Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Уральский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. А. М. Горького

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Методические указания для практических занятий по функциональному анализу

Свердловск
1989

Методические указания подготовлены
кафедрой математического анализа
и теории функций
математико-механического факультета

Составители: И.В.Мельникова
Л.Ф.Коркина

Утверждено учебно-методической комиссией
математико-механического факультета
24 марта 1989 г.

Методические указания составлены в соответствии с новой программой курса "Функциональный анализ", читаемого студентам-математикам III курса математико-механического факультета. В методических указаниях даны определения, краткая сводка результатов и задачи для практических занятий по следующим темам:

1. Линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах.
2. Обратные операторы. Замкнутые операторы.
3. Спектр.
4. Сопряженное пространство. Геометрия в линейном нормированном пространстве.
5. Слабая сходимость. Обобщенные функции.
6. Сопряженные операторы.
7. Компактные операторы.
8. Интегральные уравнения.

Составителями использовались следующие источники:

1. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Вышейш. шк., 1978.
5. Taylor A.E. Functional analysis. N.Y.; L., 1966.
6. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.
7. Методические разработки по функциональному анализу, составленные на кафедре математического анализа и теории функций А.М.Ильиным, И.В.Мельниковой, Н.В.Невесенко.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства над полем P (сокращенно ЛНП), A – оператор, отображающий X в Y (коротко $A: X \to Y$). Оператор A называется

1) непрерывным в точке $x_0 \in X$, если
$$\forall (x_n) \subset X: \quad x_n \to x_0 \Rightarrow Ax_n \to Ax_0;$$
2) непрерывным на M, если A непрерывен в каждой точке $x_0 \in M \subset X$;
3) ограниченным, если A переводит каждое ограниченное множество в ограниченное;
4) линейным, если
$$\forall x, y \in X, \ \alpha, \beta \in P \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Для линейного оператора A понятия непрерывности и ограниченности эквивалентны.

Нормой линейного ограниченного оператора A называется вещественное число
$$\|A\| = \inf\{C : \forall x \in X \ \ \|Ax\| \le C\|x\|\} = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Оператор A называется достижимым, если
$$\exists x_0 \in X: \ \|x_0\| = 1, \ \|Ax_0\| = \|A\|.$$

Пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y, обозначается $\mathcal{L}(X, Y)$.

1.1. Пусть $A: X \to Y$, A – линейный оператор, непрерывный в точке $x_0 \in X$. Доказать, что A непрерывен.

1.2 Пусть $A: X \to Y$. A не является ограниченным. Доказать, что
$$\sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = +\infty.$$

1.3. Привести пример ограниченного оператора $A: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, для которого
$$\sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = +\infty.$$

1.4. Привести примеры линейных операторов, отображающих

а) $L_1[0,1] \to C[0,1]$;

б) $C[0,1] \to m$;

в) $C[0,1] \to \ell_2$;

г) $m \to C[0,1]$.

I.5. Показать, что при замене норм в X и Y эквивалентными нормами, новая норма в $\mathcal{L}(X,Y)$ будет эквивалентна старой.

I.6. Пусть $B \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Доказать, что $\|AB\| \le \|A\| \|B\|$.

I.7. Показать, что в $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$ определены следующие функции от операторов

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!},$$

$$\operatorname{sh} A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{ch} A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!}, \quad e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

Доказать, что

$e^A = \operatorname{sh} A + \operatorname{ch} A$. $\|\operatorname{sh} A\| \le \operatorname{sh}\|A\|$, $\|\sin A\| \le \operatorname{sh}\|A\|$.

I.8. Является ли оператор $Ax = t\cos x(t)$, отображающий $C[0,1] \to C[0,1]$: а) линейным, б) непрерывным, в) ограниченным?

I.9. Для каких функций $a(t)$ оператор $Ax(t) = a(t)x(t)$ непрерывен в $C[0,1]$, $\mathcal{L}_2[0,1]$? Найти норму оператора, если он непрерывен.

Оператор $A : X \to Y = P$, где $P = R^1(\mathbb{C})$ называется функционалом над полем действительных (комплексных) чисел.

В задачах I.10 – I.27 указано ЛНП X, подмножество $M \subseteq X$ и функционал f, заданный на M. Является ли этот функционал а) линейным, б) ограниченным, в) непрерывным?

I.10. $X = C[0,1] = M$, $f(x) = \int_0^1 |x(t)|dt$.

I.11. $X = C[0,1] = M$, $f(x) = x(\frac{1}{2})$.

I.12. $X = L_p[0,1] = M$, $f(x) = \int_0^1 |x(t)|dt$.

I.13. $X = L_p[0,1]$, M – множество непрерывных функций, $f(x) = x(0)$.

I.14. $X = C[0,1] = M$, $f(x) = \int_0^1 \sqrt{t}\, x^2(t)dt$.

I.15. $X = C[0,1]$, M – множество полиномов, $f(x) = x'(0)$.

I.16. $X = L_2[0,1]$, M – множество непрерывно дифференцируемых функций, $f(x) = x'(\frac{1}{2})$.

I.17. $X = C[0,1]$, M – множество непрерывно дифференцируемых функций, $f(x) = x'(0) + 1$.

I.18. $X = C[0,1]$, M – множество непрерывно дифференцируемых функций, $f(x) = \int_0^1 x'(t)\cos t\, dt$.

I.19. $X = C[0,1] = M$, $f(x) = \max\limits_{0 \le t \le 1} x(t)$.

I.20. $X = L_p[0,1]$, M – множество непрерывных функций, $f(x) = \max x(t)$.

I.21. $X = L_p[0,1]$, M – множество непрерывно дифференцируемых функций, $f(x) = \int_0^1 x'(t)\sin t\, dt$.

I.22. $X = \ell_p$, $M = \{x = (\xi_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится $\}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$.

I.23. $X = m$, $M = \{x = (\xi_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится $\}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$.

I.24. $X = \ell_p$, $M = \{x = (\xi_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$ сходится $\}$, $f(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

I.25. $X = C[0,1] = M$, $f(x)$ – наибольшему значению аргумента t, при котором $x(t)$ принимает максимальное значение.

I.26. $X = C[0,1]$, M – множество полиномов, $f(x)$ = степени полинома.

I.27. $X = C[0,1]$, M – множество полиномов, $f(x)$ = числу нулей полинома.

I.28. Найти нормы следующих операторов, отображающих X в Y:

а) $X = C[0,1]$, $Y = L_p[0,1]$, $Ax = e^t \cdot x(t)$;

б) $X = Y = C[0,2]$, $Ax = \int_0^t x(s)ds$;

в) $X = Y = \ell_2$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $Ax = (\xi_1 + \xi_2, \xi_1 - \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots)$;

г) $X = Y = \ell_p$, $Ax = (0, \frac{1}{3}\xi_1, \ldots \frac{2k}{k+1}\xi_{k-1}, \ldots)$;

д) $X = Y = \ell_p$, $Ax = (\xi_1 e^{-1}, \xi_2 e^{-2}, \ldots)$

е) $X = Y = \ell_2$, $Ax = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \alpha_3\xi_3, \ldots)$

I.29. Найти норму оператора, определяемого бесконечной

матрицей $\{a_{ij}\}$: $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots)$,
отображающего: а) $m \to m$,
б) $\ell_1 \to m$,
в) $m \to \ell_1$ (если $a_{ij} \geq 0$).

I.30. Функция $K(t,s)$ непрерывна на $[0,1;0,1]$. Найти норму оператора

$$Ax = \int_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds,$$

если а) $A: L_1[0,1] \to C[0,1]$;

б) $A: C[0,1] \to C[0,1]$.

I.31. Найти $\|A\|$ и проверить, является ли оператор $A: \ell_2 \to \ell_2$ достижимым:

а) $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$;

б) $Ax = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{2}{3}x_2, \frac{3}{4}x_3, \ldots\right)$.

I.32. Найти $\|A\|$ и выяснить, является ли оператор

$$Ax = \int_0^t x(s)\sin s\,ds$$

достижимым, если

а) $A: C[0,1] \to C[0,1]$,

б) $A: L_2[0,1] \to C[0,1]$.

I.33. Найти нормы следующих функционалов, определенных на пространстве $C[0,1]$:

а) $f(x) = \int_0^{1/2} x(t)\,dt - \int_{1/2}^1 x(t)\,dt$;

б) $f(x) = \int_0^{1/3} x(t)\,dt - \int_{1/3}^1 x(t)\,dt$;

в) $f(x) = x(t_0)$;

г) $f(x) = x(0) + \int_0^1 x(t)\,dt$.

I.34. Найти нормы следующих функционалов, определенных на пространстве $L_1[0,1]$. Являются ли эти функционалы достижимыми?

а) $f(x) = \int_0^{1/2} t\,x(t)\,dt + \int_{1/2}^1 (1-t)\,x(t)\,dt$;

б) $f(x) = 3\int_0^{1/2} x(t)\,dt - \int_{1/2}^1 x(t)\,dt$;

в) $f(x) = \int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,x(t)\,dt$;

г) $f(x) = \int_0^1 \{2t\}\,x(t)\,dt$, где $\{2t\}$ – целая часть числа $2t$.

Являются ли эти функционалы достижимыми?

I.35. Доказать, что функционал

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,g(t)\,dt, \quad \text{где } g(t) \in L_1[0,1],$$

определенный на $C[0,1]$, в том и только том случае является достижимым, когда $g(t)$ сохраняет знак почти всюду.

I.36. Пусть $g(t)$ – ограниченная измеримая функция на $[0,1]$, достигающая своего максимума модуля на множестве положительной меры. Доказать, что функционал

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,g(t)\,dt,$$

заданный на $L_1[0,1]$ является достижимым.

I.37. Доказать, что функционал $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, определенный на ЛНП c_0, является достижимым тогда и только тогда, когда последовательность (a_n) имеет лишь конечное число элементов, отличных от нуля.

I.38. Линейные операторы $A, B: X \to Y$, M – бесконечная система линейно независимых векторов из X. $Ax = Bx$ для любого $x \in M$. Можно ли утверждать, что $A = B$?

I.39. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X)$, где $\dim X = n < \infty$ и пусть для каждого из операторов A и B существует в X базис из собственных элементов. Доказать, что $AB = BA \Leftrightarrow$ любой собственный вектор одного из операторов является собственным вектором другого.

I.40. Привести пример ЛНП X и последовательности операторов $A_n: X \to X$, такой, что $\|A_n\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, $A_n x \to 0$ для любого $x \in X$.

I.41. Пусть $K(t,s)$ – непрерывно дифференцируемая функция на $[0,1;0,1]$. Показать, что оператор

$$Ax = \int_0^1 K(t,s)\,x'(s)\,ds,$$

отображающий всюду плотное подмножество непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[0,1]$ в $C[0,1]$, ограничен и, следовательно, может быть доопределен по непрерывности на все $C[0,1]$.

I.42. Пусть ЛНП X бесконечномерно. Доказать, что на X существует линейный разрывной функционал.

2. ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ЗАМКНУТЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $A: D(A)\subset X \to R(A)\subset Y$. Оператор A называется обратимым, если для любого $y\in R(A)$ уравнение $Ax=y$ имеет единственное решение. Если A обратимый, то обратным к A называется такой оператор A^{-1}, который каждому $y\in R(A)$ ставит в соответствие тот x, для которого $Ax=y$.

Теорема Банаха. Пусть A – линейный ограниченный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда оператор A^{-1} ограничен.

Для линейного оператора существование обратного эквивалентно условию $\operatorname{Ker} A=\{0\}$, существование ограниченного обратного – условию $\exists\, m>0 \quad \forall x\in D(A)\ \|Ax\|\geq m\|x\|$.

В задачах 2.I. – 2.IO выяснить, существует ли обратный оператор для оператора A, определенного на множестве M. Если A^{-1} существует, то найти его.

2.I. $M=C[0,1]$, $Ax=\int_0^t x(s)\,ds$.

2.2. $M=C[0,1]$, $Ax=\int_0^1 x(s)\,ds$.

2.3. $M=C[0,1]$, $Ax=\int_0^t s\,x(s)\,ds$.

2.4. $M=\ell_p$, $Ax=(0,x_1,0,x_2,0,\dots)$.

2.5. $M=\ell_2$, $Ax=(x_2,x_4,x_6,\dots)$.

2.6. $M=m$, $Ax=(x_1,x_2^2,x_3^2,x_4^2,\dots)$.

2.7. $M=c_0$, $Ax=(x_1,x_2^3,x_3^5,x_4^7,\dots)$.

2.8. $M=\{$ полиномы $x(t)\}$, $Ax=x'(t)$.

2.9. $M=\{$ полиномы $x(t):\ x(0)=0\}$, $Ax=x'(t)$.

2.IO. $M=C[0,1]$, $Ax=\int_0^t (t+1)\,x(s)\,ds$.

2.II. Пусть $Ax=(x_1,\ 1/2\,x_2,\ 1/3\,x_3,\dots): M\to M$, где M – линейное многообразие последовательностей, у которых лишь конечное число членов, отличных от нуля. Доказать, что A^{-1} существует, но не является ограниченным.

2.I2. Пусть M – линейное многообразие непрерывно дифференцируемых функций из пространства $C[0,1]$, $Ax=x(0)+\int_0^t x(s)\,ds: C[0,1]\to M$. Доказать, что A^{-1} существует, но не является ограниченным.

2.I3. Пусть $A=d/dt: D(A)=\{$множество непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, таких, что $x(0)=0\}\subset C[0,1]\to C[0,1]$. Что можно сказать об операторе A^{-1}, множествах $R(A)$, $\operatorname{Ker} A$?

2.I4. Пусть $Ax=(a_1x_1,\ a_2x_2,\ a_3x_3,\dots):\ell_1\to\ell_1$, где $(a_1,a_2,a_3,\dots)\in m$. Показать, что тогда и только тогда $R(A)=\ell_1$ и A^{-1} непрерывен, когда $\inf_n |a_n|>0$.

2.I5. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) $A_n\to A$ равномерно, A непрерывно обратим;

б) операторы A_n непрерывно обратимы с некоторого номера;

в) $\{A_n^{-1}\}$ ограничена.

Оператор A_l^{-1} (A_r^{-1}) называется левым (правым) обратным к A, если $\forall x\in D(A)\quad A_l^{-1}Ax=x \qquad (\forall y\in R(A)\ \ AA_r^{-1}y=y)$.

2.I6. Как связано существование операторов A_l^{-1}, A_r^{-1}, A^{-1} с существованием и единственностью решения уравнения $Ax=y$?

2.I7. Оператор $A(x_1,\dots,x_n,\dots)=(0,x_1,x_2,\dots)$ действует в ℓ_2. Доказать, что A имеет левый обратный, но не имеет правого обратного.

2.I8. Проверить, что $A=d/dt: C^1[0,1]\to C[0,1]$ имеет правый обратный, но не имеет левого обратного.

2.I9. Пусть на X заданы сравнимые нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Пространства $(X,\|\cdot\|_1)$ и $(X,\|\cdot\|_2)$ банаховы. Доказать, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны.

Пусть $A: D(A)\subset X\to Y$. Оператор A называется замкнутым, если из условий $D(A)\ni x_n\to x$, $Ax_n\to y \Rightarrow x\in D(A)$ и $Ax=y$.

Графиком оператора $A: X\to Y$ называется множество $G(A) \triangleq \{(x,y)\in X\times Y: x\in D(A), y=Ax\}$.

Теорема Банаха о замкнутом операторе (графике). Замкнутый оператор A, определенный на всем банаховом пространстве X, ограничен.

2.20. Рассмотрим операторы дифференцирования $P=d/dt$ и $T=d^2/dt^2$ в пространстве $C[a,b]$ с областями определения $D(P)=\{$ множество непрерывно дифференцируемых функций из $C[a,b]\}$, $D(T)$ – дважды непрерывно дифференцируемых; и сужения этих операторов:

а) $P_1u=\frac{du(t)}{dt}$, $D(P_1)=\{u\in D(P): u(a)=0\}$;

б) $P_2u=\frac{du(t)}{dt}$, $D(P_2)=\{u\in D(P): u(b)=0\}$;

в) $P_3u=u'(t)$, $D(P_3): u(b)=Ku(a)$;

г) $P_4u=u'(t)$, $D(P_4): u(a)=u(b)=0$;

д) $T_1u=u''(t)$, $D(T_1)=\{u\in D(T): u(a)=u(b)=0\}$;

е) $T_2u=u''(t)$, $D(T_2): u(a)-h_1u(b)=u'(b)+h_2u(a)=0$;

ж) $T_3u=u''(t)$, $D(T_3): u(a)=0,\ u'(a)=0$;

и) $T_4u=u''(t)$, $D(T_4): u(a)=u'(a)=u(b)=u'(b)=0$.

Являются ли эти операторы а) ограниченными, б) замкнутыми? Найти обратные к P_i и T_i операторы.

2.21. Доказать, что оператор, обратный к замкнутому, замкнут.

2.22. Доказать, что замкнутость оператора A эквивалентна замкнутости графика $G(A)$.

2.23. Доказать: линейное подпространство M в $X\times Y$ является графиком линейного замкнутого оператора $A: X\to Y$ тогда и только тогда, когда M не содержит элементов вида $[0,v]$, $v\neq 0$.

2.24. Доказать, что $T+A$ замкнут, если T – замкнут, а A ограничен, причем $D(A)\supset D(T)$.

А если A замкнут? (Рассмотреть условие $\forall u\in D(T)\ \ \|Au\|\le a\|u\|+b\|Tu\|,\ b<1$).

3. СПЕКТР

Пусть X – ЛНП. A – линейный оператор $A: X\to X$. Число $\lambda\in\mathbb{C}$ называется регулярным значением оператора A, если оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определен и ограничен на всем X. Оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ в этом случае называется резольвентой оператора A и обозначается $R_\lambda(A)$ или $R(\lambda,A)$. Множество регулярных точек обозначается $\rho(A)$. Множество $\mathbb{C}\setminus\rho(A)$ называется спектром оператора A, обозначается $\sigma(A)$ или $sp(A)$. Множество собственных значений оператора A называется дискретным спектром $\sigma_d(A)$, множество $\sigma_c(A)\triangleq\sigma(A)\setminus\sigma_d(A)$ – непрерывным спектром.

В задачах 3.1 – 3.9 найти спектр оператора $A: X\to X$.

3.1. $X=\ell_2$, $Ax=(x_1-x_2,\ x_1+x_2,\ x_3,\ x_4,\dots)$.

3.2. $X=\ell_1$, $Ax=(x_2,\ -x_1,\ x_3,\ x_4,\dots)$.

3.3. $X=\ell_1$, $Ax=(0,\ -x_1,\ -x_2,\ -x_3,\dots)$.

3.4. $X=\ell_p$, $Ax=(0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\dots)$.

3.5. $X=C[0,1]$, $Ax=y_0(t)x(t)$, где $y_0\in C[0,1]$.

3.6. $X=L_2[0,1]$, $Ax=(2t^2-1)x(t)$.

3.7. $X=L_2[0,1]$, $Ax=\sqrt{t}\,x(t)$.

3.8. $X=L_2[0,1]$, $A_\alpha x=\begin{cases}0 & \text{если } 0\le t<\alpha;\\ x(t) & \text{если } \alpha<t\le 1.\end{cases}$

3.9. $X=\ell_2$, $Ax=(x_1,\ \frac12 x_2,\ \frac13 x_3,\dots)$.

3.10. Пусть $X=\ell_p$, $Ax=(x_2,x_3,\dots x_n,\dots)$. Доказать, что $\sigma(A)=\{\lambda:|\lambda|\le 1\}$, причем внутренность этого круга состоит собственных значений оператора A.

3.11. Найти A^* – сопряженный (см.п. 6) к оператору задачи 3.10. Показать, что $\sigma(A^*)=\sigma(A)$, но A^* не имеет собственных значений.

3.12. Для резольвенты оператора A доказать резольвентное тождество, или тождество Гильберта:

$$\forall \lambda, \mu \in \rho(A) \quad R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda-\mu) R_\lambda(A) R_\mu(A).$$

3.13. Пусть H -гильбертово пространство с ортогональным базисом $\{e_i\}_1^\infty$. M -произвольные замкнутое ограниченное множество, $\overline{\{\lambda_i\}_1^\infty} = M$. Тогда существует $A \in \mathcal{L}(H)$, единственный и такой, что $Ae_i = \lambda_i e_i$, $i=1,2,\ldots$ и $\sigma(A) = M$.

3.14. Доказать, что для каждого конечномерного линейного оператора в бесконечномерном нормированном пространстве точка $\lambda = 0$ является собственным значением бесконечной кратности.

3.15. Найти спектр дифференциальных операторов, введенных в задаче 2.20.

3.16. Пусть $A: X \to X$, A – линейный. Доказать, что множество собственных значений оператора A^2 состоит из квадратов собственных значений оператора A.

3.17. Построить линейный оператор, для которого спектром является данное замкнутое множество в комплексной плоскости.

3.18. Построить линейный оператор, для которого множество собственных значений совпадает с заданным множеством в комплексной плоскости.

4. СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО. ГЕОМЕТРИЯ В ЛИНЕЙНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пространство $\mathcal{L}(X,P)$, где P равно R^1 или $\mathbb{C}$, называется пространством, сопряженным к X. Обозначается X^*. Значение $f \in X^*$ на элементе x обозначается $f(x)$ или $\langle x, f \rangle$.

Теорема Хана-Банаха. Пусть X – ЛНП над полем R^1, L – линейное многообразие в X, f_0 – ограниченный линейный функционал на L. Тогда этот функционал может быть продолжен на все X с сохранением нормы.

Следствие I. Пусть X – ЛНП, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Тогда существует линейный ограниченный функционал f на X такой, что $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\|$.

Следствие 2. Пусть L – линейное многообразие в ЛНП X, $\rho(x_0, L) = d > 0$. Тогда существует линейный ограниченный функционал f на X такой, что $f(L) = 0$, $f(x_0) = 1$, $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Пусть f – ненулевой линейный ограниченный функционал на ЛНП X. Тогда множество $\{x \in X : f(x) = c,\ c \in R^1\}$ называется гиперплоскостью в X. Расстояние от точки $x_0 \in X$ до гиперплоскости $\{x \in X : f(x) = c\}$ равно $\frac{|f(x_0) - c|}{\|f\|}$.

4.1. Нарисовать единичные шары в исходном и сопряженном пространствах для следующих норм на плоскости:

а) $\|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = (x,y) \in R^2$;

б) $\|z\| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4} y^2}$;

в) $\|z\| = \max\{|x|; |y|\}$;

г) $\|z\| = |x| + |y|$;

д) $\|z\| = \max\{|x|, \frac{1}{2}|y|\}$;

е) $\|z\| = \max\{|x+3y|, |x-3y|\}$.

Как выглядят шары с центром в точке (5,0) радиуса 2 ?

4.2. Как геометрически найти точку на единичной сфере, в которой достигается норма функционала $f(z) = ax + by$, заданного на двумерном ЛНП.

4.3. Доказать изоморфизм и изометрию пространств: $(c_0)^* \cong l_1$, $(l_p)^* \cong l_q$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1)$, $(l_1)^* \cong m$, $(L_p[a,b])^* \cong L_q[a,b]$, $p > 1$, $(C[a,b])^* \cong V_0[a,b]$ – пространство функций ограниченной вариации, непрерывных слева и равных нулю в нуле.

4.4. Пусть X – банахово пространство, $f \in X^*$. Доказать, что $\mathrm{Ker}\, f$ – гиперпространство в X, т.е. подпространство в X, коразмерности I.

4.5. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от гиперплоскости M до элемента x_0:

а) $M = \{x(t) : \int_0^1 x(t)dt = 0\}$, $x_0 = t^3$;

б) $M = \{x(t) : x(0) + \int_0^1 x(t)dt = 0\}$, $x_0 = \sin t$;

в) $M = \{x(t) : x(1) = 0\}$, $x_0 = \sin t$;

4.6. В ЛНП X найти расстояние от множества M до точки x_0:

а) $X = L_2[0,1]$, $M = \{x(t) : \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)dt = 0\}$, $x_0 = t$;

б) $X = L_2[0,\pi]$, $M=\{x(t): \int_0^{\pi} x(t)\cos t\,dt=0\}$, $x_0=t^2$;

в) $X = L_2[0,2\pi]$, $M=\{x(t): \int_0^{2\pi} x(t)\sin 2t\,dt=0\}$, $x_0=t$;

г) $X = C[0,2\pi]$, $M=\{x(t): \int_0^{2\pi} x(t)\sin 2t\,dt=0\}$, $x_0=t$;

д) $X = C[0,1]$, $M=\{x: \|x\|=1\}$, $x_0=2\cos 2t$;

е) $X = C[0,1]$, $M=\{x(t): x(0)=x(1)\}$, $x_0=\cos t$;

ж) $X = C[0,1]$, $M=\{x(t): x(0)=0, \int_0^1 x(t)dt=1\}$, $x_0=0$;

з) $X = C[0,1]$, $M=\{x(t): \int_0^1 x^2(t)dt>1\}$, $x_0=0$;

и) $X = C[0,1]$, $M=\{x(t): \int_0^1 x(t)dt>1\}$, $x_0=\cos t$;

к) $X=\ell_2$, $M=\{(\xi_n): (\xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, 0,\dots)\}$,
$x_0=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots)$.

4.7. На плоскости задана норма $\|z\|=\max\{|x|,|y|\}$. На одномерном подпространстве $L=\{(x,y): y=0\}$ определен функционал $f(z)=2x$. Продолжить f на все ЛНП с сохранением нормы. Является ли требуемое продолжение единственным?

4.8. Решить предыдущую задачу, если

а) $\|z\|=|x|+|y|$, $L=\{z=(x,y): y=0\}$, $f(z)=3x$;

б) $\|z\|=\max\{|x|,|y|\}$, $L=\{z=(x,y): y=kx\}$, $f(z)=-x$.

4.9. Как в двумерном ЛНП геометрически осуществить продолжение (с сохранением нормы) функционала, заданного на одномерном подпространстве? Указать условие единственности требуемого продолжения.

4.10. Пусть на плоскости задана норма $\|z\|=|x|+|y|$. Найти все одномерные подпространства, продолжение функционала с которых с сохранением нормы не всегда единственно.

4.11. В трехмерном ЛНП X с нормой

найти все двумерные подпространства, для которых продолжение функционала с сохранением нормы на X не всегда единственно. Приведите пример двумерного подпространства L в X и двух ненулевых линейных функционалов f_1 и f_2 на L таких, что для f_1 продолжение с сохранением нормы на X единственно, а для f_2 – нет.

4.12. ЛНП X называется гладким, если для любого x из единичной сферы существует только один ненулевой линейный ограниченный функционал, достигающий в точке x своей нормы на единичной сфере. Доказать, что $C[0,1]$ не является гладким.

4.13. Существуют ли в $C[0,1]$ одномерные подпространства L, для которых продолжение функционала с L на $C[0,1]$ с сохранением нормы не всегда единственно?

4.14. Решите задачу 4.13 для ЛНП m.

5. СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть X – ЛНП. Последовательность $(x_n)\subset X$ называется слабо сходящейся к $x_0\in X$, если $f(x_n)\to f(x_0)$ для любого $f\in X^*$.

Теорема. Для того чтобы в ЛНП X последовательность (x_n) слабо сходилась к x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) последовательность $\|x_n\|$ ограничена,

2) $f(x_n)\to f(x)$ для любого f из некоторого множества Γ линейных непрерывных функционалов, линейные комбинации которых всюду плотны в X.

Последовательность $(f_n)\subset X^*$ называется $*$-слабосходящейся к $f\in X^*$, если для любого $x\in X$ $f_n(x)\to f(x)$.

5.1. Доказать, что из сильной сходимости вытекает слабая.

5.2. Доказать, что в бесконечномерном пространстве ℓ_1 слабая и сильная сходимости равносильны.

5.3. Доказать, что в конечномерном ЛНП слабая сходимость эквивалентна сильной.

5.4. Привести пример последовательности из $C[0,1]$, которая сходится слабо, но не сходится сильно.

5.5. Пусть в гильбертовом пространстве $x_n \to x$, y_n слабо сходится к y. Доказать, что $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Будет ли справедливо утверждение, если x_n слабо сходится к x, но не сходится сильно ?

5.6. Пусть последовательность (x_n) из гильбертова пространства слабо сходится к x, $\|x_n\| \to \|x\|$. Доказать, что $x_n \to x$.

5.7. Доказать, что в $C[0,1]$ последовательность $x_n(t)$ тогда и только тогда слабо сходится к $x(t)$, когда

I) последовательность (x_n) ограничена,

2) $x_n(t) \to x(t)$ для любого $t \in [0,1]$.

5.8. Доказать, что в ЛНП l_2 для слабой сходимости необходимы и достаточны ограниченность и покоординатная сходимость. Справедливо ли аналогичное утверждение для пространств c_0 и l_1 ?

5.9. Доказать, что в ЛНП l_2 ограниченное замкнутое множество слабо компактно.

5.I0. Последовательность (x_n) слабо сходится к x. Доказать, что существует последовательность выпуклых линейных комбинаций элементов из (x_n), сильно сходящаяся к x.

5.II. Пусть в ЛНП выпуклое множество M слабо замкнуто. Доказать, что M сильно замкнуто.

5.I2. Доказать, что для любого линейного оператора A, определенного всюду в банаховом пространстве X, со значениями в банаховом пространстве Y, равносильны следующие свойства:

а) оператор A переводит каждую сходящуюся в X последовательность $(x_n) \subset X$ в сходящуюся $(Ax_n) \subset Y$,

б) оператор A переводит каждую слабо сходящуюся в X (x_n) в слабо сходящуюся в Y,

в) оператор A переводит каждую сходящуюся (x_n) в X в слабо сходящуюся в Y.

Обобщенные функции (или распределения) определяются как непрерывные функционалы, заданные на следующих ненормированных пространствах:

$\mathcal{D}(R)$ - пространство функций $\varphi(x)$, бесконечно дифференцируемых, финитных (т.е. с компактным носителем: $\exists K$ $\operatorname{supp}\varphi = K$, K - компакт в R). Сходимость $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(R)} \varphi$ означает $\exists K \subset R: \operatorname{supp}\varphi_n \subset K$, $\varphi_n \to \varphi$ равномерно на K.

$\mathcal{E}(R)$ - пространство функций, бесконечно дифференцируемых на R с равномерной сходимостью на любом компакте.

$S(R)$ - подпространство $\mathcal{E}(R)$, функций таких, что

$$\forall \varphi \in S(R) \quad \forall m, p \geq 0 \quad \lim_{|x| \to \infty} |x|^m \varphi^{(p)}(x) = 0.$$

Для пространств линейных непрерывных функционалов, заданных на введенных пространствах основных функций, имеют место включения $\mathcal{D}'(R) \supset S'(R) \supset \mathcal{E}'(R)$.

Дифференцирование и преобразование Фурье для обобщенных функций определяются следующим образом:

$$\forall f \in \mathcal{D}' \ \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \varphi, f^{(k)} \rangle \triangleq (-1)^k \langle \varphi^{(k)}, f \rangle,$$

$$\forall f \in S' \ \forall \varphi \in S \quad \langle \varphi, Ff \rangle \triangleq \langle F\varphi, f \rangle.$$

5.I3. Какие из следующих функционалов непрерывны на $\mathcal{D}(R)$? $\mathcal{E}(R)$?

а) $\langle \varphi, \delta \rangle \triangleq \varphi(0)$; б) $\sum a_k \delta^{(k)}$.

в) $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx$;

г) $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx$.

5.I4. Найти производные от следующих распределений

а) $H(x)$; б) $\delta(x)$; в) $|x|$;

г) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$; д) $\ln|x|$;

е) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0. \end{cases}$

5.I5. Доказать сходимость рядов в $\mathcal{D}'(R)$ при любых a_k :

а) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k)$; б) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta^{(k)}(x-k)$.

5.I6. Найти преобразование Фурье в $S'(R)$ распределений

а) $\delta(x) = \delta(x-0)$, б) $\delta^{(k)}(x)$, в) 1, г) $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, д) e^{bx}, е) $\sin ax$.

5.I7. Доказать равенства в $\mathcal{D}'(R)$:

а) $\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2k\pi)$

б) $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2k+1)x = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(x-k\pi)$.

6. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $A\subset\mathcal{L}(X,Y)$. Сопряженным к A оператором называется такой оператор $A^*: Y^*\to X^*$, что

$\forall x\in X,\ f\in Y^*\quad \langle x, A^*f\rangle \triangleq \langle Ax, f\rangle$.

Если $X=Y=H$, то эрмитово сопряженным к A называется такой оператор $A^*: H\to H$, что $\forall x,y\in H\ (Ax,y)=(x,A^*y)$.

Если $A: X\to Y$ — линейный, не обязательно ограниченный оператор и $\overline{D(A)}=X$, то $f\in D(A^*)$, если $\langle Ax, f\rangle$ ограничен на $D(A^*)$. A^* определяется равенством:

$$\forall x\in D(A)\quad \langle x, A^*f\rangle \triangleq \langle Ax, f\rangle .$$

6.1. Пусть $A,B\in\mathcal{L}(H)$. Доказать, что

а) $I^*=I$, где I — единичный оператор;

б) $(A+B)^*=A^*+B^*$;

в) $(\lambda B)^*=\bar\lambda B^*$;

г) $(AB)^*=B^*A^*$;

д) $A^{**}=A$;

е) если существует A^{-1} на H, то $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$;

ж) $\|A^*\|=\|A\|$.

6.2. Пусть $Ax=\int_0^t x(s)ds: L_p[0,1]\to L_p[0,1]$, $p>1$. Найти A^*.

6.3. Пусть $Ax=e^t x(t): L_p[0,1]\to L_q[0,1]$, $p>q>1$. Найти A^*.

6.4. Пусть $Ax=x(t+t_0): L_2(R)\to L_2(R)$, $t_0\in R$. Найти A^*.

6.5. Показать, что для самосопряженности оператора

$$Ax=\frac{1}{2}[x(t+t_1)+x(t+t_2)]: L_2(R)\to L_2(R),$$

необходимо и достаточно, чтобы $t_1+t_2=0$.

6.6. Пусть $A: l_2\to l_2$, $Ax=(x_1-x_2,\ x_1+x_2,\ x_3,\ x_4 \ldots)$. Найти A^*.

6.7. Пусть $A: l_2\to l_2$, $Ax=(0,-x_1,-x_2,-x_3,\ldots)$. Найти A^*.

6.8. Пусть $A: l_2\to l_2$, $Ax=(x_2,x_3,x_4,\ldots)$. Найти A^*.

6.9. Пусть $A: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$,

$$A_\alpha x=\begin{cases}0 & \text{при } 0\le t<\alpha,\\ x(t) & \text{при } \alpha<t\le 1.\end{cases}$$

Найти A^*.

6.10. Пусть $y\in C[0,1]$, $Ax=y(t)\cdot x(t): L_2[0,1]\to L_2[0,1]$. Доказать, что A — самосопряженный оператор.

6.11. В пространстве Соболева $H^1[0,1]$ рассмотрим оператор $A=\frac{d}{dt}$ со значениями в $L_2[0,1]$. Найти A^*.

6.12. Пусть оператор A определен всюду в комплексном гильбертовом пространстве H и $R(A)\subset H$. Доказать, что если $\forall x,y\in H\ (Ax,y)=(x,Ay)$, то

а) A линеен, б) A ограничен, в) A самосопряжен.

6.13. Пусть $A\in\mathcal{L}(H)$ и $AA^*=A^*A$. Доказать, что A неотрицательный ($\forall x\in H\ (Ax,x)\ge 0$), самосопряженный оператор.

6.14. Пусть $A,B\in\mathcal{L}(H)$, самосопряженные. Пусть $\forall x\in H\ (Ax,x)=(Bx,x)$. Доказать, что $A=B$.

6.15. Доказать; в комплексном гильбертовом пространстве H квадратичная форма (Ax,x) для $A\in\mathcal{L}(H)$ вещественна тогда и только тогда, когда A самосопряжен.

6.16. Пусть $A\in\mathcal{L}(X,Y)$, X,Y — ЛНП. Доказать $\sigma(A)=\sigma(A^*)$.

6.17. Доказать, что в гильбертовом пространстве собственные значения самосопряженного оператора вещественны, а собственные элементы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны.

6.18. Пусть $A\in\mathcal{L}(H)$. Ортогональным дополнением множества $M\subset H$ называется множество

$$M^{\perp} = \{y \in H : \forall x \in M \ (x, y) = 0\}.$$

Доказать, что $R(A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*$, $R(A^*)^{\perp} = \operatorname{Ker} A$.

Доказать, что если существует $(A^*)^{-1}$, то $\overline{R(A)} = H$.

7. КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Оператор A, отображающий ЛНП X в Y, называется компактным, если каждое ограниченное множество он переводит в предкомпактное. Линейный компактный оператор называют вполне непрерывным.

7.1. Доказать, что компактный оператор ограничен.

7.2. Приведите пример компактного разрывного оператора.

7.3. Пусть оператор A компактный, а B – ограниченный. Доказать, что операторы AB и BA компактны.

7.4. Может ли быть непрерывным оператор, обратный к вполне непрерывному в банаховом пространстве X ?

7.5. Пусть $Ax = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots) : \ell_2 \to \ell_2$. При каких условиях на последовательность (a_n) оператор A компактен?

7.6. Пусть матрица $\{a_{ij}\}$ определяет оператор A, действующий из ℓ_2 в ℓ_2, и удовлетворяет условию $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$. Доказать, что A компактный оператор и $\|A\| \leq \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.

7.7. Пусть функция $K(t,s)$ непрерывна на квадрате $[a,b;a,b]$. Доказать, что операторы

$$A_1 x = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds, \qquad A_2 x = \int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds,$$

отображающие $C[a,b]$ в $C[a,b]$, являются компактными.

7.8. Являются ли вполне непрерывными следующие операторы в пространстве $C[0,1]$:

а) $Ax(t) = \int_0^1 x(s)\,ds$;

б) $Ax(t) = \int_0^1 x(s) \big/ \sqrt{(t-s)^2}\ ds$;

в) $Ax = \int_0^1 x(s) \big/ \sqrt{|\sin t - \sin s|}\ ds$;

г) $Ax = x(t^2)$;

д) $Ax(t) = \int_0^1 x(s) \big/ (s - 1/2)\ ds$;

е) $Ax(t) = x(\sqrt{t})$.

7.9. Доказать, что оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ является вполне непрерывным из $C^2[a,b]$ в $C[a,b]$.

7.10. Доказать, что оператор вложения $J : C^1[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Jx = x$, является вполне непрерывным.

7.11. Пусть $K(t,s)$ – функция, интегрируемая с квадратом. Доказать, что оператор

$$Ax = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$$

является компактным и $\|A\| \leq \left(\iint K^2(t,s)\,ds\,dt\right)^{1/2}$.

7.12. Может ли оператор умножения на функцию $Ax(t) = a(t)x(t)$ быть вполне непрерывным а) в $C[0,1]$, б) $L_2[0,1]$?

7.13. Доказать, что оператор

$$Ax = \left(x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \tfrac{1}{3}x_3, \dots\right) : \ell_2 \to \ell_2$$

является компактным. Найти спектр A.

7.14. Пусть оператор A действует из ℓ_2 в ℓ_1 по формуле $(Ax)_k = \frac{x_k}{k}$. Проверить, что A вполне непрерывен.

7.15. Доказать, что любой линейный ограниченный оператор из ℓ_2 в ℓ_1 является вполне непрерывным.

7.16. Пусть $y \in X$ – ЛНП, f – линейный функционал на X, $Ax = y f(x) : X \to X$. Является ли A компактным? Найти спектр A.

7.17. Доказать, что для линейного оператора A, отображающего гильбертово пространство в себя, следующие свойства эквивалентны:

1) A – компактный,

2) A переводит любое слабо предкомпактное множество в предкомпактное,

3) A переводит любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

7.18. Доказать, что линейный компактный оператор отображает любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

7.19. Доказать, что оператор $A \in \mathcal{L}(H)$, где H – гильбертово, вполне непрерывен тогда и только тогда, когда для любых (x_n)

и (y_n), слабо сходящаяся к x, y соответственно, $(Ax_n, y_n) \to (Ax, y)$ при $n \to \infty$.

7.20. Пусть $X = Y$ одно из пространств ℓ_p, m, c, c_0. Для $x = (\xi_k) \in X$ положим $y = Ax = (\eta_k)$, где $\eta_k = 0$, если k нечетное, и $\eta_k = \xi_{k-1}$, если k четное. Показать, что A не является компактным, хотя A^2 – компактен.

8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Интегральное уравнение вида

$$x(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt + f(s) \qquad (I)$$

называется уравнением Фредгольма второго рода. Уравнение (I) можно записать в операторной форме

$$x = \lambda A x + f, \quad \text{где} \quad Ax = \int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt .$$

Функция $K(s,t)$ называется ядром уравнения (I).

Ядро называется вырожденным, если

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) Q_i(t) .$$

Для уравнения с вырожденным ядром (в котором функции $P_1, P_2, \ldots, P_n$ линейно независимы, и функции $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ линейно независимы) решение имеет вид

$$x(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s) ,$$

где q_i – решение системы

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

в которой

$$a_{ij} = \int_a^b P_j(t) Q_i(t)\, dt, \quad b_i = \int_a^b Q_i(t) f(t)\, dt .$$

Для уравнений с малым параметром

$$x = \lambda A x + f \qquad (|\lambda| < \|A\|)$$

и для уравнений Вольтерра

$$x(s) = \lambda \int_a^s K(s,t)\, x(t)\, dt + f(s) = \lambda A x + f$$

решение имеет вид

$$x(s) = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots) f$$

8.I. Проверьте, что кроме нулевого решения уравнение

$$x(s) + \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

с ядром

$$K(s,t) = \begin{cases} t^s & \text{при } s > 0 \\ 0 & \text{при } s = 0 \end{cases}$$

имеет также решение

$$x_0(s) = \begin{cases} 1/s & \text{при } s > 0 \\ 0 & \text{при } s = 0 \end{cases} .$$

В задачах 8.2 – 8.I2 найти решения интегральных уравнений в классе интегрируемых функций, найти спектры и собственные значения соответствующих интегральных операторов.

8.2. $x(s) = e^s + \lambda \int_0^1 st\, x(t)\, dt$.

8.3. $x(s) = \lambda \int_0^\pi \cos(s-t)\, x(t)\, dt$.

8.4. $x(t) - 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, x(s)\, ds = 2t - \pi$.

8.5. $x(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 (s+t)\, x(t)\, dt$.

8.6. $x(s) = f(s) + \lambda \int_0^{2\pi} \sin s \sin t\, x(t)\, dt$.

8.7. $x(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 (16t + 9s^2)\, x(t)\, dt$.

8.8. $x(s) = 1 + \int_0^s x(t)\, dt$.

8.9. $x(s) = e^s + \lambda \int_0^1 2 e^{s+t}\, x(t)\, dt$.

8.I0. $x(s) = \cos s - s + \int_0^s (t-s)\, x(t)\, dt$.

8.II. $x(s) = 3s - 2 + 3 \int_0^1 st\, x(t)\, dt$.

8.I2. $x(s) = 1 + \int_0^\pi \cos(s+t)\, x(t)\, dt$.

В задачах 8.I3 – 8.I5, не решая уравнений, определить для каких $y(t) \in C[0,1]$ следующие уравнения имеют решения.

8.I3. $x(t) - \int_0^1 x(s)\, ds = y(t)$.

8.I4. $x(t) - 2/\pi \int_0^\pi \cos(t+s)\, x(s)\, ds = y(t)$.

8.I5. $x(t) - 4 \int_0^1 t s^2\, x(s)\, ds = y(t)$.

ОТВЕТЫ

I.3. $Ax = x'$. I.8. а) нет, б) да, в) да.

I.10. Нет, да, да. I.20. Нет, нет, нет.

I.II. Да, да, да. I.2I. Да, нет, нет.

I.12. Нет, да, да. I.22. Да, нет, нет при $p>1$, да, да, да при $p=1$.

I.I3. Да, нет, нет.

I.I4. Нет, да, да. I.23. Да, нет, нет.

I.I5. Да, нет, нет. I.24. Нет, нет, нет при $p>2$, нет, да, да при $p\in[1,2]$.

I.I6. Да, нет, нет.

I.I7. Нет, нет, нет. I.25. Нет, да, нет.

I.I8. Да, да, да. I.26. Нет, нет, нет.

I.I9. Нет, да, да. I.27. Нет, нет, нет.

I.28. а) $\left(\frac{e^p-1}{p}\right)^{1/p}$, б) 2, в) 2, г) 2, д) e^{-1} , е) $\sup_i |u_i|$.

I.29. $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$. б) $\sup_{i,j} |a_{ij}|$, в) $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$.

I.30. а) $\sup_{t,s} |K(t,s)|$, б) $\sup_t \int_0^1 |K(t,s)|\,ds$.

I.3I. а) $\|A\|=1$, достижимый, б) $\|A\|=1$, не достижимый.

I.32. а) $\|A\|=1-\cos 1$, да: $x_0(t)=1$, б) $\|A\|=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sin 2}$, да: $x(t)=\frac{2\sin t}{\sqrt{2-\sin 2}}$.

I.33. а) I, б) 2/3, в) I, г) 2.

I.34. а) I/2, нет, б) 3, да, в) I, нет, г) I, нет.

I.38. Нет.

I.40. $X=l_2$, $A_n x=(0,\dots 0, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$.

2.I. $A^{-1}y=y'(t)$. 2.2. A^{-1} не существует.

2.3. $A^{-1}y=\frac{y'(t)}{t}$. 2.4. $A^{-1}y=(y_2,y_4,y_6,\dots)$.

2.5. A^{-1} не существует. 2.6. A^{-1} не существует.

2.7. $A^{-1}y=(y_1, y_2^{1/3}, y_3^{1/5}, \dots)$. 2.8. A^{-1} не существует.

2.9. $A^{-1}y=\int_0^t x(s)\,ds$. 2.IO. $A^{-1}y=\left(\frac{y(t)}{t+1}\right)_t'$.

2.I3. $A^{-1}x=\int_0^t x(s)\,ds$.

2.20. а) нет, б) да.

3.I. $1,\ 1+i,\ 1-i$. 3.2. $1,\ +i,\ -i$.

3.3. 0. 3.4. 0.

3.5. $\{y_t(t):\ t\in[0,1]\}$.

3.6. $[-1,3]$. 3.7. $[0,1]$.

3.8. 0, I. 3.9. $0,\ 1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4, \dots$

3.I6. $\sigma(P_i)=\varnothing$, $i=1,2,3$; $\sigma(P_4)=\mathbb{C}$.

$\sigma(T_2)=\left\{-\frac{\pi^2 k^2}{(b-a)^2},\ k=1,2,\dots\right\}$, $\sigma(T_1)=\varnothing$,

4.I. а) $\|f\|=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $f(z)=\lambda x+\mu y$. г) $\|f\|=\max\{|\lambda|,|\mu|\}$,
б) $\|f\|=\sqrt{\lambda^2+4\mu^2}$ д) $\|f\|=|\lambda|+2|\mu|$,
в) $\|f\|=|\lambda|+|\mu|$, е) $\|f\|=\max\{|\lambda|,\ 1/3|\mu|\}$.

4.5. а) I/4, б) $\frac{1-\cos 1}{2}$, в) $\sin 1$.

4.6. а) $\sqrt{3}/5$, б) $2\sqrt{2\pi}$; в) $\sqrt{\pi}$, г) $\pi/4$, д) 1.
е) $\frac{1-\cos 1}{2}$, ж) I, з) I, и) $1-\sin 1$,
к) $1/2\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{6}}$.

4.7. $f(z)=2x$, да.

4.8. а) $f(z)=3x$, нет, $f(z)=3(x+y)$.
б) если $|k|<1$, то $f(z)=-x$, единственно;
если $|k|>1$, то $f(z)=-\frac{y}{k}$, единственно;
если $|k|=1$, то $f_\lambda(z)=(\lambda-1)x-\lambda y$ $(0\le\lambda\le 1)$.

4.IO. $\{z:\ x=0\}$, $\{z:\ y=0\}$.

4.II. $\{u:\ z=0\}$, $\{u:\ ax+by=0\}$ $(|a|+|b|\neq 0)$;
$\{u:\ y=0\}$. $f_1(u)=x+z$. $f_2(u)=z$.
$F_2'(u)=z$. $F_2''(u)=z+y$.

4.I2. $L=\{\lambda x_0:\ -\infty<\lambda<+\infty\}$, $x_0(t)=1$,

$$x_0(t)=\begin{cases}2t & 0\le t\le 1/2\\ 1 & 1/2<t\le 1\end{cases}$$ и др.

4.I4. $x_0 = (1, 1, 0, 0, \dots)$, $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

5.4. $x_n(t) = t^n - t^{2n}$.

5.5. Нет, $x_n = y_n = e_n$; e_n – единичные векторы.

5.8. Да, нет.

5.I4. а) $\delta(x)$, б) $\langle \varphi(x), \delta'(x) \rangle = -\varphi'(0)$, в) $\operatorname{sign} x$,

г) $f'(x) = \delta(x) + \begin{cases} -\sin x, & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$,

д) $\frac{1}{x}$, где $\langle \varphi(x), \frac{1}{x} \rangle = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$, е) $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0, \\ 1 & x < 0. \end{cases}$

5.I6. а) I, б) $F(\delta^{(k)}) = \begin{cases} (-1)^m x^{2m}, & k = 2m, \\ (-1)^{m+1} (ix)^{2m+1}, & k = 2m+1 \end{cases}$ в) $\delta(x)$,

г) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \left(-i\frac{d}{dx}\right)^k \delta(x)$, д) $\delta(x - ib)$, е) $\frac{1}{2}\left[\delta(x-b) - \delta(x+b)\right]$.

6.2. $(A^* g)s = \int_s^1 g(t)\,dt$.

6.3. $A^* g = e^t g(t)$. 6.4. $A^* g = g(t - t_0)$.

6.6. $A^* y = (y_1 + y_2, y_2 - y_1, y_3, y_4, \dots)$.

6.7. $A^* y = (-y_2, -y_3, -y_4, \dots)$.

6.8. $A^* y = (0, y_1, y_2, \dots)$.

6.9. $A_\alpha^* y = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le t < \alpha, \\ y(t) & \text{при } \alpha < t \le 1. \end{cases}$

7.4. Если X конечномерно, то да; если X бесконечномерно, то нет.

7.5. $a_n \to 0$.

7.8. а) да, б) нет, в) да, г) нет, д) нет, е) нет.

7.I2. а) если $a(t) \ne 0$, то не может, б) если $a(t) \ne 0$ п.в., то не может.

7.I3. $\sigma(A) = \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\}$

7.I6. Если f непрерывен, то A – компактный; если f разрывен, то – нет; $\sigma(A) = \{0, f(y)\}$.

8.2. $x(s) = e^s + \dfrac{9e^{10}\lambda s}{\left(1 + \frac{10^3}{3}\lambda\right)}$ $(\lambda \ne \lambda_0)$;

$\sigma(A) = -\frac{3}{10^3}$, $x_0(s) = s$ – собственная функция.

8.3. $x = 0$, $(\lambda \ne \lambda_0)$, $\lambda_0 = \frac{2}{\pi}$, $x_0(s) = C_1 \cos s + C_2 \sin s$.

8.4. $x(t) = 2t - \pi + c \sin^2 t$.

8.8. $x(s) = e^s$.

Линейные операторы

Методические указания
для практических занятий
по функциональному анализу
Редактор Т.С.Непряхина
Технический редактор Э.А.Максимова

Подписано в печать 29.05.89. Формат 60x84 I/I6. Бумага для множительных аппаратов. Печать плоская. Уч.-изд.л. I,65. Усл.печ.л. I,63. Заказ 518 Тираж 500 экз. Бесплатно.
Уральский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им.А.М.Горького. Свердловск, пр.Ленина, 5I

Типолаборатория УрГУ. Свердловск, пр.Ленина, 5I.