициент многочлена* $\varphi_{\sigma,2n}(z)$,

$$c_n := \sqrt{\frac{2\kappa_{\sigma,2n}}{\kappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)}}. \tag{18.10}$$

**Доказательство.** Вместо $R_{\sigma,k}(e^{i\tau}), u_{\sigma,k}(\tau), v_{\sigma,k}(\tau)$ для краткости иногда будем писать $R_k, u_k, v_k$, соответственно. Через $c_{n,k}$ будем обозначать коэффициент при $z^k$ многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$. Таким образом,

$$\varphi_{\sigma,n}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}z^k, \;\; c_{n,n} = \kappa_{\sigma,n} > 0, \;\; c_{n,0} = \varphi_{\sigma,n}(0). \tag{18.11}$$

Докажем (18.6). В силу (16.3), (18.4) и (18.11) имеем

$$u_{\sigma,2n-1}(\tau) = \Re\, R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) = \Re\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\} =$$

$$= \Re\left\{\sum_{k=0}^{2n-1} c_{2n-1,k}e^{i(k+1-n)\tau}\right\} = \Re\left\{\sum_{\nu=1-n}^{n} c_{2n-1,n+\nu-1}e^{i\nu\tau}\right\} =$$

$$= \Re(c_{2n-1,2n-1}e^{in\tau}) + t_{n-1,2}(\tau) =$$

$$= \kappa_{\sigma,2n-1}\cos n\tau + t_{n-1,2}(\tau). \tag{18.12}$$

Из (18.12) видно, что $u_{\sigma,2n-1}(\tau)$ есть линейная комбинация гармоник $1, \cos\tau, \sin\tau, \ldots, \cos(n-1)\tau, \sin(n-1)\tau, \cos n\tau$ с положительным старшим коэффициентом $\kappa_{\sigma,2n-1}$. Согласно (18.5) полином $u_{\sigma,2n-1}(\tau)$ ортогонален по мере $d\sigma(\tau)$ любому $t_{n-1,3}(\tau)$. Поэтому в силу первого критерия ортогональности

$$u_{\sigma,2n-1}(\tau) = b_n T_{\sigma,2n-1}(\tau) \tag{18.13}$$

при некотором $b_n > 0$. Найдем $b_n$. Из ортонормальности $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ в силу (18.13) следует, что

$$b_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[b_n T_{\sigma,2n-1}(\tau)]^2 d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^2_{\sigma,2n-1}(\tau)d\sigma(\tau). \tag{18.14}$$

С учетом (18.4), (16.2) и (7.4) имеем

$$u^2_{2n-1} = (\Re R_{2n-1})^2 = \frac{1}{4}(R^2_{2n-1} + 2|R_{2n-1}|^2 + \overline{R^2_{2n-1}}) =$$

$$= \frac{1}{2}|\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})|^2 + \frac{1}{2}\Re[e^{-(2n-2)\tau}\varphi^2_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})]. \tag{18.15}$$

Подставляя правую часть (18.15) в (18.14), получаем

$$b_n^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(2n-2)\tau}\varphi^2_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau)] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1} c_{2n-1,k}e^{-i(2n-2-k)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=-1}^{2n-2} c_{2n-1,2n-2-\nu}e^{-i\nu\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa_{\sigma,2n-1}e^{i\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau)\right]. \tag{18.16}$$

Пользуясь (8.1), замечаем, что

$$I_{n,1} := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \kappa_{\sigma,n} e^{i\tau}\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})d\sigma(\tau) = -\frac{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}{\kappa_{\sigma,n+1}}. \qquad (18.17)$$

Из (18.16), (18.17) и (18.10) следует, что

$$b_n^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re I_{2n-1,1} = \frac{1}{2} - \frac{\Re\varphi_{\sigma,2n}(0)}{2\kappa_{\sigma,2n}} = \frac{1}{c_n^2}. \qquad (18.18)$$

В силу положительности чисел $b_n$ и $c_n$ из (18.18) вытекает, что

$$b_n = 1/c_n. \qquad (18.19)$$

Из (18.13) и (18.19) выводим (18.6).

Теперь докажем (18.9). Для этого (с учетом (18.5)) установим ортогональность по мере $d\sigma(\tau)$ полиномов $v_{2n}$ и $u_{2n-1}$ (а в силу (18.6) она равносильна ортогональности по мере $d\sigma(\tau)$ полиномов $v_{2n}$ и $T_{\sigma,2n-1}$), на основании чего придем к формуле

$$v_{\sigma,2n}(\tau) = d_n T_{\sigma,2n}(\tau). \qquad (18.20)$$

После этого останется доказать, что

$$d_n = -1/c_n. \qquad (18.21)$$

Приступая к доказательству ортогональности $v_{2n}$ по мере $d\sigma$ к $u_{2n-1}$, замечаем, что в силу (18.4)

$$v_{2n}\, u_{2n-1} = (2i)^{-1}(R_{2n} - \overline{R_{2n}})\cdot 2^{-1}(R_{2n-1} + \overline{R_{2n-1}}) =$$

$$= (4i)^{-1}(R_{2n}R_{2n-1} - \overline{R_{2n}}R_{2n-1} + R_{2n}\overline{R_{2n-1}} - \overline{R_{2n}R_{2n-1}}) =$$

$$= (4i)^{-1}[2i\Im(R_{2n}R_{2n-1}) + 2i\Im(R_{2n}\overline{R_{2n-1}})] =$$

$$= 2^{-1}[\Im(R_{2n}R_{2n-1}) + \Im(R_{2n}\overline{R_{2n-1}})].$$

Поэтому

$$I_{n,2} := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{\sigma,2n}(\tau)u_{\sigma,2n-1}(\tau)\,d\sigma(\tau) =$$

$$= 2^{-1}\Im\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\,d\sigma(\tau)\right]+$$

$$+2^{-1}\Im\left[(2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\overline{R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})}\,d\sigma(\tau)\right]. \tag{18.22}$$

Последний интеграл равен нулю. Поэтому

$$I_{n,2} = 2^{-1}\Im I_{n,3}, \tag{18.23}$$

где

$$I_{n,3} := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{in\tau}\overline{\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\overline{\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}\sum_{k=0}^{2n-1} c_{2n-1,k}e^{i(k+1)\tau}d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{\kappa_{\sigma,2n-1}}{\kappa_{\sigma,2n}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})|^2 d\sigma(\tau) = \frac{\kappa_{\sigma,2n-1}}{\kappa_{\sigma,2n}}. \tag{18.24}$$

Из (18.22)–(18.24) получаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{\sigma,2n}(\tau)u_{\sigma,2n-1}(\tau)d\sigma(\tau) = \frac{1}{2}\Im\frac{\kappa_{\sigma,2n-1}}{\kappa_{\sigma,2n}} = 0 \tag{18.25}$$

(как мнимая часть положительного числа). Поэтому, как отмечалось выше, выполняется (18.20). Докажем (18.21). В силу (18.20)

$$d_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[d_n T_{\sigma,2n}(\tau)]^2 d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Im R_{2n})^2 d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{R_{2n}-\overline{R_{2n}}}{2i})^2 d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2|R_{2n}|^2 - R_{2n}^2 - \overline{R_{2n}^2})d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Re[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{R_{2n}^2}\,d\sigma(\tau)]. \qquad (18.26)$$

Вычисляем последний интеграл:

$$I_{n,4} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{R_{2n}^2}d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[e^{-i2n\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})]\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\sum_{k=0}^{2n}c_{2n,k}\ e^{-i(2n-k)\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\sum_{\nu=0}^{2n}c_{2n,2n-\nu}\ e^{-i\nu\tau}d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\ c_{2n,0}\ e^{-i2n\tau}d\sigma(\tau) = \frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}. \qquad (18.27)$$

Из (18.26), (18.27) и (18.10) следует, что

$$d_n^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\Re\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}} = \frac{1}{c_n^2}. \tag{18.28}$$

Для получения (18.21) из (18.28) надо показать, что

$$d_n < 0. \tag{18.29}$$

В силу (18.4)

$$v_{2n} = \Im R_{2n} = -\Im\overline{R_{2n}} = -\Im\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\} =$$

$$= -\Im\sum_{k=0}^{2n} c_{2n,k}e^{i(k-n)\tau} = -\Im\sum_{\nu=-n}^{n} c_{2n,n+\nu}e^{i\nu\tau} =$$

$$= -\Im(c_{2n,0}e^{-in\tau} + c_{2n,2n}e^{in\tau}) + t_{n-1,4}(\tau) =$$

$$= t_{n-1,4}(\tau) - \Im\{[\Re\varphi_{\sigma,2n}(0) + i\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)](\cos n\tau - i\sin n\tau)+$$

$$+\kappa_{\sigma,2n}(\cos n\tau + i\sin n\tau)\} =$$

$$= t_{n-1,4}(\tau) - \kappa_{\sigma,2n}\sin n\tau - \{\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)\}\cos n\tau + \{\Re\varphi_{\sigma,2n}(0)\}\sin n\tau.$$

Отсюда видно, что старший коэффициент полинома $v_{2n}$ (т. е. коэффициент при $\sin n\tau$ ) равен $\Re\varphi_{\sigma,2n}(0) - \kappa_{\sigma,2n}$. Это влечет его отрицательность, так как при $n \in \mathbb{N}$ имеем неравенство $|\varphi_{\sigma,n}(0)| < \kappa_{\sigma,n}$ (см. (8.16)). В силу этого с учетом положительности старшего коэффициента у $T_{\sigma,2n}(\tau)$ можно заключить, что в (18.20) $d_n < 0$. Так как $d_n < 0$, $c_n > 0$, то из (18.28) следует (18.21), и (18.20) превращается в (18.9).

Докажем (18.7). Для этого сначала вычислим соответствующие коэффициенты Фурье функции $v_{2n-1}(\tau)$ по системе $\{T_{\sigma,k}(\tau)\}$. В силу (18.6) и (18.4)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{2n-1}T_{\sigma,2n-1}d\sigma(\tau) = c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{2n-1}u_{2n-1}d\sigma(\tau) =$$

$$= c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R_{2n-1}-\overline{R_{2n-1}}}{2i}\cdot\frac{R_{2n-1}+\overline{R_{2n-1}}}{2}d\sigma(\tau) =$$

$$= c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2_{2n-1}-\overline{R^2_{2n-1}}}{4i}d\sigma(\tau) = c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2i\Im R^2_{2n-1}}{4i}d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{c_n}{2}\Im\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R^2_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau)\} =$$

$$= \frac{c_n}{2}\Im\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(2n-2)\tau}\varphi^2_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})d\sigma(\tau)\}. \qquad (18.30)$$

Последний интеграл в (18.30) есть $I_{2n-1,1} = -\varphi_{\sigma,2n}(0)/\kappa_{\sigma,2n}$ (см.(18.17)). Поэтому (18.30) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{\sigma,2n-1}(\tau)T_{\sigma,2n-1}(\tau)d\sigma(\tau) = -\frac{c_n}{2}\frac{\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}. \qquad (18.31)$$

Аналогично в силу (18.9) и (18.4) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{2n-1}T_{\sigma,2n}d\sigma(\tau) = -c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{2n-1}v_{2n}d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{c_n}{4}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(R_{2n-1}-\overline{R_{2n-1}})(R_{2n}-\overline{R_{2n}})d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{c_n}{4}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(R_{2n-1}R_{2n}-\overline{R_{2n-1}}R_{2n} - R_{2n-1}\overline{R_{2n}}+\overline{R_{2n-1}R_{2n}})d\sigma(\tau)=$$

$$= \frac{c_n}{2}\Re\Bigg\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_{2n-1}R_{2n}d\sigma(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}d\sigma(\tau)\Bigg\} =$$

$$= \frac{c_n}{2}\Re\Bigg\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})d\sigma(\tau)\Bigg\}.$$

Отсюда в силу (18.24) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{2n-1}T_{\sigma,2n}d\sigma(\tau) = \frac{c_n}{2}\frac{\kappa_{\sigma,2n-1}}{\kappa_{\sigma,2n}}. \tag{18.32}$$

Из (18.5), (18.31) и (18.32) следует (18.7).

Формулу (18.8) доказываем аналогично (18.7). В силу (18.6) и (18.4)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_{2n}T_{\sigma,2n-1}d\sigma(\tau) = c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_{2n}u_{2n-1}d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{4}c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(R_{2n} + \overline{R_{2n}})(R_{2n-1} + \overline{R_{2n-1}})d\sigma(\tau) =$$

$$=\frac{1}{4}c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(R_{2n}R_{2n-1}+R_{2n}\overline{R_{2n-1}}+\overline{R_{2n}}R_{2n-1}+\overline{R_{2n}R_{2n-1}})d\sigma(\tau)=$$

$$= \frac{1}{2}c_n\Re\Bigg\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_{2n}R_{2n-1}d\sigma(\tau)\Bigg\}.$$

В силу (18.24) отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_{2n}T_{\sigma,2n-1} = \frac{c_n}{2}\frac{\kappa_{\sigma,2n-1}}{\kappa_{\sigma,2n}}. \tag{18.33}$$

С учетом (18.9) и (18.4) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_{\sigma,2n}T_{\sigma,2n}d\sigma(\tau) = -c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_{2n}v_{2n}d\sigma(\tau) =$$

$$= -c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(R_{2n}+\overline{R_{2n}})(R_{2n}-\overline{R_{2n}})}{4i}d\sigma(\tau) =$$

$$= c_n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\overline{R_{2n}})^2-R_{2n}^2}{4i}d\sigma(\tau) = \frac{c_n}{2}\Im\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\overline{R_{2n}})^2d\sigma(\tau)\right\}.$$

Отсюда в силу (18.27) получаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_{2n}T_{\sigma,2n}d\sigma(\tau) = \frac{c_n}{2}\frac{\Im\,\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}. \tag{18.34}$$

Из (18.5), (18.33) и (18.34) выводим (18.8).

