Министерство образования
и науки Российской федерации

Уральский
федеральный
университет

**Гурьянова К.Н., Глазырина П.Ю.,
Борбунов А.Н., Дейкалова М.В.**

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное электронное текстовое издание

Методические указания для написания рефератов
и курсовых работ

Сборник тестовых вопросов

Подготовлено кафедрой математического анализа
и теории функций

Содержание

Раздел I Введение

Предлагаемый курс относится к таким курсам, которые способствуют формированию математической культуры, помогают оценить роль математики в развитии общества, красоту её достижений, почувствовать характер математического творчества (восхитившись её создателями), оценить современное состояние математики, представить перспективы и пути её развития. В данном ресурсе также рассматриваются вопросы, связанные с историей компьютерных наук.

Содержательная часть программы, распределённая на принятые в истории математики периоды, представлена в расширенном (тезисном, с упоминанием значительного числа имён) виде. Это позволяет предусмотреть вариативность, интерактивность изучения указанного курса.

Предложен довольно большой выбор тем эссе и рефератов, и обширный список литературы для их подготовки и самостоятельной работы.

История математики от периода накопления начальных сведений и до периода современной математики излагается обзорно (этот материал изучается в курсе «История математических теорий» в бакалавриате) и в основном в связи с вопросами методологии. Для обращения к изученному курсу предложены тесты, с которыми студенты работают самостоятельно (в тестах есть возможность самопроверки).

В учебном плане магистрантов этот курс предложен для интерактивного изучения (28 часов аудиторных, 44 часа самостоятельной работы, общая трудоемкость – 72 часа). При изложении содержания данного курса (это касается периода современной математики, методологии и истории компьютерных наук) в предлагаемом образовательном ресурсе опущены подробности, связанные с биографиями ученых, с географией математических результатов и разбора конкретных математических фактов, хотя дан глубокий обзор истории создания математических теорий и структур, указаны создатели, время создания и государства, в которых они формировались. Такой стиль пособия вызван не только отсутствием аудиторного времени, но необходимостью сделать продуктивной для студентов самостоятельную работу, в частности, подготовку к сообщениям на занятии, написанию эссе и рефератов.

В образовательном ресурсе уделено особое внимание истории российской математики и становлению уральской математической школы.

Вопросы методологии обсуждаются по ходу изложения истории математики, а также во введении и в специально выделенном разделе, где математика рассматривается с позиций теории познания. Студенты магистратуры по учебному плану изучают курс, который называется «Философия и методология научного знания». Материалы, рассматриваемые в пособии, дополняют и конкретизируют вопросы методологии науки на примере математики и компьютерных наук. Отдавая дань современному вниманию к компьютерной математике, отмечаем видение философских теоретико-прикладных проблем в этой отрасли научных знаний.

При изучении курса используются материалы созданного на кафедре ранее мультимедийного интерактивного ресурса «История математики» в соответствии с заявкой и план-проспектом ММИР_2012_52. Предлагаемый электронно-образовательный ресурс «История и методология математики» и интерактивный ресурс «История математики» в совокупности формируют законченный образовательный продукт, обеспечивающий курс магистратуры «История и методология математики».

Раздел II Некоторые вопросы методологии математики

Наука в системе духовной культуры. Наука и искусство, наука и мораль.

Закономерности и тенденции развития науки.

Скорость, кумулятивный (суммирующий) характер, преемственность, совершенствование структур и методов, чередование экстенсивности и интенсивности, смена организационных форм, взаимосвязь дифференциации и интеграции, увеличение числа потребителей научных знаний.

Математизация науки: организация эмпирических исследований, обработка их результатов, теоретический анализ (влияние логики построения, математическое моделирование – привлечение готовых моделей и методов, вырастание новых моделей, методов и целых «пограничных» наук). Математика в качестве языка наук. ЭВМ в различных областях человеческой деятельности

Наука вчера, сегодня, завтра.

Период накопления эмпирических и практических знаний (Вавилон, Египет, Китай, Индия), мифология.

Первые теоретические системы (Древняя Греция, натурфилисофский этап, космология и космогония).

Средневековье (схоластика, переход от содержания к теоретическому анализу).

Начало «современной» науки (15-17 вв., «Новый органон», принципы механики, эксперимент, мысленный эксперимент, индуктивный метод, рационализм, математизация и геометрическая интерпретация физического).

Начало современного этапа (с 19 в., закон сохранения и превращения энергии, клеточная теория-единство живых организмов, открытие Дарвина, таблица Менделеева, строгое построение математики). Характеристика современного этапа (конец 19 в. – 20 в., комплексность подходов, массовость, производственная направленность, специализация, компьютеризация и математизация).

Математика как наука.

Сопоставление естественных наук и математики по предмету изучения, по способу изучения, по методам, по языку. Иерархия математики.

Высокая степень абстракции как предпосылка широкого взаимодействия различных разделов самой математики и взаимодействие с другими науками.

Раздел III Математика в её историческом развитии

§ 3.1 Период накопления начальных математических сведений

3.1.1 Формирование первичных понятий в Египте, Вавилоне, Индии, Китае.

Математика в странах древних цивилизаций – в Древнем Египте, Древнем Вавилоне (практические вычислительные задачи с конкретным содержанием); в Древних и Средневековых Китае, Индии (изложены догматически). Основную информацию о математике в странах древних цивилизаций – в Древнем Египте, Древнем Вавилоне, удалось получить из немногочисленных папирусов, клинописных табличек, которые сохранились до наших дней. Важнейшими из них являются папирус ***Райнда*** (содержит 84 задачи), ***Московский папирус*** (содержит 25 задач), Кожаный свиток египетской математики и около 300 глиняных табличек.

«Математика в девяти книгах» Чжань Цаня в Китае: использование отрицательных и иррациональных (их приближений) чисел, интерполирование и решение систем. Матрицы преобразования.

Число

Натуральные числа. Появление различных эталонов счёта. Первые позиционные системы. Переход к единому удобному эталону, который становится основой системы счисления. Происхождение и развитие письменной нумерации, цифры разных народов. Натуральные числа и обыкновенные дроби у разных народов и в разные эпохи. Их обозначения и действия с ними. Приближенное вычисление корней, арифметические таблицы. Первые геометрические фигуры: орудия труда, сосуды, земельные участки и т.п.

3.1.2 Первая арифметика

Из этого периода в математику вошли сведения:

- возникновение позиционной системы счисления,
- текстовые задачи, сводящиеся к решению линейных систем и квадратных уравнений,
- решение простейших теоретико-числовых задач,
- появление первых «теоретических» задач»,
- появление различных эталонов счета.

3.1.3 Первая геометрия

Документы этого периода истории математики дают представление о зарождении первоначальной геометрии, появлении первых ***геометрических фигур*** (орудия труда, сосуды, земельные участки, орнаменты и т.п.), открытии некоторых геометрических формул, с правилами вычисления ***площадей*** и ***объемов***. Приближенное нахождение диагонали квадрата, радиуса описанной около треугольника окружности, площади правильного многоугольника («неправильные формулы» и их точность). Применение «теоремы Пифагора», некоторые «пифагоровы» тройки. Все эти данные нам известны благодаря клинописным табличкам и папирусам. Очень много удалось узнать о правилах вычисления площадей и объемов из папируса Ахмеса и Московского папируса.

Важнейшим достижением геометрии Древнего Вавилона является открытие «**теоремы Пифагора»** – метрического свойства прямоугольного треугольника. Она гласит следующее: «Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах». То есть эту теорему можно записать формулой: $c^2=a^2+b^2$, где a,b – катеты, а c – гипотенуза. Как пришли к этому к этому открытию – неизвестно. Во всяком случае, еще в третьем тысячелетии до нашей эры вавилоняне уже имели таблицы ***пифагоровых чисел***, причем в этих таблицах встречаются, помимо простых троек вроде (60,45,75) и довольно сложные, например, (72,65,97) или (3456,3367,4825). Теорема, которую после греков стали называть теоремой Пифагора, находила в Древнем Вавилоне разнообразное применение. С ее помощью вычисляли:

- диагональ квадрата;
- радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности;
- гипотенузу прямоугольного треугольника по данным периметру и площади;
- площадь правильного многоугольника,
- применяли при строительстве.

3.1.4 Формирование первых понятий

В этот период появились первые достижения арифметики, геометрии, алгебры, а именно:

- происхождение понятия натуральных чисел;
- зарождение отрицательных чисел, как «долг», «недостача»;
- появление первых дробей: конкретные и отвлеченные;
- теорема Пифагора до Пифгора – теорема в «***Сутрах»***;
- использование иррациональных чисел (их приближений);

- приближенное вычисление корней в книге Чжань Цаня "Математика в девяти книгах";
- первые арифметические таблицы (умножения, квадратов, кубов и др.);
- геометрические фигуры.

Формируется понятие ***обыкновенных дробей*** у разных народов и в разные эпохи, обозначения дробей и действия с ними. Дроби древних вавилонян – шестидесятеричные, у древних египтян – обыкновенные дроби, у римлян – двенадцатеричные и другие.

Языковые единицы обозначали конкретные связи, взаимодействия, объекты. Рецептурный характер математики этого периода.

Изображения в живописи, архитектуре. Этнографический и лингвистический анализ первых терминов, выделение эталонов-названий.

3.1.5 Математическая мысль Древней Руси

Математическая мысль Древней Руси: древнерусская нумерация; метрология; первые системы дробей; вычислительная практика. Математические памятники Киевской Руси. Кирик Новгородец и его сочинения.

3.1.6 Египет

Математика в Древнем Египте: практические вычислительные задачи с конкретным содержанием. Первые достижения арифметики, геометрии, алгебры: возникновение позиционной системы счисления, разработана алгебра решения линейных уравнений и систем, открыты некоторые геометрические формулы (в частности, формула объёма усечённой пирамиды), решаются простейшие теоретико-числовые задачи, появление первых «теоретических» задач. Языковые единицы обозначали конкретные связи, взаимодействия, объекты. Рецептурный характер математики этого периода.

Число

Число. Натуральные числа. Появление различных эталонов счёта. Первые позиционные системы. Переход к единому удобному эталону, который становится основой системы счисления. Натуральные числа и обыкновенные дроби с числителем, равным единице дробь 1/2.Первые геометрические фигуры: орудия труда, сосуды, земельные участки и т.п. Изображения в живописи, архитектуре. Этнографический и лингвистический анализ первых терминов, выделение эталонов-названий. Расшифровка системы счисления, созданной в Египте во времена первой династии, была существенно облегчена тем, что все надписи древних египтян были аккуратно вырезаны на каменных монументах. Из этих надписей нам известно, что древние египтяне использовали только десятичную систему счисления. Единицу обозначали одной вертикальной чертой, а для обозначения чисел, меньших 10, нужно было поставить соответствующее число вертикальных штрихов. Чтобы записанные таким образом числа было легко узнавать, вертикальные штрихи иногда объединялись в группы из трех или четырех черт. Для обозначения числа 10, основания системы, египтяне вместо десяти вертикальных черт ввели новый коллективный символ, напоминающий по своим очертаниям подкову или крокетную дужку. Множество из десяти подковообразных символов, т.е. число 100, они заменили другим новым символом, напоминающим силки. Десять силков, т.е. число 1000, египтяне обозначили изображением лотоса. Продолжая в том же духе, египтяне обозначили десять лотосов согнутым пальцем, десять согнутых пальцев – волнистой линией и десять волнистых линий – фигуркой удивленного человека. В итоге древние египтяне могли представлять числа до миллиона.

Самые древние из дошедших до нас математических записей высечены на камне. Но наиболее важные свидетельства древнеегипетской математической деятельности запечатлены на гораздо более хрупком и недолговечном материале – папирусе. Излагается материал и методы работы с материалом, решения задач в виде рецептов.

3.1.7 Вавилония

Письменность шумеров является такой же древней, как и письменность египтян. Развитие способов представления чисел в Месопотамской долине вначале шло так же, как и в Египте, но затем жители Междуречья ввели совершенно новый принцип. Вавилоняне делали записи острой палочкой на мягких глиняных табличках, которые затем обжигались на солнце или в печи. Эти записи на клинописных табличках оказались исключительно долговечными, а потому, в отличие от египетских папирусов, дошедших до нас в весьма малом числе экземпляров, в музеях мира их хранится около нескольких тысяч. Однако жесткость материала, на котором жители Месопотамии делали записи, оказала глубокое влияние на развитие числовых обозначений. Вскоре система счисления в Месопотамии стала шестидесятеричной, хотя сохранилось также и основание 10. Предполагалось, что выбор пал именно на число 60 как на основу вавилонской системы счисления именно потому, что это связано было с тем, что продолжительность земного года считалась равной 360 дням. Но это не получило подтверждения. Сейчас считается, что шестидесятеричная система была выбрана из метрологических соображений, т.к число 60 имеет много делителей.

Для малых чисел вавилонская система счисления в основных чертах напоминала египетскую. Одна вертикальная клинообразная черта означала единицу. Повторенный нужное число раз этот знак служил для записи чисел меньше десяти. Для обозначения числа 10 вавилоняне, как и египтяне, ввели новый коллективный символ – более широкий клиновидный знак с острием, направленным влево, напоминающий по форме угловую скобку. Для записи чисел больше 59 древние вавилоняне впервые использовали принцип позиционности, т.е. зависимости значения символа от его местоположения в записи числа. Вавилоняне заметили, что в качестве коллективных символов более высокого порядка можно применять уже ранее использованные символы, если они будут занимать в записи числа новое положение левее предыдущих символов. Так, один клиновидный знак мог использоваться для обозначения и 1, и 60, и 602, и 603, в зависимости от занимаемого им в записи числа положения, подобно тому, как единица в наших обозначениях используется в записях и 10, и 102, и 103, и в числе 1111. При обозначении чисел больше 60 знаки, выступающие в новом качестве, отличались от старых тем, что символы разбивались на «места», или «позиции», и единицы более высокого порядка располагались слева. При таком способе записи для обозначения сколь угодно больших чисел уже не нужно было других символов, кроме уже известных. В Древнем Вавилоне, ок. 1650 до н.э., система счисления оставалась псевдопозиционной или лишь относительно позиционной, поскольку не существовало эквивалента современной десятичной запятой, равно как и символа для обозначения отсутствующей позиции. Однако в период правления Селевкидов, ок. 300 до н.э., эта неоднозначность была устранена введением специального символа в виде двух небольших клиньев, помещаемого на пустующее место, т.е. обозначающего пустую позицию в записи числа. Таким образом, из системы счисления была устранена отмеченная выше неоднозначность. В то же время не было найдено ни одной таблички с записью, в которой символ нуля находился бы в конце числа. Именно поэтому вавилонскую систему мы считаем лишь относительно позиционной, ибо самый правый знак мог означать либо единицы, либо кратные какой-нибудь степени числа 60. Тем не менее, изобретение вавилонянами позиционной системы счисления с нулем представляло собой огромное достижение, по своему революционному значению для математики сопоставимое разве лишь с более поздней гипотезой Коперника в астрономии.

Превосходство разработанной в Месопотамии системы счисления отчетливо видно в обозначении дробей. Здесь не требовалось вводить новые символы. Решали квадратные уравнения (по рецепту). Привычное нам деление часа и углового или дугового градуса на 60 минут, а одной минуты – на 60 секунд берет начало от вавилонской системы счисления. Вавилоняне знали теорему Пифагора, некоторые пифагоровы тройки.

3.1.8 Китай

Китайская нумерация основана на мультипликативном принципе. Форма китайских иероглифических цифр, возникших во II тысячелетии до н.э., установилась к III в. до н.э. Эти иероглифы применяются и в настоящее время. При записи, например, числа, состоящего из тысяч, сотен, десятков и единиц, сверху или слева записывается число тысяч, затем знак тысячи, число сотен, знак сотни, число десятков, знак десятков и, наконец, число единиц. Если какой-нибудь разряд отсутствует, он пропускается. Разряды записываются сверху в низ или слева направо. Первые три иероглифа, очевидно, очевидно, представляют собой изображение одного, двух и трех пальцев, счетных палочек или зарубок. Если мы будем обозначать цифры от 1 до 9 нашими обычными цифрами, а 10, 100, 1000 – римскими цифрами X, C, M, мы можем записать число 1968 год этим способом в виде 1M9C6X8. Видоизменениями этих иероглифов являются китайские коммерческие цифры, приведенные во втором столбце той же таблицы. Арифметические действия в древнем и средневековом Китае производились на счетной доске с помощью счетных палочек. Слово "суань" – "считать" обозначается тем же иероглифом, что и счетная палочка. Счетные палочки делались из бамбука, слоновой кости или металла. Когда были изобретены отрицательные числа, палочки стали делать двух цветов – красные и черные или с различными сечениями – квадратным и треугольным. Палочки раскладывались на счетной доске, которая, как полагают, была разлинована на строки и столбцы. Оно было хорошо заметно благодаря чередованию вертикального и горизонтального положения палочек. В математической литературе эти цифры изображались на бумаге; в этом случае отсутствие разряда указывалось знаком, приведённом в таблице. Таким образом, на счетной доске мультипликативный принцип, на котором была основана иероглифическая запись цифр, оказался не нужным, запись стала позиционной. Однако в отличии от вавилонян, применявших позиционную номинацию и в письме, китайцы пользовались ею только на счётной доске. О счёте с помощью палочек упоминал ещё философ Мэн-цзы (372 – 289 до н.э.). Первым дошедшим до нас письменным свидетельством об этом счёте являются слова математика III в. Сунь-цзы: «В методах, которые употребляются при обычном счёте, прежде всего следует познакомиться с разрядами: единицы вертикально, десятки горизонтальны; сотни стоят, тысячи лежат; тысячи и десятки выглядят одинаково, десятки тысяч и сотни тоже».

Впоследствии на основе счётной доски возник счётный прибор суаньпань, напоминающие русские счёты. Японцы, перенявшие этот прибор у китайцев, называют его "сарабан". Суаньпань представляет собой прямоугольную рамку, в которой натянуты 12 или более параллельных проволок. Перпендикулярно проволокам проведена перегородка, разделяющая рамку на две неравные части. В большем отделении на каждой проволоке нанизано по пять подвижных шариков, в меньшем – по два. Проволоки соответствуют десятичным разрядам, каждый шарик меньшего отделения имеет значение, равное значениям пяти шариков большего отделения на той же проволоки. Дроби у китайцев появились почти одновременно с целыми числами, задолго до отрицательных чисел. Первыми дробями были 1/2, 1/3 и 2/3, называвшиеся "половиной", "малой половиной" и "большой половиной" соответственно (эти названия применялись как в обиходе, так и в математических текстах). Отрицательные числа выделялись на счётной доске палочками другого цвета или другой формы, а при письме записывались другими чернилами или отмечались косой чертой. Для них имелось особое название - "фу", в то время как положительные назывались "чжэн". Числа фу выступали не только как разности двух чисел чжэ, но и как отдельные элементы таблиц коэффициентов.

3.1.9 Индия

Письменных памятников древнеиндийской цивилизации сохранилось очень немного, но, судя по всему, индийские системы счисления проходили в своем развитии те же этапы, что и во всех прочих цивилизациях. На древних надписях из Мохенджо-Даро вертикальная черточка в записи чисел повторяется до тринадцати раз, а группировка символов напоминает ту, которая знакома нам по египетским иероглифическим надписям. В течение некоторого времени имела хождение система счисления, очень напоминающая аттическую, в которой для обозначения чисел 4, 10, 20 и 100 использовались повторения коллективных символов. Эта система, которая называется кхарошти, постепенно уступила место другой, известной под названием брахми, где буквами алфавита обозначались единицы (начиная с четырех), десятки, сотни и тысячи. Переход от кхарошти к брахми происходил в те годы, когда в Греции, вскоре после вторжения в Индию Александра Македонского, ионическая система счисления вытеснила аттическую. Вполне возможно, что переход от кхарошти к брахми происходил под влиянием греков, но сейчас вряд ли возможно хоть как-то проследить или восстановить этот переход от древних индийских форм к системе, от которой произошли наши системы счисления. Надписи, найденные в Нана-Гат и Насике, относящиеся к первым векам до нашей эры и первым векам нашей эры, по-видимому, содержат обозначения чисел, которые были прямыми предшественниками тех, которые получили теперь название индо-арабской системы. Первоначально в этой системе не было ни позиционного принципа, ни символа нуля. Оба эти элементы вошли в индийскую систему к VII–IX вв. вместе с обозначениями деванагари (см. таблицу обозначений чисел). Здесь мы впервые встречаемся с элементами современной системы счисления: индийская система была десятичной, цифровой и позиционной. При желании можно даже усмотреть некоторое сходство в начертании современных цифр и цифр деванагари.

§ 3.2 Математика постоянных величин в VI в. до н.э. – XVI вв.

3.2.1 Формирование математической науки (VI в. до н.э. – VI в. н.э.)

Создание математики как абстрактной дедуктивной науки в Древней Греции. Школа Пифагора. Открытие несоизмеримости и создание геометрической алгебры.

Знаменитые задачи античности. Роль этих задач для развития математики Платон и Аристотель. Мусейон Александрии. Аксиоматическое введение понятия величины у Евдокса. Отношения у Евдокса (вещественное число). Метод исчерпывания и инфинитезимальные методы Евдокса и Архимеда. Архимед – великий учёный Древнего мира. Аксиоматическое построение математики в "Началах" Евклида. Превращение геометрии в дедуктивную систему. Влияние «Начал» на развитие математики. Пятый постулат. Аксиоматика Гильберта. Неевклидовы геометрии. Наука первых веков нашей эры. «Механика» Герона, «Алмагест» Птолемея, его «География». Трансцендентные кривые. Сферическая геометрия Менелая и тригонометрия. Изопериметрические задачи Зенодора. Возникновение буквенной алгебры в сочинениях Диофанта и начало изучения неопределенных уравнений. Связь диофантовых уравнений с рядом проблем теории чисел.

Легенда о Пифагоре. От логистики (практической арифметики) к теоретической арифметике, к теории чисел. Натуральные числа у Пифагора («всё есть число»), фигурные числа, совершенные числа, дружественные числа, отношения (пропорции), связь с определениями рациональных чисел, связь с музыкальными интервалами. Открытие несоизмеримости (одно из доказательств, приписываемых школе Пифагора). Теория делимости. Геометрическая алгебра. Характеристика класса задач, которые можно решать с помощью «геометрической алгебры». Доказательства теоремы Пифагора, ряда алгебраических формул и решение квадратного уравнения методами геометрической алгебры. Аксиома Евдокса-Архимеда. Отношения у Евдокса (вещественное число: от Евдокса до Дедекинда). Легеда о Евдоксе. Знаменитые задачи античности. Роль этих задач для развития математики (механические кривые, конические сечения Аполлония и аналитическая и проективная геометрии). Архимед – великий инженер-изобретатель (его роль в защите Сиракуз). Переписка Архимеда с учеными Александрии (Досифей, Эратосфен). Архимед и его «Псаммит» (исчисление песчинок). «Механические» выводы геометрических формул, используемые Архимедом, зарождение интегрального исчисления. Архимед и число π. Архимед и его формула для объема шара. Легенда о Евклиде. «Начала» Евклида. Легенда о Диофанте. Десятая проблема Гильберта. Связь диофантовых уравнений с рядом проблем теории чисел, с непрерывными дробями.

3.2.2 Античная математика (Система счисления: аттическая и ионическая)

В Древней Греции имели хождение две основных системы счисления – аттическая и ионическая. Аттическая система счисления использовалась греками уже к 5 в. до н.э. По существу это была десятичная система (хотя в ней также было выделено и число пять), а аттические обозначения чисел использовали повторы коллективных символов. Черта, обозначавшая единицу, повторенная нужное число раз, означала числа до четырех. После четырех черт греки вместо пяти черт ввели новый символ Г, первую букву слова «пента» (пять) (буква Г употреблялась для обозначения звука «п», а не «г»). Дойдя до десяти, они ввели еще один новый символ D, первую букву слова «дека» (десять). Так как система была десятичной, грекам потребовались новые символы для каждой новой степени числа 10: символ H означал 100, X – 1000, символ M – 10000.

Вторая принятая в Древней Греции система счисления - ионическая система получила широкое распространение в начале Александрийской эпохи, хотя возникнуть она могла несколькими столетиями раньше, по всей видимости, уже у пифагорейцев. Используя двадцать четыре буквы греческого алфавита и, кроме того, еще три архаических знака, ионическая система сопоставила девять букв первым девяти числам. Другие девять букв – первым девяти целым кратным числа десять; и последние девять символов – первым девяти целым кратным числа 100. Для обозначения первых девяти целых кратных числа 1000 греки частично воспользовались древневавилонским принципом позиционности, снова использовав первые девять букв греческого алфавита, снабдив их штрихами слева. Чтобы отличить числа от слов, греки над соответствующей буквой ставили горизонтальную черту. Первоначально числа обозначались прописными буквами, но позднее сменились на строчные. Ионическая система первоначально не сильно потеснила уже установившуюся аттическую систему исчисления. Официально она была принята в Александрии во времена правления Птолемея и в последующие годы распространилась оттуда по всему греческому миру, включая Аттику. Переход к ионической системе счисления произошел в золотой век древнегреческой математики и, в частности, при жизни двух величайших математиков античности. Есть нечто большее, чем просто совпадение, в том, что именно тогда Архимед и Аполлоний работали над усовершенствованием системы обозначения больших чисел. Архимед, придумавший схему октад, (эквивалентную современному использованию показателей степени числа 10) гордо заявлял в своем сочинении «Псаммит» («Исчисление песчинок»), что может численно выразить количество песчинок, необходимых для того, чтобы заполнить всю известную тогда Вселенную. Изобретенная им система обозначения чисел включала число, которое ныне можно было бы записать в виде единицы, за которой следовало бы восемьдесят тысяч миллионов цифр. Для обозначения дробей греки использовали приемы древних египтян и вавилонян. Египетское влияние в Греции было достаточно сильным, чтобы навязать грекам употребление лишь аликвотных дробей, однако большие вычислительные удобства системы счисления вавилонян побудили живших позднее александрийских астрономов перейти к использованию шестидесятиричных дробей. Переняв систему счисления Древнего Вавилона, греки заменили месопотамскую клинопись своими буквенными обозначениями. Поскольку греки работали с обыкновенными дробями лишь эпизодически, они использовали различные обозначения. Герон и Диофант, самые известные арифметики среди древнегреческих математиков, записывали дроби в алфавитной форме, причем числитель располагали под знаменателем. Но предпочтение отдавалось либо дробям с единичным числителем, либо шестидесятиричным дробям. Областью, в которой практические вычисления испытывали величайшую потребность в точных дробях, была астрономия, а здесь вавилонская традиция была настолько сильна, что шестидесятиричная система обозначений угловых, дуговых и временных величин сохраняется до сих пор.

3.2.3 Математика Индии в V-XVI вв. Ариабхата – «Коперник Востока», Брахмагупта, Бхаскара

Распространение на территории стран ислама. Создание арифметики на основе десятичной позиционной системы счисления, разработка тригонометрии, появление развитой алгебраической символики.

Расцвет индийской математики относится к 5—12 векам (наиболее известны индийские математики Ариабхата, Брахмагупта, Бхаскара). Индийцам принадлежат две основные заслуги. Первой из них является введение в широкое употребление современной десятичной системы счисления и систематическое употребление нуля для обозначения отсутствия единиц данного разряда. Происхождение употреблявшихся в Индии цифр, называемых теперь «арабскими», не вполне выяснено. Второй, ещё более важной заслугой индийских математиков является создание алгебры, свободно оперирующей не только с дробями, но и с иррациональными и отрицательными числами. Однако обычно при истолковании решений задач отрицательные решения считаются невозможными. Вообще следует отметить, что в то время как дробные и иррациональные числа с самого момента своего возникновения связаны с измерением непрерывных величин, отрицательные числа возникают в основном из внутренних потребностей алгебры и лишь позднее (в полной мере в 17 веке) получают самостоятельное значение. В тригонометрии заслугой индийских математиков явилось введение линий синуса, косинуса, синус-верзуса.

Особенно ценный вклад в арифметику внесен индийцами. В этом отношении математика обязана индийцам упорядочением числовой записи при помощи введения цифр для десятичной системы счисления и установления принципа поместного значения цифр. Кроме того, в Индии получило распространение употребление нуля для указания соответствующих разрядных единиц, что тоже сыграло большую роль в усовершенствовании числовых записей и облегчении операций над числами.

Введение нуля, цифр и принципа поместного их значения облегчило вычислительные операции над числами, а потому арифметические вычисления и получили в Индии значительное развитие. Главное преимущество введения индийцами методов записи чисел заключатся в том, что они значительно уменьшили количество цифр, применяли позиционную систему к десятичному счету и ввели в употребление знак нуля. Что касается позиционной системы, её зачатки были еще у вавилонян, но там эта система применялась для шестидесятеричного счета, а индийцы ввели её для десятичного. Процесс записи чисел и проведение арифметических операций над ними делались индийцами на белой доске, засыпанной красным песком. Орудием для записи служила палочка. Таким образом, при записи на красной поверхности появлялись белые знаки, прочерченные палочкой. Письменных памятников древнеиндийской цивилизации сохранилось очень немного, но индийские системы счисления проходили в своем развитии те же этапы, что и во всех прочих цивилизациях. Одной из первых нумераций, применявшихся в Индии, были цифры «кхарошти». Числа «кхарошти» записывались справа налево.

В отличие от цифр кхарошти, цифры брахми записывались слева направо, как индийское письмо. Важным отличием цифр брахми от кхарошти было наличие специальных знаков для чисел от 1 до 9. Эта особенность цифр брахми стала предпосылкой для создания в Индии десятичной позиционной нумерации.

Переход от кхарошти к брахми происходил в те годы, когда в Греции, вскоре после вторжения в Индию Александра Македонского, ионическая система счисления вытеснила аттическую. Вполне возможно, что переход от кхарошти к брахми происходил под влиянием греков, но сейчас вряд ли возможно хоть как-то проследить или восстановить этот переход от древних индийских форм к системе, от которой произошли наши системы счисления. Здесь мы впервые встречаемся с элементами современной системы счисления: индийская система была десятичной, цифровой и позиционной. При желании можно даже усмотреть некоторое сходство в начертании современных цифр.

Позиционная система счисления с нулем возникла не в Индии, поскольку за много веков до этого она использовалась в Древнем Вавилоне. Однако происхождение индийского символа для нуля окутано тайной. Индийская нумерация (способ записи чисел) изначально была изысканной. Несколько видоизменившись, эти значки стали современными цифрами, которые мы называем арабскими, а сами арабы – индийскими.

Очень скоро потребовалось введение нового числа — нуля. Учёные расходятся во мнениях, откуда в Индию пришла эта идея — от греков, из Китая или индийцы изобрели этот важный символ самостоятельно. Первый код нуля обнаружен в записи от 876 г. н. э., он имеет вид привычного нам кружочка. Как ни странно, ни греки, ни индийцы не включили в свои системы счисления десятичные дроби, но именно индийцам мы обязаны современной системой записи обыкновенных дробей с числителем, расположенным над знаменателем. Действия с дробями ничем не отличались от современных.

Письменных памятников древнеиндийской цивилизации сохранилось очень немного, но, судя по всему, индийские системы счисления проходили в своем развитии те же этапы, что и во всех прочих цивилизациях. На древних надписях из Мохенджо-Даро вертикальная черточка в записи чисел повторяется до тринадцати раз, а группировка символов напоминает ту, которая знакома нам по египетским иероглифическим надписям. В течение некоторого времени имела хождение система счисления, очень напоминающая аттическую, в которой для обозначения чисел 4, 10, 20 и 100 использовались повторения коллективных символов. Эта система, которая называется кхароштхи, постепенно уступила место другой, известной под названием брахми, где буквами алфавита обозначались единицы (начиная с четырех), десятки, сотни и тысячи. Надписи, найденные в Нана-Гат и Насике, относящиеся к первым векам до нашей эры и первым векам нашей эры, по-видимому, содержат обозначения чисел, которые были прямыми предшественниками тех, которые получили теперь название индо-арабской системы. Первоначально в этой системе не было ни позиционного принципа, ни символа нуля. Оба эти элемента вошли в индийскую систему к 8–9 вв. вместе с обозначениями деванагари (см. таблицу обозначений чисел). В индийской системе число 6789 записывалось бы как. Здесь мы впервые встречаемся с элементами современной системы счисления: индийская система была десятичной, цифровой и позиционной. При желании можно даже усмотреть некоторое сходство в начертании современных цифр и цифр деванагари.

Позиционная система счисления с нулем возникла не в Индии, поскольку за много веков до этого она использовалась в Древнем Вавилоне в связи с шестидесятиричной системой. Поскольку индийские астрономы использовали шестидесятиричные дроби, вполне возможно, что это навело их на мысль перенести позиционный принцип с шестидесятиричных дробей на целые числа, записанные в десятичной системе. В итоге произошел сдвиг, приведший к современной системе счисления. Не исключена также возможность, что такой переход, по крайней мере отчасти, произошел в Греции, скорее всего в Александрии, и оттуда распространился в Индию. В пользу последнего предположениясвидетельствует сходство кружка, обозначающего нуль, с начертанием греческой буквы омикрон.

3.2.4 Арабская математика

Арабские завоевания и кратковременное объединение огромных территорий под властью арабских халифов привели к тому, что в течение 9—15 веков учёные Средней Азии, Ближнего Востока и Пиренейского полуострова пользовались арабским языком. Наука здесь развивается в мировых торговых городах, в обстановке широкого международного общения и государственной поддержки больших научных начинаний. Блестящим завершением этой эпохи явилась в 15 веке деятельность Улугбека, который при своём дворе и обсерватории в Самарканде собрал более ста учёных и организовал долго остававшиеся непревзойдёнными астрономические наблюдения, вычисление математических таблиц и т. п.

В западноевропейской науке длительное время господствовало мнение, что роль «арабской культуры» в области математики сводится в основном к сохранению и передаче математикам Западной Европы математических открытий древнего мира и Индии. (Так, сочинения греческих математиков впервые стали известны в Западной Европе по арабским переводам.) В действительности вклад математиков, писавших на арабском языке, и в частности математиков, принадлежавших к народам современной советской Средней Азии и Кавказа (хорезмийских, узбекских, таджикских, азербайджанских), в развитие науки значительно больше.

В 1-й половине 9 века Мухаммед бен Муса Хорезми впервые дал изложение алгебры как самостоятельной науки. Термин «алгебра» производят от начала названия сочинения Хорезми «Аль-джебр», по которому европейские математики раннего средневековья познакомились с решением квадратных уравнений. Омар Хайям систематически изучил уравнения третьей степени, дал их классификацию, выяснил условия их разрешимости (в смысле существования положительных корней). Хайям в своём алгебраическом трактате говорит, что он много занимался поисками точного решения уравнений третьей степени. В этом направлении поиски среднеазиатских математиков не увенчались успехом, но им были хорошо известны как геометрические (при помощи конических сечений), так и приближённые численные методы решения. Заимствовав от индийцев десятичную систему счисления с употреблением нуля, математики Средней Азии и Ближнего Востока применяли в больших научных вычислениях по преимуществу шестидесятиричную систему (по-видимому, в связи с шестидесятиричным делением углов в астрономии).

В связи с астрономическими и геодезическими работами большое развитие получила тригонометрия. Аль-Баттани ввёл в употребление тригонометрические функции синус, тангенс и котангенс, Абу-ль-Вефа — все шесть тригонометрических функций, он же выразил словесно алгебраические зависимости между ними, вычислил таблицы синусов через 10.

Научные центры Востока

Научные центры: Багдад, Бухара и Хорезм, Каир, Кордова, Марага, Самарканд и др. Сочетание прикладных и теоретических исследований. Алгоритмические методы на стыке алгебры и геометрии. Ал-Хорезми. Влияние его работ на развитие математики.

Происхождение слов «алгебра» и «алгоритм»

Происхождение слов «алгебра» и «алгоритм». Классификация квадратных уравнений. Омар-Хайям: геометрическая теория кубических уравнений, астрономические исследования, комментарий к евклидовой теории параллельных и отношений. Ал-Караджи и его наука исчисления. Появление разнообразной алгебраической символики.

Выделение алгебры в самостоятельную область математики

Выделение алгебры в самостоятельную область математики. Извлечение корней способом рациональных приближений, связь с десятичными дробями. Вопросы существования решений уравнения с использованием соображений инфинитезимального характера. Формирование тригонометрии в приложениях математики к астрономии. Приближенное решение уравнений, вычислительные методы в геометрии (ал-Бируни, ал-Каши и др.) Теория параллельных. Понятие числа в эпоху становления алгебры в арабской математике.

Ал-Хорезми

Ал-Хорезми. Происхождение слов «алгебра» и «алгоритм». Классификация квадратных уравнений. Ал-Караджи и его наука исчисления. Задачи из области оптики, астрономии и геометрии, приводящие к уравнениям третей и четвертой степени и их исследование. Омар-Хайям – математик и поэт. Табличный символизм, операции над полиномами. Ал-Каши и его «Ключ к арифметике» – энциклопедии математики; его метод последовательного приближения.

3.2.5 Состояние математических знаний в странах Западной Европы и в России в Средние века и в эпоху Возрождения.

Проникновение восточной математики на Запад. Переводы с арабского и греческого, знакомство с греческой математикой. «Книга Абака» и «Практическая геометрия» Леонардо Пизанского (Фибоначчи). Появление университетов, организация преподавания в университетах. Н. Орем. Книгопечатание. Лука Пачоли и его «Сумма арифметики». Решение уравнений третьей и четвертой степени итальянскими алгебраистами (С. Ферро, Н. Тарталья, Дж. Кардано, Л. Феррари). Появление мнимых чисел у Дж. Кардано и Р. Бомбелли. Десятичные дроби и правили арифметических действий с ними у С. Стевина. Развитие алгебраической символики (П. Рамус, Ф. Виет и др.). Отрицательные числа. Развитие понятия числа. Развитие плоской и сферической тригонометрии (Виет, Региомонтан, Н. Коперник).

Италия

При вычислении приближённых значений всегда указывалась погрешность. Написаны Эвклидовы "Начала" и "Арифметика" Диофанта. Составлена таблицы хорд, исполняющие роль наших таблиц синусов (Гиппарх). Первое применение системы координат (Птолемей). Числа Фибоначчи, связь с возвратными последовательностями, с Золотым сечением. Разложение квадратного корня в непрерывную дробь Р.Бомбелли. История, наполненная интригами (о нахождении формул решения уравнений третей и четвертой степени). Решение уравнений третьей и четвертой степени итальянскими алгебраистами (С. Ферро, Н. Тарталья, Дж. Кардано, Л. Феррари). Появление мнимых чисел у Дж.Кардано и Р.Бомбелли.

Дж. Кардано и его «Великое искусство». Зарождение теории вероятностей у Кардано («Книга об игре в кости»: закон больших чисел, комбинаторика). «Необычные» задачи из книги Луки Паччоли из теории игр. История, наполненная интригами (о нахождении формул решения уравнений третей и четвертой степени). Леонардо да Винчи, А. Дюрер. Правило перспективы.

Англия, Шотландия

Ясное понимание природы иррациональных чисел как отношений несоизмеримых величин [английский математик Т. Брадвардин (1-я половина 14 века) и Н. Орем (середина 14 века)] и введение дробных (Н. Орем). Появление Кембриджского и Оксфордского университетов.

Открытие логарифмов (И. Бюрги, Дж. Непер). Джон Непер (англ. John Napier; 1550—1617) — шотландский барон, математик, один из изобретателей логарифмов, первый публикатор логарифмических таблиц. Десятичные логарифмы (Г. Бриггс – Швейцария). Элементы грядущего анализа бесконечно малых при приближенном нахождении логарифмов (идея логарифмической функции Н. Меркатора и ее степенного ряда).

Франция

Указан способ составления уравнений n-й степени, введение отрицательных и нулевых показателей степеней. Первое точное аналитическое выражение числа π в виде бесконечного произведения. Учёные: Виет, Н. Шюке Формирование математической науки (VI в.до н.э. – VI в.н.э.). Знаменитые задачи античности. в средние века и в эпоху Возрождения. Десятичные дроби и правили арифметических действий с ними у С. Стевина. Развитие алгебраической символики (П. Рамус, Ф. Виет и др.). Отрицательные числа. Развитие понятия числа. Развитие плоской и сферической тригонометрии (Виет, Региомонтан, Н. Коперник).

Арифметическая природа числа π (Архимед, Виет, в частности, аналитическое представление в виде бесконечного произведения).

Германия

М. Штифель независимо от Джемшида открыл закон образования биномиальных коэффициентов. Учение о перспективе, развивавшееся в геометрии ещё ранее 16 века, излагается немецким художником А. Дюрером (1525). Книга Симона Стевина "Десятая", после которой в Европе стали использовать десятичные. Формирование математической науки (VI в.до н.э. – VI в.н.э.).

Логарифмы и музыка (Э. Гюнтер).

Вычислительная машина В. Шиккарда.

3.2.6 Математика в странах западной Европы в XVII в.

Математика и задачи практики. Математизация законов природы. Приближенное решение уравнений. Разложение квадратного корня в непрерывную дробь Р. Бомбелли. Открытие логарифмов (И. Бюрги, Дж. Непер). Десятичные логарифмы (Г. Бриггс). Элементы грядущего анализа бесконечно малых при приближенном нахождении логарифмов (идея логарифмической функции Н. Меркатора и ее степенного ряда). Прогресс вычислительной техники: тригонометрические таблицы (использование приема удвоения сторон правильных вписанных и описанных многоугольников), таблицы логарифмов.

3.2.7 Математическая культура в России

Рукописи по геометрии и арифметике, открытие школ для подготовки военных и технических кадров, первые учебники по геометрии, арифметике и тригонометрии. Арифметические рукописи в России в XVI-XVII вв. «Арифметика». Ф. Магницкого.

§ 3.3 Период математики переменных величин в XVII – XIX вв.

3.3.1 Математика XVII в.

Период становления и развития понятий: переменная величина и функция.

Введение в математику идей движения и изменения. Понятие переменной величины и функции. Переписка ученых как средство «экспресс–информации». Первые периодические издания: с 1665 г. – в Лондоне «Philosophical transactions», а с 1682 г. – в Лейпциге «Acta Eruditorum». Начало работы Лондонской и Парижской академий наук. Возникновение аналитической геометрии Декарта и Ферма. Аналитическая геометрия как способ перевода вопросов геометрии на язык алгебры и анализа и как возможность изображения алгебраических и аналитических фактов геометрически. Полное понимание отрицательного числа. Исследование действительных корней уравнения, исследования о максимумах и минимумах и разыскание касательных к кривым. Определение площадей и объёмов «методом неделимых». Обширные и глубокие математические исследования, связанные с механикой и оптикой

(Г. Галилей, И. Кеплер, И. Ньютон, Х. Гюйгенс и Р. Гук). Идея универсальности математического метода (Р. Декарт, Б. Спиноза, Г. Лейбниц). Развитие интегральных методов в трудах Кеплера, Кавальери, Торричели, Валлиса, Ферма, Паскаля и др. Дифференциальные методы в работах Декарта, Ферма, Торричелли, Робервал, Галилея, Паскаля и др. Связь между проблемами квадратур и касательных (Менголи, Д. Грегори, И. Барроу). Создание Ньютоном и Лейбницем интегрального и дифференциального исчисления.

Другие открытия XVII века

Другие открытия XVII века: в теории чисел — формулировка принципа математической индукции (Б. Паскаль) и глубокие исследования П. Ферма, Дж. Валлиса, определившие дальнейшее развитие этой науки; разработка понятий комбинаторики (П. Ферма, Б. Паскаль, Г.В. Лейбниц); предыстория проективной геометрии (Аполлоний, Менелай, Папп, Ж. Дезарг, Б. Паскаль); работы по теории вероятностей (П. Ферма, Б. Паскаль), способствующие открытию простейшей формы закона больших чисел (Я. Бернулли); теория непрерывных дробей (П. Катальди, Д. Швентер, Дж. Валлис, Х. Гюйгенс; метод неопределенных коэффициентов (Р. Декарт); формулировка теоремы Эйлера о многогранниках (Р. Декарт). Построение Б. Паскалем и Г. Лейбницем счётных машин.

3.3.2 Математика XVIII в.

Становление интегрального и дифференциального исчисления в работах Ньютона и Лейбница как самостоятельного раздела математики.

Приложение интегрального и дифференциального исчисления к механике и геометрии. Развитие техники интегрирования. Разработка методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (Г. Лейбниц, И. Бернулли, Н. Бернулли, И. Лагранж, Я. Рикатти, Ж. Даламбер, Я. Бернулли, Х. Гольдбах, Д. Бернулли, Л. Эйлер, Б. Тейлор). Возникновение и развитие дифференциальной геометрии (А. Клеро, Л. Эйлер, Г. Монж, И.Л. Лагранж, И. Ламберт, К. Гаусс, Ф.Г. Миндинг, Р. Бонне, Ж. Френе, Ж. Серре). Создание Петербургской академии наук (Вольф, Лейбниц). И. Бернулли и его ученики. Первые академики – математики Петербургского университета, Леонард Эйлер. Критика исчисления флюксий и исчисления дифференциалов (Ролль. Беркли и др.). Теория компенсации ошибок Карно. Маклорен и метод исчерпывания. Труды Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Г. Монжа, Д. Бернулли, Даламбер – наиболее последовательный в стремлении к логической строгости и отчетливости. Развитие дифференциальной геометрии в работах московских математиков Д.Ф. Егорова, С.П. Финикова, С.С. Бюшгенса, развитие в школе В.Ф. Кагана многомерной тензорной дифференциальной геометрии. Степенные ряды в работах Ньютона, Лейбница, Меркатора, Грегори, Тейлора, Эйлера. Тригонометрические ряды (Эйлер, И. Бернулли, Даламбер, Клеро и др.). Начало теории дифференциальных уравнений с частными производными (Эйлер, Даламбер, Лагранж, Лаплас, Монж).

Полемика по вопросу о понятии функции. Возникновение вариационного исчисления как раздела нового анализа (Эйлер, Лагранж); физические задачи Ньютона, задача о брахистохроне, о геофизических линиях на поверхности (И. Бернулли, Ньютон, Лебниц, Я. Бернулли). Прямые методы и переход к исчислению вариаций. Теория чисел и приобретение ею характера самостоятельной науки, благодаря работам Эйлера, Лагранжа, и Лежандра. Начало аналитической теории чисел. Доказательство иррациональности е (Эйлер), π (М. Ламберт). Делимость многочленов (Ньютон, Эйлер, Э. Безу), попытки доказательства существования корня у алгебраического уравнения (Эйлер, Даламбер). Открытие формулы Тейлора.

Расцвет математики во Франции

Расцвет математики во Франции в эпоху Революции и открытие Политехнической школы. Организация преподавания в Политехнической школе, значительное место математики. Роль Политехнической школы в математическом образовании.

Возникновение и развитие аналитической геометрии. Декарт и его «Геометрия». Работы Валлиса, Лагира, Парана. Алгебраические и трансцендентные кривые. Линии первого и второго порядка в трудах Ферма. Линии третьего порядка у Ньютона. Аналитическая геометрия в XVIII веке (Ж.Ф. Лопиталь, Дж. Стирлинг, А. Клеро, М. Аньези, Г. Крамер и др.). Первое систематическое изложение аналитической геометрии у Эйлера («Анализ бесконечно малых»). Аналитическая геометрия в работах Монжа, Лагранжа, появление термина ««аналитическая геометрия», первые учебные пособия по аналитической геометрии. Кружок учёных, созданный М. Мерсеном (в 1666 году он получил правительственный статут и преобразован в Парижскую академию наук). Р. Декарт. П. Ферма. Б. Паскаль. Их жизнь и творчество. Великая теорема Ферма. Кружок ученых Дж. Уилкинса, получивший наименование Королевского общества. Метод «флюксий» и степенных рядов И. Ньютона. «Исчисление дифференциалов» Г.В. Лейбница. Сопоставление идей и результатов Ньютона и Лебница. Формула Ньютона-Лейбница. Появление дифференциальных уравнений – математических моделей законов природы; переход от алгебры конечного к алгебре бесконечно малых. Л. Эйлер, его жизненный путь. Петербургские периоды его деятельности. Ж.Л. Лагранж – один из выдающихся математиков XVIII – начала XIX вв. Возникновение (Н. Орем, П. Менголи) и развитие теории рядов. Учёный–энциклопедист Ж. Даламбер.

Математика в России. Создание Петербургской академии наук. Леонард Эйлер

С.Е. Гурьев публикует "Опыт об усовершенствовании элементов геометрии". Развитие Эйлером теории дифференциальных уравнений, теории чисел, дифференциально-интегральных исчислений, топологическая задача о семи мостах (о Кёнигсбергских мостах), картография. Даниил Бернулли внёс значительный вклад в развитие математической физики и теории дифференциальных уравнений Леонард Эйлер (1707-1783) — математик, механик, физик и астроном. По происхождению швейцарец.

В 1726 году Леонард Эйлер был приглашен в Петербургскую АН и переехал в 1727 в Россию. Был адъюнктом (1726), а в 1731-41 и с 1766 академиком Петербургской АН (в 1742-66 иностранный почетный член). В 1741-66 работал в Берлине, член Берлинской АН.

Л. Эйлер — ученый необычайной широты интересов и творческой продуктивности. Автор свыше 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и других, оказавших значительное влияние на развитие науки. За время существования Академии наук в России, считается одним из самых знаменитых ее членов.

Леонард Эйлер стал первым, кто в своих работах начал возводить последовательное здание анализа бесконечно малых. Только после его исследований, изложенных в грандиозных томах его трилогии «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление», анализ стал вполне оформившейся наукой — одним из самых глубоких научных достижений человечества.

В 1725 году братья Бернулли были приглашены в члены Петербургской академии наук, недавно основанной императрицей Екатериной I. Уезжая, Бернулли обещали Леонарду известить его, если найдется и для него подходящее занятие в России. На следующий год они сообщили, что для Эйлера есть место, но, однако, в качестве физиолога при медицинском отделении академии. Узнав об этом, Леонард Эйлер немедленно записался в студенты медицины Базельского университета. Прилежно и успешно изучая науки медицинского факультета, Эйлер находит время и для математических занятий. За это время он написал напечатанную потом, в 1727 году, в Базеле диссертацию о распространении звука и исследование по вопросу о размещении мачт на корабле.

В Петербурге имелись самые благоприятные условия для расцвета гения Леонарда Эйлера: материальная обеспеченность, возможность заниматься любимым делом, наличие ежегодного журнала для публикации трудов. Здесь же работала самая большая тогда в мире группа специалистов в области математических наук, в которую входили Даниил Бернулли (его брат Николай скончался в 1726 году), разносторонний Х. Гольдбах, с которым Эйлера связывали общие интересы к теории чисел и другим вопросам, автор работ по тригонометрии Ф.Х. Майера, астроном и географ Ж.Н. Делиль, математик и физик Г.В. Крафт и другие. С этого времени Петербургская Академия стала одним из главных центров математики в мире.

Улучшается его положение в Академии наук: в 1727 году Леонард начал работу в звании адъюнкта, то есть младшего по рангу академика, а в 1731 году он стал профессором физики, т. е. действительным членом Академии. В 1733 году получил кафедру высшей математики, которую до него занимал Д. Бернулли, возвратившийся в том же году в Базель.

В 1735 году академии потребовалось выполнить весьма сложную работу по расчету траектории кометы. По мнению академиков, на это нужно было употребить несколько месяцев труда. Л. Эйлер взялся выполнить это в три дня и исполнил работу, но вследствие этого заболел нервною горячкою с воспалением правого глаза, которого он и лишился. Вскоре после этого, в 1736 году, появились два тома его аналитической механики. Потребность в этой книге была большая: немало было написано статей по разным вопросам механики, но хорошего трактата по механике не имелось.

В 1738 году появились две части введения в арифметику на немецком языке, в 1739 году — новая теория музыки. Затем в 1840 году Леонард Эйлер написал сочинение о приливах и отливах морей, увенчанное одной третью премии Французской академии; две других трети были присуждены Даниилу Бернулли и Маклорену за сочинения на ту же тему.

В конце 1740 года Эйлер был приглашен в Берлин. В Берлине Леонард Эйлер поначалу собрал около себя небольшое ученое общество, а затем был приглашен в состав вновь восстановленной Королевской академии наук и назначен деканом математического отделения. В 1743 году он издал пять своих мемуаров, из них четыре по математике. Один из этих трудов замечателен в двух отношениях. В нем указывается на способ интегрирования рациональных дробей путем разложения их на частные дроби и, кроме того, излагается обычный теперь способ интегрирования линейных обыкновенных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами.

Вообще большинство работ Эйлера посвящено анализу.

Семьдесят пять работ Леонард Эйлер посвятил геометрии. Часть из них хотя и любопытна, но не очень важна. Некоторые же просто составили эпоху, в частности, Эйлера надо считать одним из зачинателей исследований по геометрии в пространстве вообще.

В работе 1752 года «Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями», Эйлер нашел соотношение между числом вершин, ребер и граней многогранника: сумма числа вершин и граней равна числу ребер плюс два.

Занимаясь вопросами о преломлении лучей света и написав немало мемуаров об этом предмете, Эйлер издал в 1762 году сочинение, в котором предлагается устройство сложных объективов с целью уменьшения хроматической аберрации. Английский художник Долдонд, открывший два различной преломляемости сорта стекла, следуя указаниям Леонарда Эйлера, построил первые ахроматические объективы,

В 1765 году Эйлер написал сочинение, где решает дифференциальные уравнения вращения твердого тела, которые носят название Эйлеровых уравнений вращения твердого тела.

Покинув Петербург, Леонард Эйлер сохранил самую тесную связь с русской Академией наук, в том числе официальную: он был назначен почетным членом, и ему была определена крупная ежегодная пенсия, а он, со своей стороны, взял на себя обязательства в отношении дальнейшего сотрудничества. Он закупал для нашей Академии книги, физические и астрономические приборы, подбирал в других странах сотрудников, сообщая подробнейшие характеристики возможных кандидатов, редактировал математический отдел академических записок, выступал как арбитр в научных спорах между петербургскими учеными, присылал темы для научных конкурсов, а также информацию о новых научных открытиях и т.д. В доме Эйлера в Берлине жили студенты из России: М. Софронов, С. Котельников, С. Румовский, последние позднее стали академиками.

Из Берлина Эйлер, в частности, вел переписку с Ломоносовым, в творчестве которого он высоко ценил счастливое сочетание теории с экспериментом. В 1747 году он дал блестящий отзыв о присланных ему на заключение статьях Ломоносова по физике и химии, чем немало разочаровал влиятельного академического чиновника Шумахера, крайне враждебно относившегося к Ломоносову.

Эйлера тянуло назад в Россию. В 1766 году он получил через посла в Берлине, князя Долгорукова, приглашение императрицы Екатерины II вернуться в Академию наук на любых условиях. Несмотря на уговоры остаться, он принял приглашение и в июне прибыл в Петербург.

Еще в 1738 году Леонард Эйлер ослеп на один глаз, а в 1771-м после операции почти совсем потерял зрение и мог писать только мелом на черной доске, но благодаря ученикам и помощникам: И.А. Эйлеру, А.И. Локселю, В.Л. Крафту, С.К. Котельникову, М.Е. Головину, а главное Н.И. Фуссу, прибывшему из Базеля, продолжал работать не менее интенсивно, чем раньше.

Эйлер, при своих гениальных способностях и замечательной памяти, продолжал работать, диктовать свои новые мемуары. Только с 1769 по 1783 год Леонард Эйлер продиктовал около 380 статей и сочинений, а за свою жизнь написал около 900 научных работ.

Эйлеровские традиции оказали сильное влияние и на учеников Чебышева: А.М. Ляпунова, А.Н. Коркина, Е.И. Золотарева, А.А. Маркова и других, определив основные черты петербургской математической школы.

§ 3.4 Период современной математики (XIX – XXI вв.)

Расширение предмета математики

Расширение круга прикладных задач естествознания и техники, при исследовании которых используются различные разделы математики. Необходимость логического анализа большого фактического материала и объединение его с новых точек зрения.

3.4.1 Современная алгебра

Некоторые пути формирования новой алгебры. Создание теоретико-групповых методов: начало теории групп в алгебре, в геометрии, в анализе и в математическом естествознании. Ж. Лагранж и его группа подстановок, доказательство неразрешимости в радикалах общего алгебраического уравнения выше четвертой степени (П. Руффини, Н. Абель), условия разрешимости в радикалах алгебраических уравнений любой степени (Э. Галуа, группы Галуа). Группы в работах К. Гаусса. по теории чисел. Общее определение группы у А. Кели. К. Жордан об использовании конечных групп в теории чисел, теории функций и геометрии. Теоретико-групповая классификация типов геометрий у Ф. Клейна. Непрерывные группы С. Ли и проблема интегрирования дифференциальальных уравнений. Топологические группы (Ван Данциг, А. Пуанкаре). Развитие теории групп в XX веке (Л.С. Понтрягин, Е. Картан, Г. Вейль и др.). Становление теории полей, колец, и других алгебраических структур и их тесное взаимодействие с другими математическими дисциплинами, приведшее к формированию алгебраической теории чисел, алгебраической геометрии, алгебраической топологии, теории алгебраических функций. Использование групп в кристаллографии (Е.С. Фёдоров, А. Шенфлис) и в квантовой физике (де Бройль, Е. Шреденгер, Дирак и др.). Проблема Д. Гильберта и её решение

Л.С. Понтрягиным. Формирование линейной алгебры. Кватернионы и гиперкомплексные числа (У.Р. Гамильтон, Г. Грассман, Г. Фробениус). Аксиоматизация алгебры (Дж. Булль, Р. Дедекинд, Д. Гильберт, Э. Нетер, Э. Артин, О.Ю. Шмидт, А.Г. Курош). Новый подход к предмету алгебры – множества с аксиоматически заданными на них алгебраическими операциями.

3.4.2 Геометрия. Разработка аксиоматического метода всей геометрии

Неевклидова геометрия Н.И. Лобачевского (Россия), Я. Бойяи (Австро-Венгрия), К. Гаусса (Германия). Изменение взгляда на природу пространства. Вопрос о непротиворечивости неевклидовой геометрии, её интерпретации (Е. Бельтрами «Опыт истолкования неевклидовой геометрии»; Ф. Клейн «О так называемой неевклидовой геометрии»; А. Пуанкаре – в работе над задачами геометрической теории функций комплексного переменного). Выработка единых принципов классификации геометрических систем, **разработка аксиоматического метода** всей геометрии. Проективная классификация типов геометрий по Ф. Клейну. Геометрия как учение об инвариантах группы преобразований; «Эрлангенская программа» Ф. Клейна и его геометризация математики. Развитие многомерной геометрии (Даламбер, Лагранж, Кели, Г. Гроссман, Э. Бетти, К. Жордан). Формирование векторного и тензорного анализа. Многомерная аналитическая геометрия. Аксиоматика евклидова трёхмерного (М. Паш, Д. Пеано, Д. Гильберт) и n-мерного (Г. Вейль) пространства. Бесконечномерные пространства.

3.4.3 Теория чисел после Эйлера

Теория чисел после Эйлера. Труды Л. Эйлера по теории чисел как источник для позднейших исследований. Общая теория квадратичных форм К. Гаусса; создание теории идеалов Э. Куммером; обобщения сравнений и квадратичного закона взаимности у К. Гаусса, Э. Куммера, Д. Гильберта, завершенные общей формой этого закона у И.Р. Шафаревича и др. Развитие аналитической теории чисел, гипотеза Эйлерао о бесконечности простых чисел в арифметической прогрессии, её решение у Лежандра и Дирихле. Поиски аналитического выражения закона распределения простых чисел: эмпирическая формула Лежандра, формула П.Л. Чебышева. Проблема Римана о расположении нулей дзета-функции. Аддитивная теория чисел, метод производящих функций в работах Эйлера, И.М. Виноградова, Г. Харди, Дж. Литлвуда. Задача Е. Варинга и её исследование Лагранж, Гильберт, Харди, Литлвуд, Виноградов). Создание метода тригонометрических сумм И.М. Виноградовым, доказательство им одной из проблем Гольдбаха. Применение аппарата непрерывных дробей при доказательстве трансцендентности чисел **е** (Ш. Эрмит) и **π** (Ф. Линдеман). Проблема Гильберта об арифметической природе алгебраической степени алгебраического числа, и её решение А.О. Гельфондом. Работы К. Гаусса по теории чисел, их роль для понимания теории чисел как строгой теории, задачи которой побуждают к развитию новых и тонких методов анализа (особенно комплексного), алгебры и геометрии. Совершенство теории чисел в конце 19 в. и в 20 в.: Основы современной алгебраической теории чисел (Э. Куммер, Л. Кронекер, Р. Дедекинд, Е.И. Золотарёв, Д. Гильберт), Ж. Адамар и Ш. Ла Валле-Пуссен завершают исследования Л.П. