МВ и ССО РСФСР
Уральский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им. А. М. Горького

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Методические указания
для практических занятий
по функциональному анализу

Свердловск
1985

Методические указания подготовлены
кафедрой математического анализа
математико-механического факультета

Составитель Л. Ф. Коркина

Утверждено учебно-методической комиссией
математико-механического факультета
13 ноября 1984 г.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий, контрольных мероприятий и самостоятельной работы студентов математико-механического факультета по курсу функционального анализа, содержат краткую сводку теоретических результатов и задачи по следующим темам:

1. Линейные нормированные пространства, полнота, сепарабельность.

2. Сравнение норм.

3. Компактность.

4. Задача о наилучшем приближении.

5. Гильбертовы пространства.

Задачи повышенной трудности в данной работе отмечены звездочкой. Некоторые из них могут быть рекомендованы студентам в качестве тем для курсовых работ.

Источники, использованные при составлении указаний, даны в списке литературы. Необходимый теоретический материал можно найти в следующих изданиях:

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976.

Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. - М.: Наука, 1965.

Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980.

I. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ПОЛНОТА, СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ

Линейное пространство X над полем K (где K всегда либо R, либо C) называется нормированным пространством, если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$, называемое нормой x, так, что выполнены следующие аксиомы:

1) $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ для любого $x \in X$ и любого $\lambda \in K$;

3) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ для любых $x, y \in X$.

Открытым шаром радиуса r с центром в точке $x_0 \in X$ называется множество $B(x_0,r)=\{x \in X : \|x-x_0\|<r\}$.

Замкнутым шаром радиуса r с центром в точке $x_0 \in X$ называется множество $B[x_0,r]=\{x \in X : \|x-x_0\| \leqslant r\}$.

Сферой радиуса r с центром в точке $x_0 \in X$ называется множество $S_r(x_0)=\{x \in X : \|x-x_0\|=r\}$.

Подпространством нормированного пространства X будем называть замкнутое линейное многообразие из X.

Множество $A \subset X$ называется выпуклым, если вместе с точками x и y оно содержит весь отрезок $[x,y]$, соединяющий эти точки, т.е. множество точек $z \in X$ вида $z=tx+(1-t)y$, где $t \in [0,1]$.

Последовательность $x_n \in X$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon>0$ существует $m_\varepsilon \in N$ такое, что для любых n, $p>m_\varepsilon$ выполняется неравенство $\|x_n-x_p\|<\varepsilon$.

Линейное нормированное пространство X называется банаховым, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.

<u>Теорема.</u> В банаховом пространстве любая последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет, и притом единственную, общую точку.

Множество $A \subset X$ называется всюду плотным в X, если $\bar{A}=X$, где $\bar{A}$ - замыкание A. Множество $A \subset X$ называется нигде не плотным в X, если каждый шар из X содержит другой шар, свободный от точек множества A.

Нормированное пространство X называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

1. Пусть x, x_n, y, $y_n \in X$. Доказать, что:

1) если $x_n \to x$, то x_n - ограниченная последовательность;

2) если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$;

3) если $x_n \to x$, $\|x_n - y_n\| \to 0$, то $y_n \to x$;

4) если $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n \in K$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$;

5) если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $x_n + y_n \to x + y$.

Доказать утверждения (2 - 7):

2. Замкнутый (открытый) шар является замкнутым (открытым) множеством.

3. Замыкание открытого шара есть замкнутый шар.

4. Внутренность замкнутого шара есть открытый шар.

5. Замыкание линейного многообразия является линейным многообразием.

6. Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество.

7. Аксиома треугольника в определении нормы эквивалентна требованию выпуклости шара.

8. Доказать, что в нормированном пространстве из условия $B(x_1, r_1) \subset B(x_2, r_2)$ следуют неравенства:
$r_1 \leqslant r_2$, $\|x_1 - x_2\| \leqslant r_2 - r_1$.

9. Является ли нормированным пространством линейное пространство K^2, если для $x = (\xi_1, \xi_2) \in K^2$:

1) $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|} + \sqrt{|\xi_2|}$;

2) $\|x\| = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p)^{1/p}$ при $0 < p < 1$;

3) $\|x\| = |\xi_1 - \xi_2| + |\xi_1|$;

4) $\|x\| = \max\{|\xi_1 + 2\xi_2|, |\xi_1 - \xi_2|\}$?

10. Нарисовать единичные шары в R^2, если для $x = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ нормы определены следующим образом:

1) $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$;

2) $\|x\| = (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{1/2}$;

3) $\|x\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$.

11. Нарисовать единичные шары в R^3, если для $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3$:

1) $\|x\| = \max\{(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{1/2}, |\xi_3|\}$;

2) $\|x\| = (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{1/2} + |\xi_3|$;

3) $\|x\| = (4|\xi_1|^2 + 1/9|\xi_2|^2 + |\xi_3|^2)^{1/2}$;

4) $\|x\| = \max\{2|\xi_1|, 1/3|\xi_2|, |\xi_3|\}$;

5) $\|x\| = 2|\xi_1| + 1/3|\xi_2| + |\xi_3|$.

12. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций определить норму следующим образом:

1) $\|x\| = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{[a,b]} |\dot{x}(t)|$;

2) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{[a,b]} |\dot{x}(t)|$;

3) $\|x\| = \max\limits_{[a,b]} |\dot{x}(t)|$;

4) $\|x\| = \max\limits_{[a,b]} |\dot{x}(t)| + \int_a^b |x(t)|dt$?

13. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций определить норму следующим образом:

1) $\|x\| = |x(a)| + |\dot{x}(a)| + \max\limits_{[a,b]} |\ddot{x}(t)|$;

2) $\|x\| = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{[a,b]} |\ddot{x}(t)|$;

3) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{[a,b]} |\ddot{x}(t)|$;

4) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{[a,b]} |\dot{x}(t)| + \left(\int_a^b |\ddot{x}(t)|^2 dt\right)^{1/2}$;

5) $\|x\| = \max\limits_{[a,b]} |\ddot{x}(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$?

14. Покажите, что всякая фундаментальная последовательность в нормированном пространстве ограничена.

15. Пусть $x_n \in X$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$ сходится. Доказать, что x_n - фундаментальная последовательность. Верно ли обратное утверждение ?

Докажите утверждения (16 - 18):

16. Нормированное пространство X полно тогда и только тогда, когда всякая фундаментальная последовательность из X содержит сходящуюся подпоследовательность.

17. Нормированное пространство X является банаховым тогда и только тогда, когда всякий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, для которого $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, сходится в X .

18. Линейное многообразие из банахова пространства X само является банаховым пространством тогда и только тогда, когда оно замкнуто в X .

Доказать, что следующие линейные пространства над полем K с заданными на них нормами являются полными линейными нормированными пространствами (19 - 32):

19. ℓ_p^n $(1 \le p < \infty)$ - пространство векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ $(\xi_i \in K)$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p} .$$

20. ℓ_∞^n – пространство векторов $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ $(\xi_i\in K)$ с нормой

$$\|x\|=\max_{1\le i\le n}|\xi_i| .$$

21. ℓ_p $(1\le p<\infty)$ – пространство последовательностей $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)$ $(\xi_i\in K)$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty$, с нормой

$$\|x\|=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\Big)^{1/p} .$$

22. ℓ_∞ – пространство ограниченных последовательностей $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)$ $(\xi_i\in K)$ с нормой

$$\|x\|=\sup_i|\xi_i| .$$

23. c – пространство сходящихся последовательностей $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)$ $(\xi_i\in K)$ с нормой

$$\|x\|=\sup_i|\xi_i| .$$

24. c_0 – пространство стремящихся к нулю последовательностей $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)$ $(\xi_i\in K)$ с нормой

$$\|x\|=\max_i|\xi_i| .$$

25. $C[a,b]$ – пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\|=\max_{[a,b]}|x(t)| .$$

26. $C^m[a,b]$ – пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\|=\sum_{k=0}^{m}\max_{[a,b]}|x^{(k)}(t)| .$$

27. $M[a,b]$ – пространство ограниченных на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\|=\sup_{[a,b]}|x(t)| .$$

28. $L_p[a,b]$ $(1\le p<\infty)$ – пространство классов эквивалентности измеримых по Лебегу на $[a,b]$ функций с интегрируемой p-ой степенью и нормой

$$\|x\|=\Big(\int_a^b|x(t)|^p\,dt\Big)^{1/p} .$$

29. $L_\infty[a,b]$ – пространство классов эквивалентности измеримых по Лебегу существенно ограниченных* на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\|=\inf_{\{E:\,\mu(E)=0\}}\ \sup_{t\in[a,b]\setminus E}|x(t)| .$$

---

* Измеримая функция $x(t)$ на $[a,b]$ называется существенно ограниченной, если существует такая константа C, что $\|x(t)\|\le C$ почти всюду на $[a,b]$.

30. $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ - пространство классов эквивалентности измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^n$ функций с интегрируемой p-ой степенью и нормой

$$\|x\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x(t)|^p dt\right)^{1/p} .$$

31. $V[a,b]$ - пространство функций, имеющих ограниченное изменение на $[a,b]$, с нормой

$$\|x\| = |x(a)| + \bigvee_a^b x(t) .$$

32. $H(\mathcal{D})$ - пространство функций аналитических в единичном круге $\mathcal{D}$ и непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}$ с нормой

$$\|x\| = \max_{|z|=1} |x(z)| .$$

33. Покажите, что c_0 - подпространство в c, а c - подпространство в ℓ_∞.

34. Будет ли в $C[a,b]$ подпространством линейное многообразие непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций ?

Доказать утверждения (35 - 37):

35. Сходимость в ℓ_p^n $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ эквивалентна покоординатной сходимости.

36. Сходимость в ℓ_∞, c, c_0 равномерна по координатам.

37. Сходимость в $C[a,b]$ эквивалентна равномерной сходимости на $[a,b]$.

38. В каких из пространств ℓ_p, c, c_0 сходятся следующие последовательности:

1) $x_n = (1, 2, \ldots, n, 0, \ldots)$; 2) $x_n = (1, 2^\alpha, \ldots, n^\alpha, 0, \ldots)$;

3) $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots)$; 4) $x_n = (\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}, 0, \ldots)$;

5) $x_n = (1, \frac{1}{\ln 2}, \ldots, \frac{1}{\ln n}, 0, \ldots)$; 6) $x_n = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, 1, 1, \ldots)$;

7) $x_n = (\frac{\sin 1}{2}, \frac{2\sin 2}{3}, \ldots, \frac{n \sin n}{n+1}, \sin(n+1), \sin(n+2), \ldots)$

39. Сходятся ли в $C[0,1]$ последовательности:

I) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$; 2) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$?

40. Сходятся ли в $C[0,1]$, $C^1[0,1]$ последовательности:

I) $x_n(t) = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1}$; 2) $x_n(t) = \frac{t^n}{n}$?

41. Построить замыкание множества финитных последовательностей в пространствах ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. (Последовательность называется финитной, если в ней конечное число отличных от нуля элементов).

42. Доказать, что линейное пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt$$

не является банаховым. Найти пополнение.

43. Плотно ли множество непрерывных на $[a, b]$ функций в $L_p[a, b]$, если $1 \leq p \leq \infty$?

44. Найдите в ℓ_1 плотное выпуклое множество.

45. Доказать, что множество кусочно линейных непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в пространстве $C[a, b]$.

46. Опишите пополнения пространства многочленов от t ,снабженного нормой:

I) $\|p\| = \max\limits_{[a,b]} |p(t)|$;

2) $\|p\| = \max\limits_{[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{[a,b]} |p'(t)|$;

3) $\|p\| = \max\limits_{[a,b]} |p(t)| + |p'(a)|$;

4)* $\|p\| = \max\limits_{[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{[c,d]} |p'(t)|$;

5) $\|p\| = \max\limits_{[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{[a,b]} |p''(t)|$;

6)* $\|p\| = \max\limits_{k} \dfrac{|p^{(k)}(0)|}{k!}$;

7)* $\|p\| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{|p^{(k)}(0)|}{k!} + \max\limits_{[-1,1]} |p(t)|$;

47. Пусть A , $B \subset X$ - всюду плотные множества. Возможно ли, что $A \cap B = \varnothing$?

48. Доказать, что дополнение к нигде не плотному множеству всюду плотно. Справедливо ли обратное утверждение?

49. Доказать, что дополнение к открытому всюду плотному множеству нигде не плотно.

50. Доказать, что замыкание нигде не плотного множества нигде не плотно.

5I. Покажите, что утверждение теоремы о вложенных шарах, вообще говоря, несправедливо, если отказаться от замкнутости шаров либо от полноты пространства.

52. Пусть в нормированном пространстве X любая последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Доказать, что X - банахово пространство.

53. Пусть X – банахово пространство. Доказать утверждения:

I. Всякая последовательность вложенных друг в друга непустых замкнутых множеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет не – пустое пересечение. (Диаметром множества A в нормированном пространстве называется число

$$d(A)=\sup_{x,y\in A}\|x-y\|.)$$

2. Любая последовательность замкнутых вложенных шаров имеет общую точку.

54. Привести пример в банаховом пространстве системы замкнутых вложенных ограниченных выпуклых множеств, имеющих пустое пересечение.

55. Пусть X_0 – подпространство сепарабельного нормированного пространства X. Доказать, что X_0 – сепарабельно.

56. Доказать, что нормированное пространство несепарабельно тогда и только тогда, когда в нем существует несчетное множество попарно непересекающихся шаров радиуса I.

57. Доказать сепарабельность пространств:
c_0, c, $C[a,b]$, $C^m[a,b]$, $H(\mathcal{D})$, ℓ_p^n $(1\le p\le\infty)$ и, если $1\le p<\infty$, ℓ_p, $L_p[a,b]$, $L_p(\mathbb{R})$.

58. Доказать, что пространства ℓ_∞, $M[a,b]$, $L_\infty[a,b]$, $L_\infty(\mathbb{R})$ несепарабельны.

59. Рассмотрим на прямой линейные пространства:

I) $C(\mathbb{R})$ – всех ограниченных непрерывных функций;

2) $C_0(\mathbb{R})$ – всех непрерывных функций, у которых $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$;

3) $C_1(\mathbb{R})$ – всех финитных непрерывных функций.

(Функция называется финитной, если она равна нулю вне некоторого интервала).

В этих пространствах вводится норма

$$\|x\|=\sup_{|t|<\infty}|x(t)|.$$

Будут ли указанные пространства полными, сепарабельными?

60. Являются ли $C_0(\mathbb{R})$ и $C_1(\mathbb{R})$ подпространствами в $C(\mathbb{R})$?

6I. На множестве непрерывных функций, имеющих ограниченное изменение на $[a,b]$, введена норма

$$\|x\|_{CV}=\max_{[a,b]}|x(t)|+\bigvee_a^b x(t).$$

Доказать, что полученное пространство является банаховым. Сепара – бельно ли оно ?

62. В линейном пространстве функций, имеющих ограниченное изменение на $[a,b]$, введены нормы:

1) $\|x\| = \bigvee_a^b x(t) + \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$;

2) $\|x\| = |x(a)| + \bigvee_a^b x(t) + \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$.

Доказать, что линейное пространство банахово относительно введенных норм.

2. СРАВНЕНИЕ НОРМ

Пусть на линейном пространстве X определены две нормы: $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Будем говорить, что $\|\cdot\|_1$ сильнее $\|\cdot\|_2$ ($\|\cdot\|_1 \geqslant \|\cdot\|_2$), если топология, порождаемая $\|\cdot\|_1$ в X, сильнее топологии, порождаемой $\|\cdot\|_2$ в X.

Для того, чтобы $\|\cdot\|_1$ была сильнее $\|\cdot\|_2$, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\alpha > 0$ такое, что $\|x\|_2 \leqslant \alpha \|x\|_1$ для всех $x \in X$.

Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на одном и том же линейном пространстве называются эквивалентными, если они порождают одну и ту же топологию.

Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что для всех $x \in X$ $\beta\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \alpha\|x\|_1$.

Линейные нормированные пространства X и Y над одним и тем же полем K называются изоморфными, если существует взаимно-однозначное взаимно непрерывное линейное отображение X на Y.

<u>Теорема.</u> Всякое n - мерное линейное нормированное пространство над полем K изоморфно пространству ℓ_2^n над полем K.

1. Доказать, что $\|\cdot\|_1 \geqslant \|\cdot\|_2$ тогда и только тогда, когда из $\|x_n - x\|_1 \to 0$ следует $\|x_n - x\|_2 \to 0$.

2. На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, и в одной из них X - банахово пространство. Доказать, что X является банаховым пространством и в другой норме.

3*. Доказать, что если две сравнимые нормы в линейном пространстве превращают его в банахово пространство, то эти нормы эквивалентны.

4. Пусть $Z = X \times Y$, где X и Y линейные нормированные пространства, $z = (x, y) \in Z$. Доказать, что

1) Z является линейным нормированным пространством относительно норм

$\|z\|_p = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$,

$\|z\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$;

2) все эти нормы эквивалентны;

3) Z - банахово пространство если X и Y - банаховы.

5. Пусть банахово пространство X изоморфно нормированному пространству Y. Доказать, что Y - банахово пространство.

6. Показать, что всякое конечномерное нормированное пространство является банаховым.

7. Доказать, что всякое конечномерное линейное многообразие нормированного пространства является его подпространством.

8. Покажите что в пространстве непрерывных на $[a,b]$ функций норма $\|x\|_0 = \max\limits_{[a,b]} |x(t)|$ сильнее нормы $\|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)|\,dt$, и эти нормы не эквивалентны.

9. В пространстве $C^m[a,b]$ введены три нормы:

$$\|x\|_0 = \sum_{k=0}^{m} \max_{[a,b]} |x^{(k)}(t)|,$$

$$\|x\|_1 = \max_{0\le k\le m} \{ \max_{[a,b]} |x^{(k)}(t)| \},$$

$$\|x\|_2 = \max_{[a,b]} |x(t)|.$$

Сравните их.

10. Докажите эквивалентность норм:

1) в пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций

$$\|x\|_0 = \max_{[a,b]} |x(t)| + \max_{[a,b]} |\dot{x}(t)|,$$

$$\|x\|_1 = |x(a)| + \max_{[a,b]} |\dot{x}(t)|,$$

$$\|x\|_2 = \max_{[a,b]} (|x(t)| + |\dot{x}(t)|),$$

$$\|x\|_3 = \max_{[a,b]} |\dot{x}(t)| + \int_a^b |x(t)|\,dt;$$

2) в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций

$$\|x\|_0 = \sum_{k=0}^{2} \max_{[a,b]} |x^{(k)}(t)|,$$

$$\|x\|_1 = |x(a)| + |\dot{x}(a)| + \max_{[a,b]} |\ddot{x}(t)|,$$

$$\|x\|_2 = |x(a)| + \max_{[a,b]} |\dot{x}(t)| + \max_{[a,b]} |\ddot{x}(t)|,$$

$$\|x\|_3 = \max_{[a,b]} |\ddot{x}(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt \right)^{1/2}.$$

11. В пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций введем норму

$$\|x\|_{W_2^1[a,b]} = \left[\int_0^1 (|x(t)|^2 + |\dot{x}(t)|^2)\,dt \right]^{1/2}.$$

Проверить аксиомы нормы. Будет ли это пространство банаховым?

12*. В пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций сравнить топологии, порождаемые нормами пространств: $C[a,b]$, $C^1[a,b]$, $W_2^1[a,b]$.

13. Пусть X – бесконечномерное линейное пространство, на котором заданы две сравнимые, но не эквивалентные нормы. Могут ли они быть эквивалентными на бесконечномерном линейном многообразии $X_0 \subset X$?

14*. Доказать, что всякое подпространство в $C[a,b]$, состоящее из дифференцируемых функций, конечномерно.

15. Доказать, что нормы

$$\|x\| = \max_{[a,b]} |x(t)| \quad \text{и} \quad \|x\| = \max_{[a,b]} (|x(t)| + |x'(t)|)$$

не эквивалентны ни на каком бесконечномерном линейном многообразии непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций.

Доказать утверждения (16 – 18):

16. Ни одно из включений $L_2(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$, $L_1(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ не имеет места.

17. $L_q[a,b] \subset L_p[a,b]$ и $L_q[a,b] \neq L_p[a,b]$, если $1 \leq p < q \leq \infty$.

18. $\left(\int_a^b \frac{|x(t)|^p}{b-a} dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b \frac{|x(t)|^q}{b-a}\right)^{1/q}$, если $1 \leq p < q < \infty$, и $x \in L_q[a,b]$.

19. При каких p и q $\ell_p \subset \ell_q$?

20. На множестве всех элементов из ℓ_p сравнить топологии, порождаемые нормами пространств ℓ_p и ℓ_q, если $1 \leq p < q \leq \infty$. Найти замыкание этого множества в топологии ℓ_q.

21. На множестве всех элементов из $L_q[a,b]$ сравнить топологии, порождаемые нормами пространств $L_p[a,b]$ и $L_q[a,b]$, если $1 \leq p < q \leq \infty$. Найти замыкание этого множества в топологии $L_p[a,b]$.

22. В пространстве функций, имеющих ограниченное изменение на $[a,b]$, доказать эквивалентность норм:

$$\|x\|_0 = |x(a)| + \bigvee_a^b x(t);$$

$$\|x\|_1 = \bigvee_a^b x(t) + \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty;$$

$$\|x\|_2 = |x(a)| + \bigvee_a^b x(t) + \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty.$$

3. КОМПАКТНОСТЬ

Множество M в нормированном пространстве X называется компактным, если любая последовательность $x_n \in M$ содержит подпоследовательность x_{n_k}, сходящуюся к $x \in M$.

Всякое компактное множество ограничено и замкнуто.

Множество M в нормированном пространстве X называется предкомпактным, если его замыкание компактно в X.

Множество M в нормированном пространстве X называется вполне ограниченным, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε - сеть, т.е. конечное число элементов $\{x_i\}_1^n \subset X$ таких, что $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

Теорема Хаусдорфа. Для предкомпактности множества M в нормированном пространстве X необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным.

Теорема Арцела. Множество $M \subset C[a,b]$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено в $C[a,b]$ и равностепенно непрерывно, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|x(t) - x(t')| < \varepsilon$ для всех $t, t' \in [a,b]$, $|t - t'| < \delta$ и всех $x \in M$.

I. Привести примеры:

I) вполне ограниченного, но не предкомпактного множества;

2) предкомпактного, но не компактного множества.

2. Доказать, что для предкомпактности множества M в нормированном пространстве X необходимо, а в случае полноты X достаточно, существование для всякого $\varepsilon > 0$ предкомпактной ε - сети, т.е. такого предкомпактного множества $N \subset X$, что $M \subset \bigcup_{x \in N} B(x, \varepsilon)$.

Доказать утверждения (3 - I0):

3. Множество $M \subset \ell_p^n$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено в ℓ_p^n.

4. Множество $M \subset c_0$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено в c_0 и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $|\xi_n| < \varepsilon$ для всех $n > m_\varepsilon$ и всех $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in M$.

5. Множество $M \subset c_0$ предкомпактно тогда и только тогда, когда существует элемент $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \dots)$ такой, что $|\xi_n| \leq |\xi_n^0|$ для всех n и всех $x = (\xi_1, \xi_2 \dots) \in M$.

6. Множество $M \subset c$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено в c и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое,

что $|\xi_n - \xi_p| < \varepsilon$ для всех $n, p > m_\varepsilon$ и всех $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $x \in M$.

7. Множество $M \subset \ell_p$ $(1 \le p < \infty)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено в ℓ_p и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $m_\varepsilon \in \mathcal{N}$ такое, что $\sum\limits_{i=m_\varepsilon}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon$ для всех $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $x \in M$.

8. Множество $M \subset L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено в $L_p[a, b]$ и равностепенно непрерывно в среднем, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_a^b |x(t+h) - x(t)|^p dt < \varepsilon$$

для всех h таких, что $|h| < \delta$, и всех $x \in M$ (считаем $x(t) = 0$, если $t \,\overline{\in}\, [a, b]$). (Критерий М.Рисса.)

9. Множество $M \subset L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено в $L_p[a, b]$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_a^b |x_h(t) - x(t)|^p dt < \varepsilon$$

для всех h таких, что $0 < h < \delta$, и всех $x \in M$, где

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)\, d\tau$$

(считаем $x(t) = 0$, если $t \,\overline{\in}\, [a, b]$). (Критерий А.Н.Колмогорова.)

10. Множество $M \subset L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено в $L_p(\mathbb{R})$; равностепенно непрерывно в среднем, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t+h) - x(t)|^p dt < \varepsilon$$

для всех h таких, что $|h| < \delta$, и всех $x \in M$; для любого $\varepsilon > 0$ существует число A такое, что

$$\int_A^{\infty} |x(t)|^p dt + \int_{-\infty}^{-A} |x(t)|^p dt < \varepsilon$$

для всех $x \in M$.

11. Сформулировать критерий предкомпактности множества M в пространстве $C^1[a, b]$.

12. Доказать, что предкомпактность множества в конечномерном линейном нормированном пространстве эквивалентна его ограниченности.

13. Доказать, что множество полиномов степени не выше n компактно в $C[a,b]$ тогда и только тогда, когда их коэффициенты ограничены в совокупности.

14. Предкомпактны ли следующие множества функций в пространствах $C[0,1]$, $L_p[0,1]$ $(1 \le p < \infty)$:

1) $x_n = t^n$, $n=1,2,\ldots$; 2) $x_n = (\alpha t)^n$, $n=1,2,\ldots$;
3) $x_n = \sin nt$, $n=1,2,\ldots$; 4) $x_n = \sin(t+n)$, $n=1,2,\ldots$;
5) $x_\alpha = e^{t+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; 6) $x_\alpha = e^{t-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$;
7) $x_\alpha = \sin \alpha t$, $\alpha \in \mathbb{R}$?

15. Доказать, что шар $B[x_0, r]$ из пространства $C^1[a,b]$ предкомпактен в пространстве $C[a,b]$. Будет ли он компактным в $C[a,b]$?

16. Какие из следующих множеств предкомпактны в пространстве $C[0,1]$ какие компактны:

1) $\{x \in C^1[0,1] : |x(t)| \le B_0,\ |x'(t)| \le B_1\}$;
2) $\{x \in C^1[0,1] : |x(t_0)| \le B_0,\ |x'(t)| \le B_1\}$;
3) $\{x \in C^2[0,1] : |x(t)| \le B_0,\ |x'(t)| \le B_1,\ |x''(t)| \le B_2\}$;
4)* $\{x \in C^2[0,1] : |x(t)| \le B_0,\ |x''(t)| \le B_2\}$;
5) $\{x \in C^2[0,1] : |x'(t)| \le B_1,\ |x''(t)| \le B_2\}$;
6) $\{x \in C[0,1] : |x(t)| \le B,\ |x(t_1) - x(t_2)| \le L|t_1 - t_2|\}$;
7) $\{x \in C^1[0,1] : x(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau,\ |y(t)| \le B\}$?

17. Доказать компактность в $C[0,1]$ следующих множеств:

1) $\{x \in C^1[0,1] : \|x\|^2_{W_2^1[0,1]} = \int_0^1 (|x'(t)|^2 + |x(t)|^2)dt \le 1\}$;
2) $\{x \in C^1[0,1] : \int_0^1 |x'(t)|^p dt \le 1,\ 1 < p < \infty,\ |x(0)| \le 1\}$.

18. Будет ли шар $B(x_0, r)$ из пространства $C[a,b]$ предкомпактным в $L_p[a,b]$ при каком-либо $p \ge 1$?

19. Предкомпактны ли следующие множества в пространстве $L_2[0,1]$:

1) $x_\alpha = t^\alpha$, $\alpha > -\frac{1}{2}$; 2) $x_n(t) = \sin nt$, $n=1,2,\ldots$;
3) $x(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau$, где $\int_0^1 |y(\tau)|^2 d\tau \le 1$;
4) $x_n(t) = (\ln t)^n$, $n=1,2,\ldots$?

20. Предкомпактны ли следующие множества в пространстве $L_2(\mathbb{R})$:

1) $x_\alpha(t) = \dfrac{1}{1+(t+\alpha)^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
2)* $x_{\alpha,\beta}(t) = \dfrac{t^\alpha}{1+(t+\beta)^2}$, $-\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$, $|\beta| < 1$,

21. Эллипсоидом в пространстве ℓ_2 назовем множество всех последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell_2$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_i}{a_i}\right|^2 \le 1$, где $a_i > 0$ заданная последовательность. Для

каких последовательностей $\{\alpha_i\}_1^\infty$ эллипсоид предкомпактен ?

22. Параллелепипедом в пространстве ℓ_2 назовем множество всех последовательностей $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in\ell_2$, удовлетворяющих условиям $|\xi_i|\le\alpha_i$, где $\alpha_i>0$ заданная последовательность. При каких $\{\alpha_i\}_1^\infty$ параллелепипед предкомпактен ?

23. Докажите, что единичный шар $B[0,1]$ в ℓ_2 нельзя покрыть конечным числом шаров радиуса α, если $0<\alpha<1$.

24. Показать, что выпуклая оболочка компактного множества в банаховом пространстве – компактное множество.

25. Пусть X_0 – подпространство нормированного пространства X, $X_0\ne X$. Доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует y с $\|y\|=1$ такой, что $\|x-y\|>1-\varepsilon$ для всех $x\in X_0$.

26. Показать на примере

$$X=C[-1,1],\quad X_0=\{x(t)\in C[-1,1]:\int_0^1 x(t)\,dt=\int_0^{-1}x(t)\,dt\},$$

что постоянную $1-\varepsilon$ в задаче 25 нельзя заменить на I.

27. Доказать, что в бесконечномерном линейном нормированном пространстве сфера $S_1(0)$ содержит счетный набор элементов $\{x_i\}_1^\infty$ таких, что $\|x_i-x_j\|>1/2$ при $i\ne j$.

28. Доказать, что нормированное пространство конечномерно тогда и только тогда, когда его единичная сфера $S_1(0)$ компактна.

4. ЗАДАЧА О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Расстоянием от точки x до множества A в нормированном пространстве X называется число

$$\rho(x,A)=\inf_{y\in A}\|x-y\|.$$

Говорят, что расстояние от точки x до множества A достижимо, если существует элемент $y^*\in A$ такой, что $\rho(x,A)=\|x-y^*\|$. Элемент y^* называется элементом наилучшего приближения x элементами A.

Расстоянием между множествами A и B в нормированном пространстве X называется число

$$\rho(A,B)=\inf_{x\in A,\,y\in B}\|x-y\|.$$

Расстояние между множествами A и B достигается на паре точек $x^*\in A$, $y^*\in B$, если $\rho(A,B)=\|x^*-y^*\|$.

Нормированное пространство X называется строго нормированным, если при $x\ne 0$, $y\ne 0$ равенство $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$

возможно лишь при $y = \alpha x$, где $\alpha > 0$.

Доказать утверждения (I – 6):

I. $f(x) = \rho(x, A)$ непрерывное отображение X в $\mathbb{R}$.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in X : \rho(x, A) < \varepsilon\}$ открыто, а множество $\{x \in X : \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$ замкнуто.

3. $\rho(x, A) = \rho(x, \bar{A})$.

4. $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, B) = \rho(A, \bar{B}) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$.

5. $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \bar{A}$.

6. $\rho(A, B) > 0$, если $\bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$, A – предкомпактное множество.

7. Привести пример выпуклых множеств A и B таких, что $\bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$ и $\rho(A, B) = 0$.

8. A и B – выпуклые ограниченные множества, $\bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$. Обязательно ли $\rho(A, B) > 0$?

9. Всегда ли достигается расстояние между точкой и замкнутым множеством в нормированном пространстве ?

I0. Пусть A и B – компактные множества в X. Доказать, что расстояние между ними достигается на некоторой паре точек.

II. Докажите, что в нормированном пространстве достигается расстояние от точки до произвольного конечномерного подпространства.

I2. Привести пример, показывающий, что расстояние от точки до выпуклого множества может реализоваться не единственным образом.

I3. Пусть X_0 – подпространство нормированного пространства X, и существует более одного элемента наилучшего приближения x элементами X_0. Доказать, что таких элементов бесконечно много.

I4. Пусть множество $A \subset X$ обладает следующим свойством: для всякого $x \in X$ существует в точности один элемент $y^* \in A$ наилучшего приближения. Следует ли отсюда, что множество A выпукло, замкнуто ?

I5. Доказать, что пространство X является строго нормированным тогда и только тогда, когда сфера $S_1(0)$ не содержит никакого отрезка.

I6. Доказать, что в строго нормированном пространстве X для каждого $x \in X$ и каждого подпространства X_0 может существовать не более одного элемента наилучшего приближения x элементами X_0.

I7. Покажите, что пространства ℓ_p^n, ℓ_p, $L_p(a, b)$, $L_p(\mathbb{R}^1)$ строго нормированные, если $1 < p < \infty$, и нет, если $p = 1$, $p = \infty$.

18. Покажите, что пространства c_0, c, $C[a,b]$, $V[a,b]$ не являются строго нормированными.

19*. Докажите, что во всяком сепарабельном нормированном пространстве существует строгая норма, эквивалентная исходной.

20. В вещественном пространстве ℓ^2_∞ найти множество элементов наилучшего приближения элемента $x=(1,0)$ элементами подпространства $X_0=\{x\in \ell^2_\infty : x=(0,\xi_2)\}$.

21. Покажите, что для всякой функции $x(t)\in C[a,b]$ существует элемент наилучшего приближения $p(t)$, принадлежащий подпространству $P_{n-1}\subset C[a,b]$ всех многочленов степени меньше, чем n.

22. Найдите расстояние от элемента $t^n\in C[0,1]$ до подпространства P_{n-1} при $n=1,2$.

23. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим подпространство $X_0=\{x(t)\in C[0,1] : x(0)=0\}$. Пусть $x(t)\equiv 1$. Описать множество элементов наилучшего приближения x элементами X_0.

5. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Линейное пространство X над полем $K=R$ или C называется предгильбертовым, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие число (x,y) из поля K, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $(x,x)\geq 0$, $(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.

2) $(x,y)=\overline{(y,x)}$;

3) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;

4) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

Число (x,y) называется скалярным произведением. Из аксиом скалярного произведения следует неравенство Коши-Буняковского

$$|(x,y)|^2\leq (x,x)\cdot(y,y).$$

Предгильбертово пространство является нормированным, так как скалярное произведение определяет норму $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$.

Полное относительно этой нормы предгильбертово пространство называется гильбертовым и обозначается буквой H.

Подпространством предгильбертова пространства X будем называть замкнутое линейное многообразие из X.

Элементы x и y из предгильбертова пространства X называются ортогональными, $x\perp y$, если $(x,y)=0$. Множество элементов $z\in X$ таких, что $(z,x)=0$ для любого $x\in M\subset X$, обозначается $M^\perp$ и называется ортогональным дополнением множества M.

Теорема. Пусть H_0 – подпространство в H. Тогда H является ортогональной суммой подпространств H_0 и $H_0^{\perp}$: $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$, т.е. любой элемент $x \in H$ допускает единственное представление в виде $x = y + z$, где $y \in H_0$, $z \in H_0^{\perp}$.

Элемент y называется проекцией элемента x на подпространство H_0.

Система ненулевых элементов $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$ называется ортогональной в X, если $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$, и ортонормальной, если

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Система элементов $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$ называется полной в X, если замыкание ее линейной оболочки $\langle\{x_\alpha\}\rangle$ совпадает с X. Полная ортогональная (ортонормальная) система называется ортогональным (ортонормальным) базисом в X. Мощность ортонормального базиса называется размерностью X и обозначается $\dim H$.

Предгильбертовы пространства X и Y изоморфны, если существует взаимно-однозначное линейное отображение X на Y, сохраняющее скалярное произведение.

1. Показать, что в определении гильбертова пространства аксиому 1) можно заменить на аксиому:

$(x, x) \geq 0$, из $(x, x) = 0$ следует $x = 0$.

В предгильбертовом пространстве проверить тождества (2 – 6):

2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (равенство параллелограмма).

3. $2(x, y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$, если $K = \mathbb{R}$.

4. $4(x, y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$, если $K = \mathbb{C}$ (поляризационное тождество).

5. $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{x+y}{2}\|^2$ (тождество Аполлония).

6. $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$, если $x \perp y$ (теорема Пифагора).

7*. Доказать в предгильбертовом пространстве неравенство Птолемея:

$$\|x-z\|\,\|y-t\| \leq \|x-y\|\,\|z-t\| + \|y-z\|\,\|x-t\|.$$

Когда в нем реализуется равенство?

8. Доказать, что в линейном нормированном пространстве X можно ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой в X, т.е. такое, что $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, тогда и только тогда, когда для любых x и y выполняется равенство параллелограмма.

Доказать утверждения (9 - 10):

9. Скалярное произведение в предгильбертовом пространстве непрерывно по совокупности переменных.

10. Если предгильбертово пространство не является полным, то в его пополнении можно ввести скалярное произведение так, что оно становится гильбертовым пространством.

Проверить, что следующие линейные пространства являются гильбертовыми (11 - 16):

11. ℓ_2^n со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \bar{\eta}_i$$

для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

12. ℓ_2 со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cdot \bar{\eta}_i$$

для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$.

13. $L_2[a, b]$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

14. $L_2(\mathbb{R})$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

15. B - линейное пространство, полученное при пополнении пространства B_0 - всех тригонометрических полиномов (т.е. конечных линейных комбинаций функций $e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$) со скалярным произведением

$$(x, y) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

16. H_c - линейное пространство комплексных функций, определенных на всей числовой прямой, имеющих не более чем счетное множество значений, отличных от нуля, таких, что $\sum_t |x(t)|^2 < \infty$. Скалярное произведение в H_c определено по формуле

$$(x, y) = \sum_t x(t) \cdot \overline{y(t)}.$$

17. Доказать, что пространства B и H_c несепарабельны.

18*. Доказать, что B содержит пространство почти периодических непрерывных функций, т.е. замыкание B_0 по равномерной норме

$\|x\| = \sup\limits_{t\in R}|x(t)|$, но не совпадает с ним.

19. Показать, что в нормированных пространствах c_0 , c , $C[a,b]$, $V[a,b]$ и ℓ_p^n , ℓ_p , $L_p(R)$, $L_p[a,b]$ при $p\neq 2$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормами этих пространств.

20. Доказать, что следующие линейные пространства являются пред - гильбертовыми, но не гильбертовыми:

1. Множество вещественных непрерывных на $[a,b]$ функций со скалярным произведением

$$(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)\,dt.$$

2. Множество суммируемых последовательностей комплексных чисел со скалярным произведением:

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\cdot\bar{\eta}_i .$$

Пусть X - предгильбертово пространство, M и N - подмножества из X . Доказать утверждения (21 - 24):

21. $M^{\perp}$ - подпространство в X .

22. $M^{\perp\perp}=\overline{<M>}$.

23. Если $M\subset N$, то $N^{\perp}\subset M^{\perp}$.

24. Если $\overline{<M>}=X$, то из $x\perp M$ следует $x=0$.

25. Доказать, что всякое неполное предгильбертово пространство X содержит замкнутое подпространство X_0 , $X_0\neq X$, обладающее нулевым ортогональным дополнением.

26. Система $\{e_\alpha\}$, $\alpha\in A$, элементов предгильбертова пространства X называется тотальной, если в X не существует от - личных от нуля элементов, ортогональных ко всем e_α .Доказать, что в гильбертовом пространстве тотальность системы эквивалентна ее полноте.

27. Доказать, что во всяком неполном сепарабельном предгильбертовом пространстве существует счетная ортонормальная тотальная система, не являющаяся полной.

28. Доказать,что предгильбертово пространство является строго нормированным.

29. Пусть M - замкнутое выпуклое множество в H .Доказать, что для всякого элемента x из H в M существует и единственен элемент наилучшего приближения.

30. В пространстве ℓ_2 построить замкнутое множество, в котором нет элемента с наименьшей нормой.

31*. Доказать, что в H любая последовательность непустых вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств имеет непустое пересечение.

32. Найти ортогональное дополнение в $L_2[0,1]$ к следующим множествам:

1) многочленов от x;
2) многочленов от x^2;
3) многочленов с нулевым свободным членом;
4) многочленов с нулевой суммой коэффициентов;
5) функций из $L_2[0,1]$, значения которых на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$ почти всюду равны нулю;
6) функций из $L_2[0,1]$, для которых $\int_0^1 x(t)\,dt = 0$.

33. В предгильбертовом пространстве непрерывных на $[-1,1]$ функций со скалярным произведением

$$(x,y)=\int_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

найти ортогональное дополнение к множествам:

1) функций, равных нулю при $t \leq 0$;
2) функций, равных нулю в точке $t=0$.

Верна ли в этих случаях теорема об ортогональном дополнении?

34*. Доказать, что ортогональное дополнение к системе функций $e_n(t)=e^{2\pi i n t}$, $n\in\mathbb{Z}$, в пространстве $L_2[a,b]$.

1) равно нулю при $|a-b|\leq 1$;
2) отлично от нуля при $|a-b|>1$.

35. В пространстве ℓ_2 найти ортогональное дополнение к следующим множествам:

1) $\{x\in\ell_2 : \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i=0\}$;
2) $\{x\in\ell_2 : \sum_{i=1}^{n}\xi_i=0\}$;
3) $\{x\in\ell_2 : x=(1,\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{2k}},\frac{1}{2^{3k}},\dots),\ k\in\mathbb{N}\}$.

36. Пусть H_0 – подпространство в H, $x\in H$. Доказать, что элементом наилучшего приближения x элементами H_0 является y, а элементом наилучшего приближения x элементами $H_0^{\perp}$ является z из представления $x=y+z$, $y\in H_0$, $z\in H_0^{\perp}$. При этом $\rho(x,H_0)=\|z\|$, $\rho(x,H_0^{\perp})=\|y\|$.

37. Пусть H_0 – одномерное подпространство в H, $x_0\in H_0$, $x_0\neq 0$. Доказать, что для любого $x\in H$

$$\rho(x, H_0^{\perp}) = \frac{|(x, x_0)|}{\|x_0\|}.$$

38. В пространстве $L_2[0,1]$ найти расстояние от элемента $x = t^2$ до подпространства
$$H_0 = \{x(t) \in L_2[0,1] : \int_0^1 x(t)dt = 0\}.$$

39. В пространстве ℓ_2 найти расстояние от элемента $x = (1, 0, 0, \ldots)$ до подпространства
$$H_0 = \{x \in \ell_2 : \sum_{i=0}^{n} \xi_i = 0\}.$$

40. Построить проекцию элемента x из H на n - мерное подпространство $H_0 \subset H$.

41. В $L_2[-1,1]$ построить проекцию функции $x(t) \in L_2[-1,1]$ на подпространство четных (нечетных) функций.

42. Для функции $x(t) \in L_2[-1,1]$ найти многочлен наилучшего приближения $p(t) \in P_n$, если

I) $x(t) = e^t$; 2) $x(t) = t^3$ при $n = 0, 1, 2$.

43. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - ортонормальная система в предгильбертовом пространстве X. Доказать, что для всякого $x \in H$

I) множество $A_x = \{\alpha \in A : (x, e_\alpha) \neq 0\}$ - конечно или счетно;

2) справедливо неравенство Бесселя:
$$\sum_{\alpha \in A} |(x, x_\alpha)|^2 \leq (x, x).$$

Доказать утверждения (44 - 46):

44. В сепарабельном предгильбертовом пространстве существует орто - нормальный базис.

45. Сепарабельность предгильбертова пространства X - необходимое и достаточное условие существования не более чем счетного ортонормального базиса в X.

46*. Во всяком гильбертовом пространстве существует ортонормальный базис.

47. Доказать эквивалентность в H следующих утверждений:

I) $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in A$ - ортонормальный базис в H;

2) система $\{e_\alpha\}, \alpha \in A$ - тотальна в H;

3) для всякого $x \in H$ $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$ (разложение Фурье);

4) для всякого $x \in H$ $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2$ (равенство Парсеваля);

5) для всех $x, y \in H$ $(x, y) = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)\overline{(y, e_\alpha)}$.

48*. Привести пример предгильбертова пространства, в котором нет ни одного ортонормального базиса.

49. Доказать, что $\dim H$ и $\dim X$, если X сепарабельное предгильбертово пространство, не зависит от выбора ортонормального базиса.

50. Доказать, что гильбертовы пространства H и H_1 над одним и тем же полем K изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim H = \dim H_1$.

51. Проверить, что гильбертово пространство B имеет континуальный ортонормальный базис $\{e^{i\lambda t}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

52. Найдите базис в H_c.

53. Доказать изоморфизм H_c и B.

54. Проверьте, что функции $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt\}$, $n \in \mathbb{N}$, образуют ортонормальный базис в пространстве $L_2[0, \pi]$, но в то же время это только ортогональная система в $L_2[-\pi, \pi]$, не являющаяся базисом.

55. Доказать, что система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

является ортонормальным базисом в $L_2[-\pi, \pi]$.

56. Доказать, что система функций $\{e^{2\pi i n t}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, является ортонормальным базисом в пространстве $L_2[0, 1]$.

57. Доказать, что в $L_2[a, b]$ есть полные ортонормальные системы, состоящие из

1) многочленов;

2) ступенчатых функций;

3) тригонометрических многочленов;

4) функций, лежащих в наперед заданном плотном линейном многообразии.

58. На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим систему функций Радемахера $\{x_n(t)\}$:

$$x_n(t) = (-1)^k \text{ при } t \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right); \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \ k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1};$$

в концах этих интервалов $x_n(t) = 0$.

Установить, что эта система ортонормальна в $L_2[0, 1]$, но не является базисом.

59. Многочлены $P_n(t)$, получающиеся при ортогонализации функций 1, t, t^2, ... в пространстве $L_2[-1, 1]$, называются

многочленами Лежандра. Показать, что

$$P_n(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$

60. Функции $H_n(t)$, получающиеся при ортогонализации выражений e^{-t^2}, te^{-t^2}, $t^2e^{-t^2}$, ... в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$, называются функциями Эрмита. Показать, что

$$H_n(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n}(e^{-2t^2}).$$

61. Функции $L_n(t)$, получающиеся при ортогонализации выражений e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}, ... в пространстве $L_2(0,\infty)$, называются функциями Лагерра. Показать, что

$$L_n(t) = c_n t^n \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-2t}).$$

62. Показать, что многочлены Лежандра, системы функций Эрмита, Лагерра полны в соответствующих пространствах.

ОТВЕТЫ

I.

9. 1), 2) нет; 3), 4) да.

12. 1), 3) нет; 2), 4) да.

13. 3) нет, остальные да.

15. Вообще говоря, нет.

34. Нет.

38. 1) нигде; 2) нигде, если $\alpha \geq 0$; в c_0, c, ℓ_∞, если $\alpha < 0$; в ℓ_p, если $\alpha < -1/p$; 3) в c_0, c, ℓ_p при $p > 1$; 4) нигде, если $\alpha \leq 0$; в c_0, c, ℓ_∞, если $\alpha > 0$; в ℓ_p, если $\alpha > 1/p$; 5) в c_0, c, ℓ_∞; 6) в c, ℓ_∞; 7) в ℓ_∞.

39. 1) да; 2) нет.

40. 1) да; 2) в $C[0,1]$ – да, в $C^1[0,1]$ – нет.

41. ℓ_p при $1 \leq p < \infty$; c_0 при $p = \infty$.

42. $L_1[a,b]$.

43. Да при $1 \leq p < \infty$; нет при $p = \infty$.

44. Множество финитных последовательностей.

46. 1) $C[a,b]$; 2) $C^1[a,b]$; 3) пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, дифференцируемых в точке a, с нормой $\|x\| = \max\limits_{[a,b]} |x(t)| + |\dot{x}(a)|$; 4) если $[a,b] \cap [c,d] \neq \emptyset$, то пространство непрерывных на $[a,b] \cap [c,d]$ функций, имеющих непрерывную производную на

$[c,d]$; если $[a,b]\cap[c,d]=\varnothing$, то изоморфно пространству непрерывных на $[a,b]$, непрерывно дифференцируемых на $[c,d]$ функций, равных нулю в точке c с той же нормой; 5) пространство дважды непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций с той же нормой; 6) изометрично пространству c_0; 7) пространство функций, представимых в виде абсолютно сходящегося на $[-1,1]$ ряда $x(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, с нормой $\|x\|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|+\max\limits_{[-1,1]}|x(t)|$.

47. Да.

48. Вообще говоря, нет.

54. В $C[0,1]$ рассмотреть множества

$A_n=\{x(t):\ \|x\|\leq 1;\ x(0)=0;\ x(t)=1$ при $\frac{1}{n}\leq t\leq 1\}$.

59. 1) полное, несепарабельное; 2) полное, сепарабельное; 3) неполное, сепарабельное.

60. $C_0(\mathbb{R})$ – да; $C_1(\mathbb{R})$ – нет.

61. Да.

2.

9. $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны; $\|\cdot\|_0 > \|\cdot\|_2$, т.е. $\|\cdot\|_0 \succ \|\cdot\|_2$ и они не эквивалентны.

11. Нет.

12. $\|\cdot\|_{C[a,b]} \prec \|\cdot\|_{W_2^1[a,b]} \prec \|\cdot\|_{C^1[a,b]}$.

13. Да. Например, в линейном пространстве функций непрерывных на $[-1,1]$ и непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ ввести нормы:

$$\|x\|_1=\max_{[-1,1]}|x(t)|+\max_{[0,1]}|x'(t)|,\quad \|x\|_2=\max_{[-1,1]}|x(t)|.$$

Рассмотреть линейное многообразие функций, равных нулю на $[0,1]$.

19. $p<q$.

20. $\|\cdot\|_q \prec \|\cdot\|_p$; при $q<\infty$ замыканием является ℓ_p, при $q=\infty$ замыкание совпадает с c_0.

21. $\|\cdot\|_p \prec \|\cdot\|_q$; замыканием является $L_p[a,b]$.

3.

1. Пусть $M=\{x_n(t)\}$, $n\in\mathbb{N}$, где

$$x_n(t)=\begin{cases}-1 & \text{при } -1\leq t\leq -\frac{1}{n},\\ nt & \text{при } -\frac{1}{n}\leq t\leq \frac{1}{n},\\ 1 & \text{при } \frac{1}{n}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

1) В пространстве непрерывных на $[-1,1]$ функций ввести норму $\|x\|=\int_{-1}^{1}|x(t)|dt$ и рассмотреть множество M.

2) В $L_1[-1,1]$ рассмотреть множество M.

II. Для предкомпактности множества $M \subset C^1[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено в $C^1[a, b]$, а множество $M' = \{x'(t) : x(t) \in M\}$ – равностепенно непрерывно.

I4. I) в $C[0,1]$ – нет; в $L_p[0,1]$ – да; 2) в $C[0,1]$ –да, если $|\alpha| < 1$, и нет, если $|\alpha| \geq 1$; в $L_p[0,1]$ –да, если $|\alpha| \leq 1$, и нет, если $|\alpha| > 1$; 4), 6) да; 3), 5), 7) нет.

I5. Нет.

I6. I) – 4), 7) предкомпактны; 5) не предкомпактно; 6) компактно.

I8. Нет.

I9. I), 2), 4) нет; 3) да.

20. I) нет; 2) да.

2I. $a_i \to 0$.

22. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$.

4.

7. В пространстве ℓ_2^2 рассмотреть множества
$A = \{x \in \ell_2^2 : x = (0, \xi_2)\}$, $B = \{x \in \ell_2^2 : x = (\xi_1, \xi_2), \ \xi_2 > \frac{1}{\xi_1} > 0\}$.

8. Нет.

9. Не всегда.

I2. В ℓ_∞^2 рассмотреть множество $M = B[0,1]$ и точку $x = (2, 0)$.

I4. Множество будет замкнутым, но выпуклым может и не быть.

20. $\{x \in \ell_\infty^2 : x = (0, \xi_2), \ |\xi_2| \leq 1\}$.

22. $\rho(t, P_0) = \frac{1}{2}$, $\rho(t^2, P_1) = \frac{1}{8}$.

23. $\{y(t) \in C[0,1] : y(0) = 0 ; \ 0 \leq y(t) \leq 2$ при $t \in (0, 1]\}$.

5.

7. Точки расположены на прямой либо на окружности в следующем порядке: x, y, z, t.

30. $M = \{x_n \in \ell_2 : x_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1 + \frac{1}{n}, 0, 0 \ldots\}$.

32. В I) – 4) ортогональное дополнение состоит из нуля; в 5) ортогональным дополнением является множество функций, равных нулю почти всюду на отрезке $[1/2, 1]$; в 6) – множество функций эквивалентных константе.

33. 2) множество непрерывных функций, равных нулю при $t \geq 0$; 2) $\{0\}$, в этом случае теорема об ортогональном дополнении не верна.

35. В I), 3) ортогональным дополнением является $\{0\}$; в 2) – одномерное подпространство с базисом $e_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0 \ldots)$.

38. $\rho(x, H_0) = 1/3$.

39. $\rho(x, H_0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

40. $pr_{H_0} x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$, где $\{e_i\}_1^n$ базис в H_0 .

41. $\frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$, $\frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$.

42. 1) $p_0(t) = \frac{e^2-1}{2e}$, $p_1(t) = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{3}{e}t$, $p_2(t) = -2e + \frac{17}{e} + \frac{3}{e}t + \frac{15}{4} \cdot \frac{e^2-7}{e} t^2$; 2) $p_0(t) = 0$; $p_1(t) = \frac{3}{5}t$, $p_2(t) = \frac{3}{5}t$.

52. Семейство $\{e_\alpha(t)\}_{\alpha \in R}$,

где $$e_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = \alpha, \\ 0 & \text{при } t \neq \alpha. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - Минск: Вышэйшая школа, 1978.
2. Березин Ф.А., Гвишиани А.Д., Горин Е.А., Кириллов А.А. Сборник задач и упражнений по функциональному анализу. - М.: Изд-во МГУ, 1977.
3. Ильин А.М., Заславский М.И. Задачи по функциональному анализу. - Свердловск: Изд. Урал.ун-та, 1971.
4. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. - М.: Наука, 1979.
5. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - М.: Наука, 1984.

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Методические указания
для практических занятий по функциональному анализу

Редактор К.Т.Кузнецова

Технический редактор Э.А.Максимова

Подписано к печати 16.03.85 Формат 60x84 1/16. Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная. Уч.-изд.л. 1,76
Усл.печ.л. 1,74 Тираж 500 экз. Заказ 232 . Бесплатно.
Уральский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. А.М.Горького. Свердловск, пр. Ленина, 51.

Типолаборатория УрГУ. Свердловск, пр. Ленина, 51.