## § 19. **Нули тригонометрических ортогональных полиномов**

В случае меры $d\sigma(\tau) = d\tau$ полиномы $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ лишь постоянными множителями отличаются от гармоник $\cos n\tau$ и $\sin n\tau$. Нули последних являются простыми и перемежаются. Любой промежуток $[c, c+2\pi)$ содержит $2n$ нулей каждой из этих гармоник. Следующая теорема показывает, что перечисленные свойства нулей гармоник $\cos n\tau$ и $\sin n\tau$ справедливы и для полиномов $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ в случае произвольной неубывающей функции $\sigma(\tau)$ с бесконечным множеством точек роста. Более того, эти свойства нулей верны и для некоторых полиномов $G_n(\tau)$ и $F_n(\tau)$, являющихся линейными комбинациями полиномов $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$.

**Теорема 19.1.** *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 > 0$. Тогда тригонометрические полиномы*

$$F_n(\tau) := aT_{\sigma,2n-1}(\tau) + bT_{\sigma,2n}(\tau) \tag{19.1}$$

*и*

$$G_n(\tau) := -bT_{\sigma,2n-1}(\tau) + aT_{\sigma,2n}(\tau) \tag{19.2}$$

*на любом промежутке $[c, c+2\pi)$ имеют по $2n$ нулей; все эти нули являются простыми. Нули $F_n(\tau)$ и $G_n(\tau)$ перемежаются ( т.е. между двумя соседними нулями одного из этих полиномов имеется один и только один нуль другого).*

**Доказательство.** Сначала рассмотрим важный частный случай: $a = 1$, $b = 0$, т. е. случай, когда $F_n(\tau) = T_{\sigma,2n-1}(\tau)$, $G_n(\tau) = T_{\sigma,2n}(\tau)$. В этом случае, воспользовавшись формулами (18.9), (18.4), (16.2), (7.4), получим, что

$$T_{\sigma,2n}(\tau) = -c_n v_{\sigma,2n}(\tau) =$$

$$= -c_n \Im\{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\} = c_n \Im\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\}. \tag{19.3}$$

Легко видеть, что

$$\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = |\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})| e^{i\gamma_{\sigma,2n}(\tau)}, \tag{19.4}$$

где $\gamma_{\sigma,2n}(\tau)$ — любая из ветвей функции $\arg \varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$. В силу (19.3) и (19.4)

$$T_{\sigma,2n}(\tau) = c_n |\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})| \sin \Gamma_{\sigma,2n}(\tau), \tag{19.5}$$

где

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\tau) := \gamma_{\sigma,2n}(\tau) - n\tau. \tag{19.6}$$

В силу (19.5) и теоремы 12.1 нули полинома $T_{\sigma,2n}(\tau)$ совпадают с нулями функции $\sin\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$.

Из (19.6) и (13.7) выводим равенство

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)-\Gamma_{\sigma,2n}(\theta)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\tau}|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|^{-2}\sum_{\nu=0}^{2n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^{2}\,du. \tag{19.7}$$

При $\tau=\theta+2\pi$ из (19.7) следует, что

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\theta+2\pi)-\Gamma_{\sigma,2n}(\theta)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\theta+2\pi}|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|^{-2}\sum_{\nu=0}^{2n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^{2}\,du. \tag{19.8}$$

Поскольку в (19.8) подынтегральная функция $2\pi$-периодична, а интеграл берется по отрезку длины $2\pi$, то (19.8) можно переписать в виде

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\theta+2\pi)-\Gamma_{\sigma,2n}(\theta)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|^{-2}\sum_{\nu=0}^{2n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^{2}\,du. \tag{19.9}$$

Поскольку (см. следствие 15.7) выполняются равенства

$$c_{\nu}:=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{-i\nu\tau}\,d\sigma(\tau)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{-i\nu\tau}\frac{d\tau}{|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^{2}}\qquad(\nu=0,1,\ldots,2n),$$

то детерминантные представления соответственных многочленов с номерами $\nu=0,1,\ldots,2n$, ортонормированных относительно мер $d\sigma(u)$ и $|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|^{-2}\,du$, совпадают. Поэтому в

(19.9) вместо $|\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})|^{-2}du$ можно писать $d\sigma(u)$. Таким образом,

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\theta+2\pi)-\Gamma_{\sigma,2n}(\theta)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{\nu=0}^{2n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2\,d\sigma(u). \quad (19.10)$$

Заметим, что вывести (19.10) из (19.9) можно, рассуждая и следующим образом. По теореме 9.1 многочлен $\varphi_{\sigma,2n}(z)$ совпадает с многочленом того же порядка, ортонормальным по мере $|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|^{-2}\,du$. В силу формул (7.5) и (7.6), зная многочлен $\varphi_{\sigma,2n}(z)$, можно последовательно вычислить многочлены $\varphi^*_{\sigma,2n}(z)$, $\varphi_{\sigma,2n-1}(z)$, $\varphi^*_{\sigma,2n-1}(z),\ldots,$ $\varphi_{\sigma,0}(z)$, $\varphi^*_{\sigma,0}(z)$. Таким образом, ортонормальные относительно мер $d\sigma(u)$ и $|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|^{-2}\,du$ многочлены порядка $\nu$ при $\nu=0,1,\ldots,2n$ совпадают.

В силу ортонормальности системы $\{\varphi_{\sigma,\nu}(z)\}_{\nu=0}^{\infty}$ по мере $d\sigma(\tau)$ из (19.10) следует, что

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\theta+2\pi)-\Gamma_{\sigma,2n}(\theta)=2\pi n. \quad (19.11)$$

Из (19.7) и (19.11) видно, что когда $\tau$ пробегает, возрастая, отрезок длины $2\pi$, то $\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$ пробегает, возрастая, отрезок длины $2\pi n$. Поэтому $\sin\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$, а вместе с ним и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ на любом промежутке $[c,c+2\pi)$ имеет $2n$ попарно различных нулей. Поскольку на таком промежутке тригонометрический полином не может иметь более чем $2n$ нулей, считая с кратностями, то все нули полинома $T_{\sigma,2n}(\tau)$ являются простыми.

Аналогично (19.5) устанавливается равенство

$$u_{\sigma,2n}(\tau)=|\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})|\cos\Gamma_{\sigma,2n}(\tau). \quad (19.12)$$

Сравнивая (19.5) с (19.12), заключаем, что нули $u_{\sigma,2n}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ перемежаются. Кроме того, из (19.12) видно, что все нули полинома $u_{\sigma,2n}(\tau)$ являются простыми. В силу этого в смежных интервалах, концами которых служат нули полинома $u_{\sigma,2n}(\tau)$, этот полином имеет разные знаки. Следовательно, в соседних нулях полинома $T_{\sigma,2n}(\tau)$ полином $u_{\sigma,2n}(\tau)$ имеет разные знаки. Отсюда в силу (18.8) следует, что в соседних нулях $T_{\sigma,2n}(\tau)$ полином $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ имеет разные знаки, а потому между этими нулями обращается в нуль. Таким образом, $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ на любом промежутке $[c, c+2\pi)$ имеет $2n$ попарно различных нулей, и все эти нули являются простыми и перемежаются с нулями $T_{\sigma,2n}(\tau)$. Итак, в случае, когда $a = 1$, $b = 0$, теорема 19.1 доказана.

В случае произвольных $a$ и $b \in \mathbb{R}$, для которых $a^2 + b^2 > 0$, рассуждаем следующим образом. Пусть, например, $a \neq 0$. Тогда из (19.1) видно, что в соседних нулях полинома $T_{\sigma,2n}(\tau)$ полином $F_n(\tau)$ имеет разные знаки, так как этим же свойством обладает $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$. Следовательно, между этими нулями $F_n(\tau)$ обращается в нуль, нули $F_n(\tau)$ перемежаются с нулями $T_{\sigma,2n}(\tau)$, на $[c, c+2\pi)$ $F_n(\tau)$ имеет $2n$ попарно различных нулей, и все эти нули являются простыми.

В силу (19.1) в соседних нулях $\tau'$ и $\tau''$ полинома $F_n(\tau)$ выполняются равенства

$$T_{\sigma,2n-1}(\tau') = -\frac{b}{a} T_{\sigma,2n}(\tau'), \quad T_{\sigma,2n-1}(\tau'') = -\frac{b}{a} T_{\sigma,2n}(\tau''),$$

из которых в силу (19.2) следует, что

$$G_n(\tau') = \frac{a^2 + b^2}{a} T_{\sigma,2n}(\tau'), \quad G_n(\tau'') = \frac{a^2 + b^2}{a} T_{\sigma,2n}(\tau''). \quad (19.13)$$

В силу перемежаемости нулей $F_n(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ правые части равенств (19.13) имеют разные знаки. Поэтому между $\tau'$ и $\tau''$ имеется нуль полинома $G_n(\tau)$. Отсюда вытекает справедливость теоремы 19.1 в случае, когда $a \neq 0$. Аналогично рассматривается случай, когда $b \neq 0$.

Глава 4

# МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА ОТРЕЗКЕ

## § 20. Рекуррентные соотношения. Формула Кристоффеля–Дарбу

**Теорема 20.1.** *Три последовательных многочлена системы* $\{p_{\alpha,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ *(ортонормальной по мере* $d\alpha(t)$ *в интервале* $(-\infty,\infty)$*) связаны соотношением*

$$tp_{\alpha,n}(t) = A_n p_{\alpha,n+1}(t) + B_n p_{\alpha,n}(t) + \\ + A_{n-1} p_{\alpha,n-1}(t) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{20.1}$$

*где* $A_n$ *выражается через старшие коэффициенты многочленов* $p_{\alpha,n}(t)$ *и* $p_{\alpha,n+1}(t)$ *по формуле*

$$A_n = \frac{k_{\alpha,n}}{k_{\alpha,n+1}} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{20.2}$$

$$A_{-1} = p_{\alpha,-1}(t) = 0, \tag{20.3}$$

$$B_n = \int_{-\infty}^{\infty} tp_{\alpha,n}^2(t) d\alpha(t) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{20.4}$$

**Доказательство.** Разлагая многочлен $tp_{\alpha,n}(t)$ степени $n+1$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ по системе $\{p_{\alpha,\nu}(t)\}_{\nu=0}^{n+1}$, имеем

$$tp_{\alpha,n}(t) = \sum_{\nu=0}^{n+1} a_{n,\nu} p_{\alpha,\nu}(t). \tag{20.5}$$

Умножив на $p_{\alpha,k}(t)d\alpha(t) \quad (k = 0, 1, \ldots, n+1)$ обе части равенства (20.5) и затем проинтегрировав полученное при этом соотношение, получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} tp_{\alpha,n}(t)p_{\alpha,k}(t)\, d\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^{n+1} a_{n,\nu} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha,\nu}(t)p_{\alpha,k}(t)\, d\alpha(t) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n+1} a_{n,\nu}\delta_{\nu,k} = a_{n,k}\delta_{k,k} = a_{n,k}. \qquad (20.6)$$

Пусть $n \geq 2$, $k < n-1$. Тогда $\deg\{tp_{\alpha,k}(t)\} = k+1 < n$, а потому $p_{\alpha,n}(t) \perp tp_{\alpha,k}(t)$ $(k < n-1)$. Поэтому в силу (20.6)

$$a_{n,k} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2),$$

так что разложение (20.5) имеет вид

$$tp_{\alpha,n}(t) = a_{n,n+1}p_{\alpha,n+1}(t) + a_{n,n}p_{\alpha,n}(t) + a_{n,n-1}p_{\alpha,n-1}(t). \quad (20.7)$$

При $n = 1$ формула (20.7), очевидно, также справедлива. Если $n = 0$, то в правой части формулы (20.7) последнее слагаемое отсутствует, что согласуется с равенствами (20.3).

Коэффициент $a_{n,n+1}$ в соотношении (20.7) находим, сравнивая коэффициенты при $t^{n+1}$ в обеих его частях. При этом получаем уравнение $k_{\alpha,n} = a_{n,n+1}k_{\alpha,n+1}$, в силу которого в соотношении (20.7)

$$a_{n,n+1} = k_{\alpha,n}/k_{\alpha,n+1} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \qquad (20.8)$$

Полагая $A_n := a_{n,n+1}$, в силу (20.8) имеем равенство (20.2).

Учитывая (20.6), при $n \in \mathbb{N}$ получаем равенства

$$a_{n,n-1} = \int_{-\infty}^{\infty} tp_{\alpha,n}(t)p_{\alpha,n-1}(t)\,d\alpha(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} tp_{\alpha,n}(t)p_{\alpha,n-1}(t)\,d\alpha(t) = a_{n-1,n}.$$

Следовательно, согласно (20.8) $a_{n,n-1} = A_{n-1} = k_{\alpha,n-1}/k_{\alpha,n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Наконец, положим $B_n := a_{n,n}$. В новых обозначениях (20.7) переписывается в виде (20.1). При этом выполняются равенства (20.2)–(20.4). Теорема 20.1 доказана.

**Замечание 20.2.** В случае, когда выполняются равенства $\alpha(t) = \alpha(-1)$ $(t \leq -1)$, $\alpha(t) = \alpha(1)$ $(t \geq 1)$, т. е. когда система $\{p_{\alpha,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормальна по мере $d\alpha(t)$ на отрезке $[-1, 1]$, в силу (20.6) и неравенства Коши справедливы соотношения

$$|a_{n,k}| = \left| \int_{-1}^{1} t p_{\alpha,n}(t) p_{\alpha,k}(t) d\alpha(t) \right| \leq$$

$$\leq \left\{ \int_{-1}^{1} [t p_{\alpha,n}(t)]^2 d\alpha(t) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-1}^{1} p_{\alpha,n}^2(t) d\alpha(t) \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \int_{-1}^{1} [t p_{\alpha,n}(t)]^2 \, d\alpha(t) \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_{-1}^{1} p_{\alpha,n}^2(t) \, d\alpha(t) \right\}^{\frac{1}{2}} = 1. \qquad (20.9)$$

Здесь использовано неравенство $t^2 \leq 1$ $(-1 \leq t \leq 1)$. В силу (20.5) из (20.9), в частности, вытекают следующие оценки коэффициентов соотношения (20.1):

$$|A_n| \leq 1, \qquad (20.10)$$

$$|B_n| \leq 1. \qquad (20.11)$$

В силу (20.2) $A_n$ является отношением положительных чисел $k_{\alpha,n}$ и $k_{\alpha,n+1}$. Поэтому из (20.10) следует, что

$$k_{\alpha,n} \leq k_{\alpha,n+1} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \qquad (20.12)$$

Возвращаясь к случаю ортогональности в интервале $(-\infty, \infty)$, рассмотрим ядра

$$K_{d\alpha,n}(x,t) := \sum_{k=0}^{n} p_{\alpha,k}(x) p_{\alpha,k}(t) \qquad (x, t \in \mathbb{R}). \qquad (20.13)$$

**Теорема 20.3.** *Ядро* (20.13) *при всех* $n \in \mathbb{Z}_+$ *выражается через многочлены* $p_{\alpha,n}(x)$, $p_{\alpha,n}(t)$, $p_{\alpha,n+1}(x)$, $p_{\alpha,n+1}(t)$ *по формуле*

$$K_{d\alpha,n}(x,t) =$$

$$= \frac{k_{\alpha,n}}{k_{\alpha,n+1}} \cdot \frac{p_{\alpha,n+1}(x)p_{\alpha,n}(t) - p_{\alpha,n}(x)p_{\alpha,n+1}(t)}{x-t}. \qquad (20.14)$$

**Доказательство.** Заменив в (20.1) $t$ на $x$ и $n$ на $k$, получим

$$xp_{\alpha,k}(x) = A_k p_{\alpha,k+1}(x) + B_k p_{\alpha,k}(x) +$$

$$+A_{k-1}p_{\alpha,k-1}(x) \qquad (k \in \mathbb{Z}_+). \qquad (20.15)$$

Умножив обе части (20.15) на $p_{\alpha,k}(t)$, найдем, что

$$xp_{\alpha,k}(x)p_{\alpha,k}(t) = A_k p_{\alpha,k+1}(x)p_{\alpha,k}(t) +$$

$$+B_k p_{\alpha,k}(x)p_{\alpha,k}(t) + A_{k-1}p_{\alpha,k-1}(x)p_{\alpha,k}(t). \qquad (20.16)$$

Меняя ролями $x$ и $t$ в (20.16), получаем также равенство

$$tp_{\alpha,k}(x)p_{\alpha,k}(t) = A_k p_{\alpha,k}(x)p_{\alpha,k+1}(t) +$$

$$+B_k p_{\alpha,k}(x)p_{\alpha,k}(t) + A_{k-1}p_{\alpha,k}(x)p_{\alpha,k-1}(t). \qquad (20.17)$$

Вычитая (20.17) из (20.16), приходим к равенству

$$(x-t)p_{\alpha,k}(x)p_{\alpha,k}(t)) = A_k Q_k(x,t) - A_{k-1}Q_{k-1}(x,t), \quad (20.18)$$

где

$$Q_k(x,t) = p_{\alpha,k+1}(x)p_{\alpha,k}(t) - p_{\alpha,k}(x)p_{\alpha,k+1}(t). \qquad (20.19)$$

Складывая равенства, получающиеся из формулы (20.18) при $k = 0, 1, \ldots, n$, в соответствии с обозначением (20.13) получаем, что

$$(x-t)K_{d\alpha,n}(x,t) = (x-t)\sum_{k=0}^{n} p_{\alpha,k}(x)p_{\alpha,k}(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [A_k Q_k(x,t) - A_{k-1}Q_{k-1}(x,t)] =$$

$$= A_n Q_n(x,t) - A_{-1}Q_{-1}(x,t). \qquad (20.20)$$

Из (20.3) видно, что $A_{-1} = Q_{-1}(x,t) = 0$. Поэтому из (20.20) получается формула

$$(x-t)K_{d\alpha,n}(x,t) = A_n Q_n(x,t),$$

из которой в силу (20.2) и (20.19) следует (20.14).

**Замечание 20.4.** Формулу (20.14) в случае многочленов Лежандра получил Э. Кристоффель, а в общем случае — Г. Дарбу. Она называется *формулой Кристоффеля–Дарбу.*

**Замечание 20.5.** Пусть для некоторой функции $f$ существуют интегралы

$$c_{d\alpha,k}(f) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)p_{\alpha,k}(t)\,d\alpha(t) \qquad (k \in \mathbb{Z}_+) \tag{20.21}$$

— коэффициенты Фурье функции $f$ по системе $\{p_{\alpha,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Тогда функции $f$ можно сопоставить ее ряд Фурье по этой системе

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{d\alpha,k}(f)p_{\alpha,k}(x). \tag{20.22}$$

Его $n$-я $(n \in \mathbb{Z}_+)$ частная сумма ($n$-я сумма Фурье функции $f$ по системе $\{p_{\alpha,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$)

$$S_{d\alpha,n}(f;x) := \sum_{k=0}^{n} c_{d\alpha,k}(f)p_{\alpha,k}(x) \tag{20.23}$$

в силу формул (20.21) и (20.13) может быть представлена в виде

$$S_{d\alpha,n}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)K_{d\alpha,n}(x,t)\,d\alpha(t). \tag{20.24}$$

Поскольку многочлен $Q_n(x)$ порядка не выше $n$ совпадает со своей $n$-й суммой $S_{d\alpha,n}(Q_n;x)$, то в силу (20.24) имеем равенство

$$Q_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_n(t)K_{d\alpha,n}(x,t)\,d\alpha(t). \tag{20.25}$$

Из формулы (20.24) видно, что для исследования вопроса о сходимости ряда (20.22) требуется информация о поведении ядра $K_{d\alpha,n}(x,t)$ при $n \to \infty$. При исследовании поведения этого ядра часто применяется формула (20.14). Формула (20.25) также имеет многочисленные применения.

## § 21. **Выражение многочленов, ортогональных на отрезке, через тригонометрические ортогональные полиномы**

**Теорема 21.1.** *Пусть $\alpha(t)$ — неубывающая ограниченная функция на $[-1,1]$ с бесконечным множеством точек роста, удовлетворяющая условию*

$$\alpha(-1) = 0. \tag{21.1}$$

*Рассмотрим на единичной окружности и на отрезке $[-1,1]$, соответственно, меры $d\sigma(\tau)$ и $d\beta(t)$, связанные с мерой $d\alpha(t)$ соотношениями*

$$\sigma(\tau) = \alpha(1) + [\alpha(1) - \alpha(\cos\tau)]\operatorname{sgn}\tau \quad (-\pi \le \tau \le \pi), \tag{21.2}$$

$$d\beta(t) = (1-t^2)d\alpha(t). \tag{21.3}$$

*Наконец, рассмотрим системы $\{p_{\alpha,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{q_{\beta,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ алгебраических многочленов, ортонормальные на $[-1,1]$ относительно мер $d\alpha(t)$ и $d\beta(t)$, соответственно, и систему $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ тригонометрических полиномов, ортонормальную на $[-\pi,\pi]$ по мере $d\sigma(\tau)$. Тогда имеют место соотношения*

$$T_{\sigma,0}(\tau) = \sqrt{\pi}p_{\alpha,0}(\cos\tau) \quad (\tau \in \mathbb{R}), \tag{21.4}$$

$$T_{\sigma,2n-1}(\tau) = \sqrt{\pi}p_{\alpha,n}(\cos\tau) \quad (\tau \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}), \tag{21.5}$$

$$T_{\sigma,2n}(\tau) = \sqrt{\pi}q_{\beta,n-1}(\cos\tau)\sin\tau \quad (\tau \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}). \tag{21.6}$$

**Доказательство.** В силу ортонормальности системы $\{p_{\alpha,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ по мере $d\alpha(t)$ при замене переменной $t = \cos\tau$ получаем, что при $m, n \in \mathbb{Z}_+$

$$\delta_{m,n} = \int_{-1}^{1} p_{\alpha,m}(t)p_{\alpha,n}(t)d\alpha(t) =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} p_{\alpha,m}(\cos\tau)p_{\alpha,n}(\cos\tau)d\alpha(\cos\tau). \tag{21.7}$$

Произведя замену переменной $\tau = -u$, получим

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} p_{\alpha,m}(\cos\tau)p_{\alpha,n}(\cos\tau)d\alpha(\cos\tau) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} p_{\alpha,m}(\cos u)p_{\alpha,n}(\cos u)d\alpha(\cos u). \tag{21.8}$$

С учетом (21.8) и (21.2) вместо (26.7) можно написать:

$$\delta_{m,n} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} p_{\alpha,m}(\cos\tau)p_{\alpha,n}(\cos\tau)d\alpha(\cos\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} p_{\alpha,m}(\cos\tau)p_{\alpha,n}(\cos\tau)d\alpha(\cos\tau) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} p_{\alpha,m}(\cos\tau)p_{\alpha,n}(\cos\tau)d\sigma(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\sqrt{\pi}p_{\alpha,m}(\cos\tau)][\sqrt{\pi}p_{\alpha,n}(\cos\tau)]d\sigma(\tau). \tag{21.9}$$

Функция $p_{\alpha,n}(\cos\tau)$ есть косинус-полином порядка $n$ со старшим коэффициентом $2^{1-n}k_{\alpha,n} > 0$, так как является линейной комбинацией функций $(\cos\tau)^\nu (\nu = 0, 1, \ldots, n)$ с коэффициентом $k_{\alpha,n} > 0$ при $(\cos\tau)^n$ и, как легко доказывается методом индукции, $(\cos\tau)^\nu$ есть косинус-полином порядка $\nu$ со старшим коэффициентом $2^{1-\nu}$.

Аналогично при $m, n \in \mathbb{N}$ получаем, что

$$\delta_{m,n} = \int_{-1}^{1} q_{\beta,m-1}(t) q_{\beta,n-1}(t) d\beta(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sqrt{\pi} q_{\beta,m-1}(\cos\tau)\sin\tau] \times$$

$$\times [\sqrt{\pi} q_{\beta,n-1}(\cos\tau)\sin\tau] d\sigma(\tau), \tag{21.10}$$

причем $q_{\beta,n-1}(\cos\tau)\sin\tau$ есть синус-полином порядка $n$ со старшим коэффициентом $2^{1-n}k_{\beta,n-1} > 0$.

При $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим интеграл

$$I_{m,n} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sqrt{\pi} q_{\beta,m-1}(\cos\tau)\sin\tau] \times$$

$$\times [\sqrt{\pi} p_{\alpha,n}(\cos\tau)] d\sigma(\tau). \tag{21.11}$$

Произведем замену переменной $\tau = -u$; при этом учтем, что в силу (21.2) $d\sigma(-u) = -d\sigma(u)$. Тогда из (21.11) получим, что

$$I_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} [\sqrt{\pi} q_{\beta,m-1}(\cos u)(-\sin u)] \times$$

$$\times [\sqrt{\pi} p_{\alpha,m}(\cos u)][-d\sigma(u)] = -I_{m,n},$$

откуда следует, что

$$I_{m,n} = 0 \quad (m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}_+). \tag{21.12}$$

Из формул (21.9) – (21.12) видно, что система тригонометрических полиномов $\{t_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$, где $t_0(\tau) := \sqrt{\pi}\, p_{\alpha,0}(\cos\tau)$, $t_{2n-1}(\tau) := \sqrt{\pi}\, p_{\alpha,n}(\cos\tau)$, $t_{2n}(\tau) := \sqrt{\pi}\, q_{\beta,n-1}(\cos\tau)\sin\tau$ $(n \in \mathbb{N})$ удовлетворяет условиям: она ортонормальна на $[-\pi,\pi]$ по мере $d\sigma(\tau)$; $t_0 = \mathrm{const} > 0$; при $n \in \mathbb{N}$ полином $t_{2n-1}(\tau)$ есть косинус-полином порядка $n$ с положительным старшим коэффициентом, а $t_{2n}(\tau)$ есть синус-полином порядка $n$ с положительным старшим коэффициентом. В силу первого критерия ортогональности эта система совпадает с системой $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$, получаемой при ортогонализации методом Сонина–Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi,\pi]$ последовательности $1,\ \cos\tau\ ,\sin\tau,\ \cos 2\tau,\ \sin 2\tau,\dots$ . Итак, формулы (21.4)–(21.6) доказаны.

## § 22. Выражение многочленов, ортогональных на отрезке, через многочлены, ортогональные на окружности

**Теорема 22.1.** *Пусть меры $d\alpha(t), d\beta(t)$ и $d\sigma(\tau)$ удовлетворяют условиям теоремы* 21.1. *Рассмотрим соответствующие ортонормальные системы многочленов $\{p_{\alpha,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}, \{q_{\beta,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ на $[-1,1]$ и $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ на единичной окружности. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ имеют место формулы*

$$p_{\alpha,n}\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{1-\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\{z^{1-n}\varphi_{\sigma,2n-1}(z)+$$

$$+z^{n-1}\varphi_{\sigma,2n-1}(z^{-1})\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{1+\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\{z^{-n}\varphi_{\sigma,2n}(z)+z^{n}\varphi_{\sigma,2n}(z^{-1})\}, \quad (22.1)$$

$$q_{\beta,n-1}\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1+\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\frac{z^{1-n}\varphi_{\sigma,2n-1}(z)-z^{n-1}\varphi_{\sigma,2n-1}(z^{-1})}{z-z^{-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ 1 - \frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{z^{-n}\varphi_{\sigma,2n}(z) - z^{n}\varphi_{\sigma,2n}(z^{-1})}{z - z^{-1}}. \quad (22.2)$$

**Доказательство.** Покажем, что если меры $d\alpha(t)$ и $d\sigma(\tau)$ удовлетворяют условиям теоремы 21.1, то все коэффициенты разложения (18.11) суть действительные числа. Для этого рассмотрим детерминантные представления многочленов $\varphi_{\sigma,n}(z)$. В данном случае $x_n = z^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$), при этом для всех $k, j \in \mathbb{N}$

$$(x_k, x_j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ik\tau} \overline{e^{ij\tau}} d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)\tau} d\sigma(\tau). \quad (22.3)$$

Произведем в последнем интеграле замену переменной $\tau = -u$. Тогда с учетом равенства $d\sigma(-u) = -d\sigma(u)$ (см. (21.2)) из (22.3) получим

$$(x_k, x_j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\pi}^{-\pi} e^{-i(k-j)u} [-d\sigma(u)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\tau} d\sigma(\tau) = \overline{(x_k, x_j)}.$$

Таким образом, все скалярные произведения, являющиеся элементами определителей из детерминантных представлений многочленов $\varphi_{\sigma,n}(z)$, являются действительными числами. Поэтому все $c_{n,k}$ в (18.11) суть действительные числа. В частности, действительным числом является $\varphi_{\sigma,2n}(0)$ в формулах (18.6)–(18.10). Но тогда равны нулю первое слагаемое в правой части (18.7) и второе слагаемое в правой части (18.8), т. е. формулы (18.6)–(18.9) в случае мер $d\alpha(t)$ и $d\sigma(\tau)$, удовлетворяющих условиям теоремы 21.1, принимают вид

$$T_{\sigma,2n-1}(\tau) = c_n \Re\{e^{-i(n-1)\tau} \varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\}, \quad (22.4)$$

$$T_{\sigma,2n}(\tau) = \frac{2}{c_n} \frac{\kappa_{\sigma,2n}}{\kappa_{\sigma,2n-1}} \Im\{e^{-i(n-1)\tau} \varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\}, \quad (22.5)$$

$$T_{\sigma,2n-1}(\tau) = \frac{2}{c_n}\frac{\kappa_{\sigma,2n}}{\kappa_{\sigma,2n-1}}\Re\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\}, \tag{22.6}$$

$$T_{\sigma,2n}(\tau) = -c_n\Im R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = c_n\Im\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\}. \tag{22.7}$$

В силу установленной вещественности коэффициентов $\varphi_{\sigma,n}(z)$

$$\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} = \varphi_{\sigma,n}(e^{-i\tau}), \tag{22.8}$$

$$\Re\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\} =$$

$$= 2^{-1}\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) + e^{i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{-i\tau})\}, \tag{22.9}$$

$$\Re\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}\} = 2^{-1}\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) + e^{in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{-i\tau})\}. \tag{22.10}$$

Объединяя (22.4) с (22.6) и учитывая (21.5), имеем

$$p_{\alpha,n}(\cos\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}T_{\sigma,2n-1}(\tau) = \frac{c_n}{\sqrt{\pi}}\Re\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}c_n}\frac{\kappa_{\sigma,2n}}{\kappa_{\sigma,2n-1}}\Re\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\}.$$

Отсюда в силу (22.9) и (22.10) вытекает, что

$$p_{\alpha,n}(\cos\tau) = \frac{c_n}{2\sqrt{\pi}}\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) + e^{i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{-i\tau})\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}c_n}\frac{\kappa_{\sigma,2n}}{\kappa_{\sigma,2n-1}}\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) + e^{in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{-i\tau})\}. \tag{22.11}$$

Аналогично (22.9) и (22.10) с учетом (22.8) получаем

$$\frac{\Im\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\}}{\sin\tau} =$$

$$= \frac{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) - e^{i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{-i\tau})}{e^{i\tau} - e^{-i\tau}}, \tag{22.12}$$

$$\frac{\Im\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\}}{\sin\tau} = \frac{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) - e^{in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{-i\tau})}{e^{i\tau} - e^{-i\tau}}. \tag{22.13}$$

Объединяя (22.5) с (22.7) и учитывая (21.6), имеем

$$q_{\beta,n-1}(\cos\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sin\tau} T_{\sigma,2n}(\tau) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}c_n} \frac{\kappa_{\sigma,2n}}{\kappa_{\sigma,2n-1}} \frac{\Im\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\}}{\sin\tau} =$$

$$= \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \frac{\Im\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\}}{\sin\tau}. \tag{22.14}$$

Из (22.14) в силу (22.12) и (22.13) получаем

$$q_{\beta,n-1}(\cos\tau) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}c_n} \frac{\kappa_{\sigma,2n}}{\kappa_{\sigma,2n-1}} \frac{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) - e^{i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{-i\tau})}{e^{i\tau} - e^{-i\tau}} =$$

$$= \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) - e^{in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{-i\tau})}{e^{i\tau} - e^{-i\tau}}. \tag{22.15}$$

В силу вещественности $\varphi_{\sigma,2n}(0)$ из (18.10) следует, что

$$\frac{c_n}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2\kappa_{\sigma,2n}}{\kappa_{\sigma,2n} - \varphi_{\sigma,2n}(0)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{1 - \frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{22.16}$$

Так как $\kappa^2_{\sigma,2n-1} = \kappa^2_{\sigma,2n} - |\varphi_{\sigma,2n}(0)|^2$ (см. (7.16)) и $\varphi_{\sigma,2n}(0)$ — вещественное число, то

$$\frac{\kappa_{\sigma,2n}}{\kappa_{\sigma,2n-1}} = \sqrt{\frac{\kappa^2_{\sigma,2n}}{\kappa^2_{\sigma,2n} - \varphi^2_{\sigma,2n}(0)}} =$$

$$= \left\{1 - \frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{22.17}$$

Из (18.10) и (22.17) находим, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}c_n}\frac{\kappa_{\sigma,2n}}{\kappa_{\sigma,2n-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\kappa_{\sigma,2n}-\varphi_{\sigma,2n}(0)}{2\kappa_{\sigma,2n}}}\left\{1-\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{1+\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}. \qquad (22.18)$$

Подставляя в (22.11) вместо левых частей (22.14) и (22.18) найденные их значения, получаем

$$p_{\alpha,n}\left(\frac{e^{i\tau}+e^{-i\tau}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{1-\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})+$$

$$+e^{i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{-i\tau})\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{1+\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})+\right.$$

$$\left.+e^{in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{-i\tau})\right\}. \qquad (22.19)$$

Аналогично из (22.15) с учетом (22.16) и (22.18) находим, что

$$q_{\beta,n-1}\left(\frac{e^{i\tau}+e^{-i\tau}}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1+\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\frac{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})-e^{i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{-i\tau})}{e^{i\tau}-e^{-i\tau}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1-\frac{\varphi_{\sigma,2n}(0)}{\kappa_{\sigma,2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\frac{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})-e^{in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{-i\tau})}{e^{i\tau}-e^{-i\tau}}. \qquad (22.20)$$

При $z = e^{i\tau}$ формулы (22.1) и (22.2) совпадают с (22.19) и (22.20) соответственно, а потому соотношения (22.1) и (22.2) при $n \in \mathbb{N}$, $z = e^{i\tau}$ доказаны.

Умножив (22.1) и (22.2) на $z^n$, получим тождества для алгебраических многочленов, справедливые на $\Gamma_1$, а следовательно, и на $\mathbb{C}$, так как многочлен степени $k$ определяется его значениями в $k+1$ точке. После деления на $z^n$ убеждаемся в справедливости формул (22.1) и (22.2) на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Теорема 22.1 доказана.

**Замечание 22.2.** Правые части (22.1) и (22.2) можно преобразовать с помощью тождеств

$$z^{1-n}\varphi_{\sigma,2n-1}(z) \pm z^{n-1}\varphi_{\sigma,2n-1}(z^{-1}) =$$

$$= z^{-n}\{z\varphi_{\sigma,2n-1}(z) \pm \varphi^*_{\sigma,2n-1}(z)\},$$

$$z^{-n}\varphi_{\sigma,2n}(z) \pm z^{n}\varphi_{\sigma,2n}(z^{-1}) = z^{-n}\{\varphi_{\sigma,2n}(z) \pm \varphi^*_{\sigma,2n}(z)\}.$$

Формулы (22.1) и (22.2) впервые получил Г. Сегё для абсолютно непрерывной $\alpha(t)$. Они приведены в его знаменитой монографии [12]. Для необязательно абсолютно непрерывной $\alpha(t)$ вторая из этих формул имеется в монографии Я. Л. Геронимуса [4]. Результаты параграфов 18, 21 и 22 в наиболее общем на сегодняшний день виде реализуют идею Сегё о едином подходе в изучении алгебраических свойств трех типов ортогональных полиномов — многочленов, ортогональных на окружности или на отрезке, и тригонометрических ортогональных полиномов и могут рассматриваться в качестве фундамента для построения теории, которую я называю теорией Сегё. Эта теория начинается с изучения алгебраических и асимптотических свойств упомянутых типов ортогональных полиномов, причем основное внимание уделяется исследованию асимптотических свойств многочленов, ортогональных на окружности, которые асимптотически выражаются через значения введенной Сегё функции, ныне часто называемой функцией Сегё. В виде следствий из результатов для многочленов, ортогональных на окружности, получаются соответствующие результаты для полиномов двух других систем. Асимптотические свойства ортогональных полиномов используются при исследовании поведения рядов Фурье по этим полиномам, причем основное внимание уделяется рядам Фурье по тригонометрическим ортогональным полиномам, а соответствующие результаты для двух других систем получаются в виде следствий или по аналогии. Теории Сегё посвящены и последующие мои спецкурсы: «Граничные свойства аналитических функций» и «Асимптотические и аппроксимативные свойства ортогональных полиномов».

## § 23. Свойства нулей многочленов $\{p_{\alpha,n}(t)\}$

**Теорема 23.1.** *Нули многочлена* $p_{\alpha,n}(t)$ $(n \in \mathbb{N})$ *являются действительными и простыми.*

**Доказательство.** В силу ортогональности $p_{\alpha,n}(t)$ по мере $d\alpha(t)$ константам выполняется равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha,n}(t)\, d\alpha(t) = 0. \tag{23.1}$$

Из (23.1) следует существование у многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ корня нечетной кратности.

Моменты

$$\mu_{\alpha,n} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^n\, d\alpha(t) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+) \tag{23.2}$$

являются действительными числами. Поэтому, пользуясь детерминантным представлением многочлена $p_{\alpha,n}(t)$, заключаем, что его коэффициенты — действительные числа. Отсюда следует, что $p_{\alpha,n}(\zeta) = 0 \implies p_{\alpha,n}(\overline{\zeta}) = 0$. Если при этом $\zeta$ — мнимое число, то $\zeta \neq \overline{\zeta}$ и $(t-\zeta)(t-\overline{\zeta}) = |t-\zeta|^2 \geq 0$. Таким образом, произведение множителей, соответствующих мнимым корням в представлении

$$p_{\alpha,n}(t) = k_{\alpha,n}\, (t - x_1) \cdots (t - x_n) \tag{23.3}$$

(где $x_1, \ldots, x_n$ — корни $p_{\alpha,n}(t)$), есть неотрицательный многочлен. Кроме того, неотрицательным многочленом является и произведение множителей, соответствующих действительным корням четной кратности в представлении (23.3). Итак, $p_{\alpha,n}(t)$ представляется в виде произведения неотрицательного в $(-\infty, \infty)$ многочлена (возможно, нулевой степени) и выражения $(t-x_1)^{l_1} \cdots (t-x_s)^{l_s}$, где $l_1, \ldots, l_s$ — нечетные натуральные числа. При этом многочлен вида $p_{\alpha,n}(t)(t-x_1) \cdots (t-x_s)$ неотрицателен в $(-\infty, \infty)$ и не является нулевым, в силу чего

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha,n}(t)(t-x_1) \cdots (t-x_s)\, d\alpha(t) > 0. \tag{23.4}$$

При $s < n$ интеграл в левой части (23.4) равен нулю. Следовательно, $s = n$, а это означает, что все корни многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ являются действительными и простыми.

**Теорема 23.2.** *Пусть $\{p_{\alpha,\nu}(t)\}_{\nu=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1,1]$ по мере $d\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ — неубывающая функция с бесконечным множеством точек роста. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ нули многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ являются действительными, простыми и находятся внутри интервала $(-1,1)$. Нули многочленов $p_{\alpha,n}(t)$ и $p_{\alpha,n+1}(t)$ перемежаются, т.е. между любыми соседними нулями $p_{\alpha,n+1}(t)$ имеется нуль $p_{\alpha,n}(t)$.*

**Доказательство.** Воспользуемся теоремой 21.1. Не ограничивая общности рассуждений, считаем выполненным условие (21.1). Формулами (21.2) и (21.3) определяем функцию $\sigma(\tau)$ и меру $d\beta(t)$. По теореме 21.1 полиномы системы $\{T_{\sigma,\nu}(\tau)\}_{\nu=0}^{\infty}$ определяются формулами (21.4)–(21.6). По теореме 19.1 (при $a=1$, $b=0$) при каждом $n \in \mathbb{N}$ полиномы $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ имеют по $2n$ простых нулей в промежутке $[-\pi, \pi)$, причем нули этих полиномов перемежаются. Точки $\pm\pi$ и 0 не являются нулями $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$, так как являются нулями $T_{\sigma,2n}(\tau)$ (см. (21.6)). В силу четности $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ в интервалах $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$ находится по $n$ простых нулей. Отсюда в силу (21.5) следует, что в интервале $(-1,1)$ многочлен $p_{\alpha,n}(t)$ имеет $n$ простых нулей. Из (21.5)$-$(21.6) и теоремы 19.1 следует, что каждый интервал, концами которого являются соседние нули многочлена $(1-t^2)p_{\beta,n-1}(t)$, содержит один и только один нуль многочлена $p_{\alpha,n}(t)$.

Убедимся в том, что

$$(1-t^2)p_{\beta,n-1}(t) = c_{n,n+1}p_{\alpha,n+1}(t)+$$
$$+c_{n,n}p_{\alpha,n}(t) + c_{n,n-1}p_{\alpha,n-1}(t), \tag{23.5}$$

где $c_{n,n+1}$, $c_{n,n}$ и $c_{n,n-1}$ — некоторые константы. В самом деле, левая часть (23.5) есть многочлен степени $n+1$. Поэтому имеет место разложение

$$(1-t^2)p_{\beta,n-1}(t) = \sum_{\nu=0}^{n+1} c_{n,\nu}p_{\alpha,\nu}(t), \tag{23.6}$$

где

$$c_{n,\nu} := \int_{-1}^{1}(1-t^2)p_{\beta,n-1}(t)p_{\alpha,\nu}(t)\,d\alpha(t). \tag{23.7}$$

В силу (21.3) равенство (23.7) можно переписать в виде

$$c_{n,\nu} = \int_{-1}^{1} p_{\alpha,\nu}(t)p_{\beta,n-1}(t)\,d\beta(t). \tag{23.8}$$

При $\nu < n-1$ интеграл в правой части (23.8) равен нулю (в силу ортогональности по мере $d\beta(t)$ многочлена $p_{\beta,n-1}(t)$ многочленам меньшей степени). Поэтому (23.6) имеет вид (23.5).

В силу (20.1)

$$p_{\alpha,n+1}(t) = [(t-B_n)p_{\alpha,n}(t) - A_{n-1}p_{\alpha,n-1}(t)]/A_n. \tag{23.9}$$

Подставляя правую часть (23.9) вместо $p_{\alpha,n+1}(t)$ в правую часть (23.5), получаем равенство

$$(1-t^2)p_{\beta,n-1}(t) = (a_n+b_nt)p_{\alpha,n}(t) + c_np_{\alpha,n-1}(t), \tag{23.10}$$

где $a_n$, $b_n$, и $c_n$ — некоторые константы. Поскольку нули многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ перемежаются с нулями левой части (23.10), то в нулях $p_{\alpha,n}(t)$ левая часть (23.10) не равна нулю. Значит, $c_n \neq 0$. В соседних нулях $t'$ и $t''$ многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ левая часть (23.10) имеет противоположные знаки. Значит, этим свойством обладает и $p_{\alpha,n-1}(t)$. Отсюда следует, что между $t'$ и $t''$ имеется нуль многочлена $p_{\alpha,n-1}(t)$. Отсюда следует перемежаемость нулей многочленов $p_{\alpha,n+1}(t)$ и $p_{\alpha,n}(t)$ при $n \in \mathbb{N}$. Теорема 23.2 доказана.

**Замечание 23.3.** В случае, когда $\alpha(t)$ имеет лишь $m+1$ ($m \in \mathbb{Z}_+$) точек роста, ортонормальная по мере $d\alpha(t)$ система многочленов конечна и имеет вид $p_{\alpha,0}(t), \dots, p_{\alpha,m}(t)$. Теоремы 23.1 и 23.2 с их доказательствами верны и в этом случае.

**Теорема 23.4.** *Теорема* 23.2 *остается справедливой при замене в ее формулировке отрезка* $[-1,1]$ *на промежуток* $[a,b]$, *где* $-\infty \le a < b \le \infty$.

**Доказательство.** Если $[a,b]$ конечен, то с помощью замены переменной $x = (b-a)^{-1}(2t-a-b)$ переведем отрезок $a \le x \le b$ в отрезок $-1 \le t \le 1$. При этом окажется, что многочлены $q_n(\alpha;t) := p_{\alpha,n}((b-a)^{-1}(2t-a-b))$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) ортогональны на отрезке $[-1,1]$ по мере $d\alpha((b-a)^{-1}(2t-a-b))$. Графики многочленов $q_n(\alpha;t)$ и $q_{n+1}(\alpha;t)$ получаются из графиков многочленов $p_{\alpha,n}(t)$ и $p_{\alpha,n+1}(t)$ растяжением с одним и тем же коэффициентом вдоль оси абсцисс (а также, что для рассматриваемого вопроса не имеет никакого значения, растяжением и вдоль оси ординат, возможно, с разными коэффициентами). По теореме 23.2 при каждом $n \in \mathbb{N}$ все нули многочлена $q_n(\alpha;t)$ являются простыми и находятся внутри $(-1,1)$, а нули многочленов $q_{n+1}(\alpha;t)$ и $q_n(\alpha;t)$ перемежаются. Следовательно, при каждом $n \in \mathbb{N}$ все нули многочлена $p_{\alpha,n}(x)$ являются простыми и находятся внутри $(a,b)$, а нули многочленов $p_{\alpha,n+1}(x)$ и $p_{\alpha,n}(x)$ перемежаются. Таким образом, для конечного $[a,b]$ теорема 23.4 верна.

Рассмотрим теперь случай, когда хотя бы одно из чисел $a$

и $b$ является бесконечным. Введем в рассмотрение конечный отрезок $[a_N, b_N]$, где $N > 0$, $a_N = a$ при $a > -\infty$, $a_N = -N$ при $a = -\infty$, $b_N = b$ при $b < \infty$, $b_N = N$ при $b = \infty$. Рассмотрим неубывающую функцию $\alpha_N(t)$, равную $\alpha(t)$ на $[a_N, b_N,]$ $\alpha(a_N)$ при $t \leq a_N$ и $\alpha(b_N)$ при $t \geq b_N$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $N$ достаточно велико. Тогда интервал $(a_N, b_N)$ содержит $n+2$ точки роста функции $\alpha(t)$, так что в соответствии с замечанием 23.3 многочлены $p_{\alpha_N,n}(t)$ и $p_{\alpha_N,n+1}(t)$ имеют смысл и для них верна теорема 23.2. По теореме 23.1 все нули многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ $(n \in \mathbb{N})$ являются действительными и простыми. Следовательно, можно указать конечный интервал $(\lambda_n, \mu_n)$, их содержащий. Наряду с моментами (23.2) рассмотрим моменты

$$\mu_{\alpha_N,n} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^n \, d\alpha_N(t) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{23.11}$$

Поскольку на $[a_N, b_N]$ функции $\alpha(t)$ и $\alpha_N(t)$ совпадают, то из (23.2) и (23.11) следует, что

$$|\mu_{\alpha,n} - \mu_{\alpha_N,n}| \leq \left|\int\limits_{-\infty}^{a_N} t^n \, d\alpha(t)\right| + \left|\int\limits_{b_N}^{\infty} t^n \, d\alpha(t)\right|. \tag{23.12}$$

В силу (23.2) при достаточно большом $N$

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{a_N} + \int\limits_{b_N}^{\infty}\right\} |t|^n \, d\alpha(t) \leq$$

$$\leq \frac{1}{N} \int\limits_{-\infty}^{a_N} t^{2n} \, d\alpha(t) + \frac{1}{N} \int\limits_{b_N}^{\infty} t^{2n} \, d\alpha(t) \leq \frac{\mu_{\alpha,2n}}{N}. \tag{23.13}$$

Из (23.12) и (23.13) следует, что при фиксированном $n$

$$\lim_{N\to\infty} \mu_{\alpha_N,n} = \mu_{\alpha,n}. \tag{23.14}$$

Пользуясь теоремой 4.2 и равенством (23.14), заключаем, что при фиксированных $n \in \mathbb{Z}_+$ и $[\lambda, \mu] \subset (-\infty, \infty)$ равномерно по $t \in [\lambda, \mu]$

$$\lim_{N\to\infty} p_{\alpha_N,n}(t) = p_{\alpha,n}(t). \tag{23.15}$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Будем считать, что все нули $x_{\alpha,n,1}, \dots, x_{\alpha,n,n}$ многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ вместе с их $\varepsilon$-окрестностями находятся внутри $(\lambda, \mu)$. При достаточно малом $\varepsilon$ эти окрестности попарно не пересекаются. Так как все нули многочлена $p_{\alpha,n}(t)$ являются простыми, то в точках $x_{\alpha,n,k} \pm \varepsilon$ он принимает значения противоположных знаков. В силу (23.15) при достаточно большом $N$ этим же свойством обладает и многочлен $p_{\alpha_N,n}(t)$. Следовательно, внутри $(x_{\alpha,n,k} - \varepsilon, x_{\alpha,n,k} + \varepsilon)$ многочлен $p_{\alpha_N,n}(t)$ имеет корень. Таким образом, $k$-й корень $p_{\alpha_N,n}(t)$ (обозначим его через $x_{\alpha_N,n,k}$) при $N \to \infty$ стремится к $x_{\alpha,n,k}$. Отсюда в силу перемежаемости нулей многочленов $p_{\alpha_N,n+1}(t)$ и $p_{\alpha_N,n}(t)$ и отсутствия у них общего корня (если $p_{\alpha,n+1}(\xi) = p_{\alpha,n}(\xi) = 0$, то в силу (20.1) $p_{\alpha,0}(\xi) = 0$, вопреки тому, что $p_{\alpha,0}(\xi) = k_{\alpha,0} > 0$) вытекает перемежаемость нулей многочленов $p_{\alpha,n+1}(t)$ и $p_{\alpha,n}(t)$. Теорема 23.4 доказана.

## § 24. **Квадратура Гаусса–Якоби. Коэффициенты Кристоффеля**

Пусть узлы $x_1, \dots, x_n$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n. \tag{24.1}$$

Положим

$$\omega_n(t) := (t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n). \tag{24.2}$$

Числа (24.1) — простые нули многочлена (24.2). Следовательно, $\omega_n'(x_k) \neq 0$ $(k = 1, \dots, n)$, и, таким образом, можно рассматривать многочлены

$$l_{n,k}(t) := \frac{\omega_n(t)}{\omega_n'(x_k)(t - x_k)} \qquad (k = 1, \dots, n), \tag{24.3}$$

называемые фундаментальными многочленами Лагранжа. Легко видеть, что

$$l_{n,k}(x_j) = \delta_{k,j} \qquad (k, j = 1, \ldots, n). \tag{24.4}$$

Пусть о функции $f(t)$ известно, что она в точках (24.1) принимает значения $f(x_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда можно построить многочлен

$$L_n(f;t) := \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_{n,k}(t) \tag{24.5}$$

степени $\leq n-1$, в силу (24.4) в узлах (24.1) совпадающий с $f(t)$ (или, как еще говорят, интерполирующий $f(t)$). Многочлен (24.5) называется интерполяционным многочленом Лагранжа функции $f(t)$ по системе узлов (24.1). Этим многочленом часто приближенно заменяют функцию $f(t)$ (особенно в случаях, когда ее значения известны лишь для некоторых значений аргумента):

$$f(t) \doteq L_n(f;t). \tag{24.6}$$

Умножив (24.6) на $d\alpha(t)$ и проинтегрировав по отрезку $[-1, 1]$, получим приближенное равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)\, d\alpha(t) \doteq \int\limits_{-1}^{1} L_n(f;t)\, d\alpha(t), \tag{24.7}$$

которое в силу (24.5) принимает вид

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)\, d\alpha(t) \doteq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k), \tag{24.8}$$

где

$$\lambda_k := \int\limits_{-1}^{1} l_{n,k}(t)\, d\alpha(t) \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{24.9}$$

Не обсуждая здесь вопросы о величинах погрешностей приближенных формул (24.7) и (24.8), заметим, что, поскольку любой многочлен $Q_{n-1}(t)$ степени $\leq n-1$ однозначно определяется его значениями в узлах (24.1), то для него формулы (24.7) и (24.8) являются точными равенствами:

$$Q_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} Q_{n-1}(x_k) l_{n,k}(t), \tag{24.10}$$

$$\int_{-1}^{1} Q_{n-1}(t)\, d\alpha(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{n-1}(x_k). \tag{24.11}$$

При этом говорят, что квадратурная формула (24.8) точна для многочленов степени $\leq n-1$. К. Гаусс впервые установил (при $d\alpha(t) = dt$), что узлы (24.1) можно выбрать так, чтобы квадратурная формула (24.8) была точной для всех многочленов степени $\leq 2n-1$.

**Теорема 24.1.** *Для того, чтобы квадратурная формула* (24.8) *была точной для любого алгебраического многочлена* $Q_{2n-1}(t)$ *степени* $\leq 2n-1$, *необходимо и достаточно, чтобы узлы* (24.1) *совпадали с корнями многочлена* $p_{\alpha,n}(t)$.

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что для любого многочлена $Q_{2n-1}(t)$ степени $\leq 2n-1$ имеет место представление

$$Q_{2n-1}(t) = \omega_n(t) q_{n-1}(t) + r_{n-1}(t), \tag{24.12}$$

где $q_{n-1}(t)$ и $r_{n-1}(t)$ — многочлены степени $\leq n-1$. Представление (24.12) можно получить в результате деления $Q_{2n-1}(t)$ на многочлен $\omega_n(t)$, при этом $r_{n-1}(t)$ есть остаток от такого деления. Существует лишь одно представление вида (24.12). В самом деле, пусть

$$Q_{2n-1}(t) = \omega_n(t) q_{n-1,1}(t) + r_{n-1,1}(t), \tag{24.13}$$

где $q_{n-1,1}(t)$ и $r_{n-1,1}(t)$ — многочлены степени $\leq n-1$. Тогда из (24.12) и (24.13) следует, что

$$\omega_n(t)[q_{n-1}(t) - q_{n-1,1}(t)] = r_{n-1,1}(t) - r_{n-1}(t). \tag{24.14}$$

Так как левая часть (24.14) делится на $\omega_n(t)$, то правая часть, являясь многочленом степени $\le n-1$, равна нулю, т. е. $r_{n-1,1}(t) = r_{n-1}(t)$. Но тогда $q_{n-1,1}(t) = q_{n-1}(t)$. Заметим еще, что правая часть (24.12) при любых $q_{n-1}(t)$ и $r_{n-1}(t)$ степени $\le n-1$ есть многочлен степени $\le 2n-1$. Таким образом, (24.12) есть общий вид многочлена степени $\le 2n-1$. В силу (24.12) и (24.2) формула (24.8) для $f(t) = Q_{2n-1}(t)$ имеет вид

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_{2n-1}(t)\, d\alpha(t) \doteq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k r_{n-1}(x_k). \tag{24.15}$$

Но так как для $f(t) = r_{n-1}(t)$ формула (24.8) точна, то формула (24.15) равносильна формуле

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_{2n-1}(t)\, d\alpha(t) \doteq \int\limits_{-1}^{1} r_{n-1}(t)\, d\alpha(t). \tag{24.16}$$

Приближенное равенство (24.16) в силу (24.13) переписывается в виде равенства

$$\int\limits_{-1}^{1} \omega_n(t) q_{n-1}(t)\, d\alpha(t) + \int\limits_{-1}^{1} r_{n-1}(t)\, d\alpha(t) \doteq \int\limits_{-1}^{1} r_{n-1}(t)\, d\alpha(t),$$

равносильного равенству

$$\int\limits_{-1}^{1} \omega_n(t) q_{n-1}(t)\, d\alpha(t) \doteq 0. \tag{24.17}$$

Поскольку формулы (24.15) и (24.17) равносильны, то для точности (24.15) на всех многочленах степени $\le 2n-1$ необходимо и достаточно, чтобы для всех многочленов $q_{n-1}(t)$ степени $\le n-1$ выполнялось равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} \omega_n(t) q_{n-1}(t)\, d\alpha(t) = 0. \tag{24.18}$$

Но для того, чтобы (24.18) имело место для любого $q_{n-1}(t)$ степени $\leq n-1$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\omega_n(t) = cp_{\alpha,n}(t) \tag{24.19}$$

с ненулевой (поскольку $\omega_n(t)$ — многочлен степени точно $n$) константой $c$, т. е. чтобы узлы (24.1) совпадали с корнями $x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}$ многочлена $p_{\alpha,n}(t)$. Теорема 24.1 доказана.

**Замечание 24.2.** В случае, когда узлы (24.1) совпадают с корнями многочлена $p_{\alpha,n}(t)$, формула (24.8) называется квадратурной формулой гауссова типа. В этом случае числа $\lambda_k$ из (24.8) в силу (24.9) и (24.19) вычисляются по формулам

$$\lambda_k = \lambda_{n,k} :=$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{p_{\alpha,n}(t)}{p_{\alpha,n}{}'(x_{n,k})(t - x_{n,k})}\, d\alpha(t) \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{24.20}$$

Числа (24.20) называются *коэффициентами Кристоффеля.*

**Теорема 24.3.** *Коэффициенты Кристоффеля* (24.20) *положительны и удовлетворяют равенствам*

$$\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2} + \cdots + \lambda_{n,n} = \int_{-1}^{1} d\alpha(t) = \alpha(1) - \alpha(-1). \tag{24.21}$$

*При* $k = 1, \ldots, n$ *справедливы соотношения*

$$\lambda_{n,k} = \int_{-1}^{1} \left[ \frac{p_{\alpha,n}(t)}{p_{\alpha,n}{}'(x_{n,k})(t - x_{n,k})} \right]^2 d\alpha(t), \tag{24.22}$$

$$\lambda_{n,k} = \frac{k_{\alpha,n+1}}{k_{\alpha,n}} \cdot \frac{-1}{p_{\alpha,n+1}(x_{n,k}) p_{\alpha,n}{}'(x_{n,k})} =$$

$$= \frac{k_{\alpha,n}}{k_{\alpha,n-1}} \cdot \frac{1}{p_{\alpha,n-1}(x_{n,k}) p_{\alpha,n}{}'(x_{n,k})}, \tag{24.23}$$

$$\lambda_{n,k}^{-1} = p_{\alpha,0}^2(x_{n,k}) + p_{\alpha,1}^2(x_{n,k}) + \dots + p_{\alpha,n}^2(x_{n,k}) = \\ = K_{d\alpha,n}(x_{n,k}, x_{n,k}). \qquad (24.24)$$

**Доказательство.** Равенство (24.21) получается из (24.11) при $Q_{n-1}(t) \equiv 1$. Докажем (24.22). Для этого положим

$$u_{n-1,j}(t) := \frac{p_{\alpha,n}(t)}{{p_{\alpha,n}}'(x_{n,j})(t - x_{n,j})} \qquad (j = 1, \dots, n). \qquad (24.25)$$

Тогда $u_{n-1,j}^2(t)$ есть многочлен степени $\leq 2n - 2$, так что по теореме 24.1 для него формула (24.8) точна, т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1} u_{n-1,j}^2(t)\, d\alpha(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} u_{n-1,j}^2(x_{n,k}). \qquad (24.26)$$

Но в соответствии с (24.3) и (24.4) многочлен (24.25) удовлетворяет условиям $u_{n-1,j}(x_{n,k}) = \delta_{j,k}$ $(k, j = 1, \dots, n)$. Поэтому (24.26) принимает вид

$$\int\limits_{-1}^{1} u_{n-1,j}^2(t)\, d\alpha(t) = \lambda_{n,j} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

т. е. формула (24.22) доказана.

Так как $u_{n-1,j}(t) \not\equiv 0$ (см. (24.25)), то из (24.22) и (6.6) следует положительность коэффициентов (24.20).

Теперь получим некоторые выражения для правой части (24.24). Для этого воспользуемся формулой Кристоффеля–Дарбу (20.14). Устремив в ней $x$ к $t$, по правилу Лопиталя получим, что

$$K_{d\alpha,n}(t,t) = \frac{k_{\alpha,n}}{k_{\alpha,n+1}}[{p_{\alpha,n+1}}'(t)p_{\alpha,n}(t) - {p_{\alpha,n}}'(t)p_{\alpha,n+1}(t)]. \quad (24.27)$$

При $t = x_{n,k}$ первое слагаемое в правой части (24.27) обращается в нуль. Поэтому

$$K_{d\alpha,n}(x_{n,k}, x_{n,k}) = -\frac{k_{\alpha,n}}{k_{\alpha,n+1}} {p_{\alpha,n}}'(x_{n,k}) p_{\alpha,n+1}(x_{n,k}). \qquad (24.28)$$

Так как $p_{\alpha,n}(x_{n,k}) = 0$, то

$$K_{d\alpha,n}(x_{n,k}, x_{n,k}) = K_{d\alpha,n-1}(x_{n,k}, x_{n,k}) + p_{\alpha,n}^2(x_{n,k}) =$$
$$= K_{d\alpha,n-1}(x_{n,k}, x_{n,k}). \tag{24.29}$$

Заменим в (24.27) $n$ на $n-1$ :

$$K_{d\alpha,n-1}(t,t) =$$
$$= \frac{k_{\alpha,n-1}}{k_{\alpha,n}}[p_{\alpha,n}{}'(t)p_{\alpha,n-1}(t) - p_{\alpha,n-1}{}'(t)p_{\alpha,n}(t)]. \tag{24.30}$$

При $t = x_{n,k}$ второе слагаемое в правой части (24.30) обращается в нуль, так что с учетом (24.29) имеем

$$K_{d\alpha,n-1}(x_{n,k}, x_{n,k}) = \frac{k_{\alpha,n-1}}{k_{\alpha,n}} p_{\alpha,n}{}'(x_{n,k}) p_{\alpha,n-1}(x_{n,k}). \tag{24.31}$$

Пользуясь (24.28), докажем формулу (24.24). Из (24.28) следует, что

$$p_{\alpha,n}{}'(x_{n,k}) = -\frac{k_{\alpha,n+1}}{k_{\alpha,n}} \cdot \frac{K_{d\alpha,n}(x_{n,k}, x_{n,k})}{p_{\alpha,n+1}(x_{n,k})}. \tag{24.32}$$

Из (24.30) с учетом (24.32) получаем

$$\lambda_{n,k} = \frac{k_{\alpha,n}}{k_{\alpha,n+1}} \int_{-1}^{1} \frac{-p_{\alpha,n}(t)p_{\alpha,n+1}(x_{n,k})}{K_{d\alpha,n}(x_{n,k}, x_{n,k})(t - x_{n,k})}\, d\alpha(t). \tag{24.33}$$

Так как $p_{\alpha,n}(x_{n,k}) = 0$, то (24.33) можно переписать в виде

$$\lambda_{n,k} = \int_{-1}^{1} \frac{k_{\alpha,n}}{k_{\alpha,n+1}} \cdot \frac{p_{\alpha,n+1}(x_{n,k})p_{\alpha,n}(t) - p_{\alpha,n}(x_{n,k})p_{\alpha,n+1}(t)}{K_{d\alpha,n}(x_{n,k}, x_{n,k})(x_{n,k} - t)}\, d\alpha(t)$$

или с учетом (20.14) еще в виде

$$\lambda_{n,k} = \frac{1}{K_{d\alpha,n}(x_{n,k}, x_{n,k})} \int_{-1}^{1} K_{d\alpha,n}(x_{n,k}, t)\, d\alpha(t). \tag{24.34}$$

В силу (20.25) последний интеграл равен единице, так что (24.34) превращается в (24.24).

Теперь, подставив в правую часть (24.24) вместо $K_{d\alpha,n}(x_{n,k}, x_{n,k})$ правые части (24.27) и (24.30), легко получим формулы (24.23).

## § 25. **О гипергеометрической функции Гаусса**

Приведем некоторые свойства гипергеометрической функции Гаусса, которыми будем пользоваться в следующем параграфе при рассмотрении свойств многочленов Якоби. Эта функция определяется как сумма ряда

$$F(a, b; c; z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu\,(b)_\nu}{\nu!\,(c)_\nu}\, z^\nu, \tag{25.1}$$

где $(a)_0 := 1$, $(a)_\nu := a(a+1)\cdots(a+\nu-1)$ при $\nu \in \mathbb{N}$; $z$, $a$, $b$, $c$ — комплексные числа; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ .

Так как модуль отношения $(\nu+1)$-го и $\nu$-го членов ряда (25.1) при $\nu \to \infty$ стремится к $|z|$, то по признаку Даламбера ряд (25.1) сходится в $D$.

**Лемма 25.1.** *Для того, чтобы аналитическая в $D$ функция $f(z)$ удовлетворяла уравнению Гаусса*

$$z(1-z)\,Y''(z) + [c - (a+b+1)z]\;Y'(z) - ab\,Y(z) = 0, \tag{25.2}$$

*необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$f(z) = f(0)\,F(a, b; c; z) \qquad (z \in D). \tag{25.3}$$

**Доказательство.** Функция $f(z)$ является суммой некоторого ряда

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \qquad (z \in D). \tag{25.4}$$

Подставляя в (25.2) вместо $f(z)$ в правую часть (25.4), получаем для всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$ уравнения

$$(\nu+1)(c+\nu+1)c_{\nu+1} - (a+\nu+1)(b+\nu+1)c_\nu = 0. \tag{25.5}$$

При этом замечаем, что для того, чтобы аналитическая $f(z)$ удовлетворяла уравнению (25.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (25.5). Решая последовательно уравнения системы (25.5) и учитывая равенство $c_0 = f(0)$, находим, что ее решением является последовательность чисел

$$c_\nu = f(0)\,\frac{(a)_\nu\,(b)_\nu}{\nu!\,(c)_\nu} \qquad (\nu \in \mathbb{Z}_+). \tag{25.6}$$

Таким образом, для того, чтобы $f(z)$ удовлетворяла уравнению (25.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (25.3).

**Лемма 25.2.** *Справедлива формула дифференцирования*

$$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z) = \frac{a\,b}{c}F(a+1,b+1;c+1;z) \qquad (z \in D). \tag{25.7}$$

Для доказательства достаточно продифференцировать равенство (25.1) и учесть, что

$$\nu\,\frac{(a)_\nu\,(b)_\nu}{\nu!\,(c)_\nu} = \frac{a\,b}{c}\cdot\frac{(a+1)_{\nu-1}\,(b+1)_{\nu-1}}{(\nu-1)!\,(c+1)_{\nu-1}}.$$

## § 26. **Многочлены Якоби: формула Родрига, дифференциальное уравнение**

Рассмотрим систему многочленов Якоби $\{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\}_{n=0}^\infty$, ортонормированную на отрезке $[-1,1]$ с весом Якоби

$$p^{\alpha,\beta}(t) := (1-t)^\alpha(1+t)^\beta \qquad (\alpha,\beta > -1). \tag{26.1}$$

Через $k_n^{\alpha,\beta} > 0$ обозначим старший коэффициент (т. е. коэффициент при $t^n$) многочлена $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$.

**Лемма 26.1.** *Выражение* (*называемое формулой Родрига*)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t) := (1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\times$$
$$\times\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\{(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}\} \tag{26.2}$$

*есть многочлен степени $n$ с положительным коэффициентом при $t^n$, ортогональный с весом* (26.1) *многочленам меньшей степени и удовлетворяющий условию* (*говорят также, нормированный условием*)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}. \tag{26.3}$$

**Доказательство.** Пользуясь формулой Лейбница, из (26.2) находим, что

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = (1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\times$$

$$\times\frac{(-1)^n}{2^n n!}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{d^\nu(1-t)^{n+\alpha}}{dt^\nu}\cdot\frac{d^{n-\nu}(1+t)^{n+\beta}}{dt^{n-\nu}} =$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(n+\alpha)\cdots(n+\alpha+1-\nu)\times$$

$$\times(-1)^\nu(1-t)^{n-\nu}(n+\beta)\cdots(\nu+1+\beta)(1+t)^\nu.$$

Каждое слагаемое в последней сумме есть многочлен степени не выше $n$. Следовательно, $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ — многочлен степени не выше $n$. При $t = 1$ в последней сумме не равно нулю лишь слагаемое с $\nu = n$, причем множитель $(n+\beta)\cdots(\nu+1+\beta)$ перед $(1+t)^\nu$ при $\nu = n$ равен 1. Поэтому

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(-1)^n(n+\alpha)\cdots(1+\alpha)\,2^n,$$

т. е. выполняется равенство (26.3).

Пусть теперь $q_\nu(t)$ многочлен степени не выше $\nu < n$. Тогда, пользуясь (26.2) и интегрируя по частям $n$ раз, имеем

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(t)q_\nu(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int\limits_{-1}^{1} q_\nu(t) \frac{d^n}{dt^n} \{(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}\} =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \int\limits_{-1}^{1} q_\nu^{(n)}(t) \{(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}\}\, dt = 0.$$

Итак, $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ — многочлен степени не выше $n$, ортогональный с весом (26.1) всем многочленам меньшей степени. Следовательно,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \lambda_n \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t), \tag{26.4}$$

где $\lambda_n$ — константа. В силу (26.3) левая часть (26.4) положительна. Кроме того, и $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(1) > 0$ (ведь все нули $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ находятся внутри $(-1,1)$, а $k_n^{\alpha,\beta} > 0$). Поэтому в (26.4)

$$\lambda_n \; > \; 0. \tag{26.5}$$

В силу (26.4) и (26.5) $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ является многочленом степени $n$ с положительным коэффициентом при $t^n$. Лемма доказана.

**Теорема 26.2.** *Многочлен $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} \frac{d}{dt}\{(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1} y'(t)\} =$$

$$= -n(n+\alpha+\beta+1)y(t), \tag{26.6}$$

*которое может быть записано и в форме*

$$(1-t^2)y''(t) + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)t]y'(t) +$$

$$+ n(n+\alpha+\beta+1)y(t) = 0. \tag{26.7}$$

**Доказательство.** Введем обозначение

$$L_n(y;t) := (1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} \frac{d}{dt}\{(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1} y'(t)\}. \tag{26.8}$$

Выполнив дифференцирование в (26.8), получим, что

$$L_n(y;t) = (1-t^2)y''(t) + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)t]y'(t). \tag{26.9}$$

Из формул (26.8) и (26.9) следует равносильность уравнений (26.6) и (26.7).

В силу (26.3)

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(t) \equiv P_0^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{\alpha}{0} = 1. \tag{26.10}$$

Поскольку $y(t) = \text{const}$, очевидно, удовлетворяет уравнению (26.6) при $n = 0$, то в силу (26.10) этим свойством обладает и $P_0^{(\alpha,\beta)}(t)$.

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$. Из (26.9) видно, что $L_n(P_n^{(\alpha,\beta)};t)$ есть многочлен степени $\leq n$, причем

$$L_n(P_n^{(\alpha,\beta)};1) = -2(\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(1). \tag{26.11}$$

В правой части (26.11) $\alpha + 1 > 0$ и $P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(1) \neq 0$ (последнее неравенство выполняется в силу теоремы Ролля, поскольку все нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ находятся внутри $(-1,1)$ и являются простыми). Таким образом, $L_n(P_n^{(\alpha,\beta)};t)$ — ненулевой многочлен степени $\leq n$.

Покажем, что этот многочлен ортогонален с весом (26.1) многочленам степени $< n$. В самом деле, полагая

$$I_n(g) := \int_{-1}^{1} L_n(P_n^{(\alpha,\beta)};t)g(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt, \tag{26.12}$$

для любого многочлена $g_\nu(t)$ степени не выше $\nu$ имеем

$$I_n(g_\nu) = -\int_{-1}^{1} g_\nu(t)\frac{d}{dt}\{(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1}P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(t)\}\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(t) \frac{d}{dt}\{(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1} g_\nu'(t)\}\, dt. \qquad (26.13)$$

При выводе (26.13) дважды применено интегрирование по частям, причем каждый раз внеинтегральное выражение оказалось равным нулю. Выражение $\{(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1} {g_\nu}'(t)\}'$ есть произведение веса (26.1) на многочлен степени не выше $\nu$. Поэтому в силу ортогональности с весом (26.1) многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ многочленам меньшей степени при $\nu < n$ из (26.13) следует равенство $I_n(g_\nu) = 0$. Отсюда в силу (26.12) следует, что многочлен $L_n(P_n^{(\alpha,\beta)}; t)$ ортогонален с весом (26.1) всем многочленам степени $< n$.

Поскольку многочлен $L_n(P_n^{(\alpha,\beta)}; t)$ ортогонален с весом (26.1) всем многочленам меньшей степени, то имеет место равенство

$$L_n(P_n^{(\alpha,\beta)}; t) = c\, P_n^{(\alpha,\beta)}(t), \qquad (26.14)$$

где $c \neq 0$. Умножив обе части (26.14) на нормирующий множитель, получим также и равенство

$$L_n(\widehat{P}\,_n^{\alpha,\beta}; t) = c\, \widehat{P}\,_n^{\alpha,\beta}(t). \qquad (26.15)$$

Из (26.9) и (26.15) следует, что

$$(1-t^2)\widehat{P}\,_n^{\alpha,\beta\prime\prime}(t) + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)t]\, \widehat{P}\,_n^{\alpha,\beta\prime}(t) = c\, \widehat{P}\,_n^{\alpha,\beta}(t).$$

Сравнивая коэффициенты при $t^n$ в обеих частях этого равенства, получаем уравнение

$$-n(n-1)k_n^{\alpha,\beta} - n(\alpha+\beta+2)k_n^{\alpha,\beta} = c\, k_n^{\alpha,\beta},$$

из которого после деления на $k_n^{\alpha,\beta}$ получаем, что

$$c = -n(n+\alpha+\beta+1). \qquad (26.16)$$

В силу (26.8), (26.13) и (26.16) многочлен $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (26.6). Теорема 26.2 доказана.

## § 27. **Выражение многочлена Якоби через функцию Гаусса. Формула дифференцирования**

**Теорема 27.1.** *При всех $n \in \mathbb{Z}_+$ и $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \binom{n+\alpha}{n} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-z}{2}\right). \quad (27.1)$$

**Доказательство.** В дифференциальном уравнении (26.7) произведем замену переменной $t = 1 - 2x$. При этом введем обозначение

$$Y(x) := y(1-2x). \quad (27.2)$$

Тогда, дифференцируя (27.2), получаем равенства

$$Y'(x) := -2y'(1-2x) = -2y'(t), \quad (27.3)$$

$$Y''(x) := 4y''(1-2x) = 4y''(t). \quad (27.4)$$

В силу (27.2)–(27.4)

$$y(t) = Y(x), \;\; y'(t) = -2^{-1}Y'(x), \;\; y''(t) = 4^{-1}Y''(x). \quad (27.5)$$

При этом

$$1-t^2 = (1-t)(1+t) = (1-1+2x)(1+1-2x) = 4x(1-x). \quad (27.6)$$

С учетом (27.5)–(27.6) уравнение (26.7) преобразуется к виду

$$x(1-x)Y''(x) + [\alpha+1-(\alpha+\beta+1)x]Y'(x) +$$
$$+ n(n+\alpha+\beta+1)Y(x) = 0. \quad (27.7)$$

Легко видеть, что (27.7) есть частный случай уравнения Гаусса (25.2), соответствующий значениям $a = -n$, $b = n + \alpha + \beta + 1$, $c = \alpha + 1$. По лемме 25.1 любое аналитическое в $D$ решение уравнения (27.7) $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = f(0)\, F(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; z) \qquad (z \in D). \quad (27.8)$$

Так как $y(t) = P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ — решение уравнения (26.7), то $Y(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)$ является решением уравнения (27.7) (причем аналитическим в $\mathbb{C}$). Поэтому из (27.8) и (26.3) следует, что

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x) = \binom{n+\alpha}{n} F(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; x). \quad (27.9)$$

Вспоминая, что $t = 1-2x$, можем переписать (27.9) в виде

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \binom{n+\alpha}{n} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-t}{2}\right). \quad (27.10)$$

Из (27.10) следует (27.1). Теорема 27.1 доказана.

Важным следствием теоремы 27.1 является

**Теорема 27.2.** *Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\frac{d}{dz} P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(z). \quad (27.11)$$

**Доказательство.** В силу (27.1) и (25.7) имеем

$$\frac{d}{dz} P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\frac{1}{2}\binom{n+\alpha}{n} \frac{(-n)(n+\alpha+\beta+1)}{\alpha+1} \times$$
$$\times F\left(1-n, n+\alpha+\beta+2; \alpha+2; \frac{1-z}{2}\right).$$

С другой стороны, из (27.1) следует, что

$$P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(z) = \binom{n+\alpha}{n-1} F\left(1-n, n+\alpha+\beta+2; \alpha+2; \frac{1-z}{2}\right).$$

Из этих двух равенств и легко проверяемого соотношения

$$\binom{n+\alpha}{n} = \binom{n+\alpha}{n-1} \cdot \frac{\alpha+1}{n}$$

следует (27.11).

## § 28. **Коэффициенты при $z^n$ и $z^{n-1}$ многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$**

С использованием теоремы 27.1 доказывается

**Теорема 28.1.** *Коэффициенты при $z^n$ и $z^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) разложения*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = a_{n,n}^{\alpha,\beta} z^n + a_{n,n-1}^{\alpha,\beta} z^{n-1} + \cdots \tag{28.1}$$

*вычисляются по формулам*

$$a_{n,n}^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n \Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \tag{28.2}$$

$$a_{n,n-1}^{\alpha,\beta} = \frac{(\alpha-\beta)\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^n \Gamma(n)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} = \frac{(\alpha-\beta)n}{2n+\alpha+\beta} a_{n,n}^{\alpha,\beta}, \tag{28.3}$$

*где под $\Gamma(z)$ понимается гамма-функция Эйлера.*

**Доказательство.** В силу (27.1) и (25.1)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) =$$

$$= \binom{n+\alpha}{n} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-n)_\nu (n+\alpha+\beta+1)_\nu}{\nu\,!\,(\alpha+1)_\nu} \left(\frac{1-z}{2}\right)^\nu. \tag{28.4}$$

Заметим, что, хотя в (25.1) $\nu$ принимает все значения из $\mathbb{Z}_+$, в (28.4) участвуют лишь $\nu = 0, 1, \ldots, n$, так как $(-n)_\nu = 0$ ($\nu = n+1, n+2, \ldots$). Коэффициент (28.2) совпадает с коэффициентом при $z^n$ многочлена

$$\binom{n+\alpha}{n} \frac{(-n)_n (n+\alpha+\beta+1)_n}{n\,!\,(\alpha+1)_n} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n, \tag{28.5}$$

так как слагаемые с номерами $\nu < n$ в правой части (28.4) являются многочленами степени $\nu < n$. Поэтому

$$a_{n,n}^{\alpha,\beta} = \binom{n+\alpha}{n} \frac{(-n)_n (n+\alpha+\beta+1)_n}{n\,!\,(\alpha+1)_n} \frac{(-1)^n}{2^n}. \tag{28.6}$$

Принимая во внимание равенства

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \tag{28.7}$$

$$(-n)_n = (-1)^n \, n\,!\,, \tag{28.8}$$

$$\binom{n+\alpha}{n} = \frac{(1+\alpha)_n}{n\,!} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}, \tag{28.9}$$

$$(n+\alpha+\beta+1)_n = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \tag{28.10}$$

из (28.6) получаем (28.2).

В силу (28.4) коэффициент (28.3) совпадает с коэффициентом при $z^{n-1}$ многочлена

$$\binom{n+\alpha}{n}\Bigg[\frac{(-n)_n(n+\alpha+\beta+1)_n}{n\,!\,(\alpha+1)_n}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n +$$

$$+\frac{(-n)_{n-1}(n+\alpha+\beta+1)_{n-1}}{(n-1)\,!\,(\alpha+1)_{n-1}}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{n-1}\Bigg]$$

и, следовательно, равен

$$\binom{n+\alpha}{n}\Bigg[\frac{(-n)_n(n+\alpha+\beta+1)_n(-1)^{n-1}n}{n\,!\,(\alpha+1)_n\,2^n} +$$

$$+\frac{(-n)_{n-1}(n+\alpha+\beta+1)_{n-1}(-1)^{n-1}}{(n-1)\,!\,(\alpha+1)_{n-1}\,2^{n-1}}\Bigg].$$

Это выражение в силу формул (28.7)–(28.10) совпадает с правой частью (28.3). Теорема 28.1 доказана.

## § 29. **Связь между** $\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ **и** $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$

Рассмотрим интеграл

$$h_n^{(\alpha,\beta)} := \int_{-1}^{1} [P_n^{(\alpha,\beta)}(t)]^2 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \, dt. \tag{29.1}$$

Из (26.37) следует, что

$$\int_{-1}^{1} \{[h_n^{(\alpha,\beta)}]^{-\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\}^2 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta\, dt = 1. \tag{29.2}$$

По лемме 26.1 $[h_n^{(\alpha,\beta)}]^{-\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ — многочлен степени $n$ с положительным коэффициентом при $t^n$, ортогональный всем многочленам меньшей степени. Поэтому выполняется равенство

$$\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t) = [h_n^{(\alpha,\beta)}]^{-\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(t). \tag{29.3}$$

Вычислим величину (29.1).

**Теорема 29.1.** *Справедливы равенства*

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{29.4}$$

$$h_0^{(\alpha,\beta)} = 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}. \tag{29.5}$$

**Доказательство.** В силу (29.1) и (26.2) имеем

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(t) \frac{d^n}{dt^n}\{(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}\}\, dt. \tag{29.6}$$

Применим $n$ раз интегрирование по частям к правой части (29.6). Тогда получим, что

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta} \frac{d^n}{dt^n} P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\, dt. \tag{29.7}$$

С учетом (27.11) равенство (29.7) можно переписать в виде

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \mu_n^{\alpha,\beta} \int\limits_{-1}^{1} (1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta} P_0^{(\alpha+n,\beta+n)}(t)\,dt, \tag{29.8}$$

где

$$\mu_n^{\alpha,\beta} := \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{n+\alpha+\beta+1}{2} \cdots \frac{n+\alpha+\beta+n}{2}. \tag{29.9}$$

Согласно (26.10) $P_0^{(\alpha+n,\beta+n)}(t) \equiv 1$. Поэтому вместо (29.8) можно написать, что

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \mu_n^{\alpha,\beta} \int\limits_{-1}^{1} (1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}\,dt. \tag{29.10}$$

После замены переменной $1+t = 2u$ в интеграле из правой части равенства (29.10) оно принимает вид

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \mu_n^{\alpha,\beta}\, 2^{2n+\alpha+\beta+1} \int\limits_{0}^{1} (1-u)^{n+\alpha} u^{n+\beta}\,du. \tag{29.11}$$

Как известно, бета-функция Эйлера

$$B(p,q) := \int\limits_{0}^{1} (1-u)^{p-1} u^{q-1}\,du \tag{29.12}$$

выражается через гамма-функцию Эйлера по формуле

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{29.13}$$

В силу (29.12) и (29.13) из (29.11) следует, что

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \mu_n^{\alpha,\beta}\, 2^{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}. \tag{29.14}$$

Из (29.14), (29.9) и (28.7) выводим (29.4).

Поскольку $P_0^{(\alpha,\beta)}(t) \equiv 1$, из (29.1) вытекает, что

$$h_0^{(\alpha,\beta)} = \int\limits_{-1}^{1} (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\, dt. \tag{29.15}$$

С помощью замены переменной $1+t = 2u$ в интеграле из (29.15) получаем, что

$$h_0^{(\alpha,\beta)} = 2^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha} u^{\beta}\, du.$$

Отсюда в силу (29.12) и (29.13) следует (29.5).

**Замечание 29.2.** При $\alpha+\beta+1 \neq 0$ величину $h_0^{(\alpha,\beta)}$ можно вычислять и по формуле (29.4).

## § 30. **Рекуррентные соотношения и формула Кристоффеля–Дарбу для многочленов Якоби**

**Лемма 30.1.** *Пусть* $k_{\alpha,n,\nu}$ *— коэффициент при* $t^{\nu}$ *многочлена* $p_{\alpha,n}(t)$. *Тогда коэффициент* $B_n$ *рекуррентного соотношения* (20.1) *имеет вид*

$$B_n = \frac{k_{\alpha,n,n-1}}{k_{\alpha,n,n}} - \frac{k_{\alpha,n+1,n}}{k_{\alpha,n+1,n+1}}. \tag{30.1}$$

**Доказательство.** Сравнивая коэффициенты при $t^n$ в обеих частях (20.1), получаем равенство

$$k_{\alpha,n,n-1} = \frac{k_{\alpha,n,n}}{k_{\alpha,n+1,n+1}} k_{\alpha,n+1,n} + B_n k_{\alpha,n,n}. \tag{30.2}$$

Из (30.2) следует (30.1).

**Теорема 30.2.** *Коэффициенты при* $z^n$ *и* $z^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ *разложения*

$$\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(z) = k_{n,n}^{\alpha,\beta} z^n + k_{n,n-1}^{\alpha,\beta} z^{n-1} + \cdots \tag{30.3}$$

*вычисляются по формулам*

$$k_{n,n}^{\alpha,\beta} = [2^{2n+\alpha+\beta+1}\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)]^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left\{\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{30.4}$$

$$k_{n,n-1}^{\alpha,\beta} = \frac{(\alpha-\beta)\,n}{2n+\alpha+\beta}k_{n,n}^{\alpha,\beta} = \frac{(\alpha-\beta)\,n}{2n+\alpha+\beta}k_{n}^{\alpha,\beta}. \tag{30.5}$$

**Доказательство.** Формула (30.5) есть простое следствие из (28.3), так как
$$\frac{k_{n,n-1}^{\alpha,\beta}}{k_{n,n}^{\alpha,\beta}} = \frac{a_{n,n-1}^{\alpha,\beta}}{a_{n,n}^{\alpha,\beta}}. \tag{30.6}$$
Равенство (30.4) вытекает из (29.3), (29.4), (28.2) и (28.7).

**Теорема 30.3.** *Три последовательных многочлена системы* $\{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ *связаны соотношением*
$$t\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) = \widehat{A}_n^{\alpha,\beta}\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(t) + \widehat{B}_n^{\alpha,\beta}\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)+$$
$$+\widehat{A}_{n-1}^{\alpha,\beta}\widehat{P}_{n-1}^{\alpha,\beta}(t) \qquad (n\in\mathbb{Z}_+), \tag{30.7}$$
*где*
$$\widehat{A}_n^{\alpha,\beta} = 2\left\{\frac{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+2)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left\{\frac{(n+\alpha+1)(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+3)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{30.8}$$
$$\widehat{A}_{-1}^{\alpha,\beta} = \widehat{P}_{-1}^{\alpha,\beta}(t) = 0, \tag{30.9}$$
$$\widehat{B}_n^{\alpha,\beta} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}. \tag{30.10}$$

**Доказательство.** В силу (20.2)
$$\widehat{A}_n^{\alpha,\beta} = \frac{k_{n,n}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,n+1}^{\alpha,\beta}}. \tag{30.11}$$

Подставляя в правую часть (30.11) значения $k_{n,n}^{\alpha,\beta}$ и $k_{n+1,n+1}^{\alpha,\beta}$, вычисленные по формуле (30.4), получаем (30.8).

В силу (30.1) и (30.5) получаем, что

$$\widehat{B}_n^{\alpha,\beta} = \frac{k_{n,n-1}^{\alpha,\beta}}{k_{n,n}^{\alpha,\beta}} - \frac{k_{n+1,n}^{\alpha,\beta}}{k_{n+1,n+1}^{\alpha,\beta}} =$$

$$= (\alpha-\beta)\frac{n}{2n+\alpha+\beta} - (\alpha-\beta)\frac{n+1}{2n+\alpha+\beta+2},$$

откуда следует (30.10).

Из теоремы 30.3 в силу (29.3)−(29.5) вытекает

**Теорема 30.4.** *Три последовательных многочлена системы* $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ *связаны соотношением*

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t) =$$

$$= [(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)\, t+\alpha^2-\beta^2](2n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(t) -$$

$$-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t)(n\in\mathbb{Z}_+). \quad (30.12)$$

Следующая теорема дает вид формулы Кристоффеля–Дарбу в случае многочленов Якоби.

**Теорема 30.5.** *Для ядра*

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(x,t) := \widehat{P}_0^{\alpha,\beta}(x)\widehat{P}_0^{\alpha,\beta}(t) + \cdots \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \quad (30.13)$$

*имеет место формула*

$$(x-t)K_n^{(\alpha,\beta)}(x,t) =$$

$$= \widehat{A}_n^{\alpha,\beta}[\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) - \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(t)], \quad (30.14)$$

*где* $\widehat{A}_n^{\alpha,\beta}$ *имеет вид* (30.8).

Для доказательства достаточно заметить, что дробь $k_{\alpha,n}/k_{\alpha,n+1}$ в (20.14) для системы $\{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ совпадает с величиной $\widehat{A}_n^{\alpha,\beta}$, определяемой равенством (30.8).

**Замечание 30.6.** С учетом (29.3)–(29.5) вместо (30.14) можно написать

$$(x-t)K_n^{(\alpha,\beta)}(x,t)=$$
$$=\eta_n^{(\alpha,\beta)}[P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)-P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t)], \qquad (30.15)$$

где

$$\eta_n^{(\alpha,\beta)}=\frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2}\cdot\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}. \qquad (30.16)$$

## § 31. **Вычисление коэффициентов разложения многочлена Якоби $\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(x)$ по многочленам Якоби $\{\widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^n$**

**Теорема 31.1.** *Пусть* $k,\nu\in\mathbb{Z}_+;\quad \nu\ge k;\quad \alpha,\beta,\gamma>-1;$ $(\alpha-\gamma)\,\overline{\in}\,\mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}):=\int\limits_{-1}^{1}\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(t)\widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt=$$

$$=\frac{2^{\frac{\alpha-\gamma}{2}}}{\Gamma(\gamma-\alpha)}u_\nu^{\beta,\gamma}\ v_k^{\alpha,\beta}\ w_{\nu,k}^{\alpha,\beta,\gamma},$$

*где*

$$u_\nu^{\beta,\gamma}:=\left\{(2\nu+\gamma+\beta+1)\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\gamma+\beta+1)\Gamma(\nu+\gamma+1)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$v_k^{\alpha,\beta}:=\left\{(2k+\alpha+\beta+1)\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\beta+1)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$w_{\nu,k}^{\alpha,\beta,\gamma}:=\frac{\Gamma(\nu+k+\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\nu+k+\alpha+\beta+2)}\cdot\frac{\Gamma(\nu-k+\gamma-\alpha)}{\Gamma(\nu-k+1)}.$$

**Доказательство.** Пусть $\nu,k\in\mathbb{Z}_+,\ k\le\nu$. Тогда в силу (29.3) и (29.4) имеем

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) =$$

$$= \{h_\nu^{(\gamma,\beta)} h_k^{(\alpha,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-1}^{1} P_\nu^{(\gamma,\beta)}(t) P_k^{(\alpha,\beta)}(t)(1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt.$$

Отсюда в силу формулы Родрига (26.2) следует, что

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) = \{h_\nu^{(\gamma,\beta)} h_k^{(\alpha,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} P_\nu^{(\gamma,\beta)}(t) \frac{d^k}{dt^k}[(1-t)^{k+\alpha}(1+t)^{k+\beta}]dt.$$

Применяя $k$ раз формулу интегрирования по частям, с учетом равенства нулю внеинтегральных членов, находим, что

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) = \{h_\nu^{(\gamma,\beta)} h_k^{(\alpha,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^k}{2^k k!}(-1)^k \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} (1-t)^{k+\alpha}(1+t)^{k+\beta} \frac{d^k}{dt^k} P_\nu^{(\gamma,\beta)}(t) dt.$$

Учитывая (27.11) и (28.7), получим

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) == \{h_\nu^{(\gamma,\beta)} h_k^{(\alpha,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{2k} \cdot k!} \cdot \frac{\Gamma(\nu+k+\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\gamma+\beta+1)} \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} (1-t)^{k+\alpha-\gamma-k}[(1-t)^{k+\gamma}(1+t)^{k+\beta} P_{\nu-k}^{(k+\gamma,k+\beta)}(t)]dt.$$

В силу (28.7) это дает

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) = \{h_\nu^{(\gamma,\beta)} h_k^{(\alpha,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{2k} \cdot k!} \cdot \frac{\Gamma(\nu+k+\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\gamma+\beta+1)} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} (1-t)^{k+\alpha-\gamma-k}[(1-t)^{k+\gamma}(1+t)^{k+\beta}P_{\nu-k}^{(k+\gamma,k+\beta)}(t)]dt.$$

Снова применяя формулу Родрига (26.2), получаем

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) = \{h_\nu^{(\gamma,\beta)}h_k^{(\alpha,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2^{2k}\cdot k!}\cdot\frac{\Gamma(\nu+k+\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\gamma+\beta+1)}\times$$

$$\times\frac{(-1)^{\nu-k}}{2^{\nu-k}\cdot(\nu-k)!}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha-\gamma}\frac{d^{\nu-k}}{dt^{\nu-k}}[(1-t)^{\nu+\gamma}(1+t)^{\nu+\beta}]dt,$$

что после $(\nu-k)$-кратного интегрирования по частям приводит к равенству

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) = \{h_\nu^{(\gamma,\beta)}h_k^{(\alpha,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}}\frac{(-1)^{\nu-k}}{2^{\nu+k}k!\cdot(\nu-k)!}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\nu+k+\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\gamma+\beta+1)}(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)\ldots(\alpha-\gamma-\nu+k+1)\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}[(1-t)^{\nu+\gamma}(1+t)^{\nu+\beta}](1-t)^{\alpha-\gamma-\nu+k}dt.$$

Отсюда, применяя (28.7), находим, что

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) = \{h_\nu^{(\gamma,\beta)}h_k^{(\alpha,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\nu+k+\gamma+\beta+1)\Gamma(\nu-k+\gamma-\alpha)}{2^{\nu+k}k!\,(\nu-k)!\,\Gamma(\nu+\gamma+\beta+1)\Gamma(\gamma-\alpha)}I_{k,\nu}^{\alpha,\beta}, \tag{31.1}$$

где

$$I_{k,\nu}^{\alpha,\beta} := \int_{-1}^{1}(1-t)^{k+\alpha}(1+t)^{\nu+\beta}dt. \tag{31.2}$$

В (31.2) произведем замену переменной $u = 2^{-1}(1+t)$. Тогда окажется, что $t = 2u-1$, $1-t = 1-2u+1 = 2(1-u)$, $dt = 2du$.

При этом отрезок $-1 \leq t \leq 1$ перейдет в отрезок $0 \leq u \leq 1$. В результате из (31.2) получим формулу

$$I_{k,\nu}^{\alpha,\beta} = 2^{k+\alpha+\nu+\beta+1} \int\limits_0^1 (1-u)^{k+\alpha} u^{\nu+\beta} du,$$

из которой в силу (29.12) и (29.13) следует, что

$$I_{k,\nu}^{\alpha,\beta} = 2^{k+\alpha+\nu+\beta+1} \frac{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+k+\alpha+\beta+2)}. \tag{31.3}$$

Из (31.1)–(31.3) и (29.4) вытекает справедливость теоремы 31.1.

## Список литературы


1. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.

2. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: ГИФМЛ, 1961.

3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Пер. с англ. 2-е изд. М.: Наука, 1974.

4. *Геронимус Я. Л.* Теория ортогональных многочленов (обзор достижений отечественной математики). М.: Гостехиздат, 1950.

5. *Геронимус Я. Л.* Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М.: Физматгиз, 1958.

6. *Гренандер У., Сегё Г.* Тёплицевы формы и их приложения. М.: Иностр. лит., 1961.

7. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: Иностр. лит., 1948.

8. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М. ; Л.: ГИТТЛ, 1949.

9. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985.

10. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.

11. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва / Пер. с польск. М.: Наука, 1983.

12. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

13. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М. ; Л.: Наука, 1964.

14. *Старинец В. В.* Обобщенно-классические ортогональные многочлены. М.: Изд-во МГУП, 2000.

15. *Суетин П. К.* Многочлены, ортогональные по площади, и многочлены Бибербаха // Тр. Мат. ин-та АН СССР. Т. 100. М.: Наука, 1971.

16. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1979.

17. *Суетин П. К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. М.: Наука, 1988.

18. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала: ДГПУ, 1997.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Бадков Владимир Михайлович

# ВВЕДЕНИЕ В ЕДИНУЮ ТЕОРИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

У ч е б н о е   п о с о б и е

Редактор и корректор С. Г. Галинова

Компьютерная верстка – В. М. Бадков

План выпуска 2006 г., поз. 37
Подписано в печать 19.10.2006. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Уч.-изд. л. 6,0. Усл. печ.л. 7,67. Тираж 200 экз. Заказ .
Издательство Уральского университета. 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ». 620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.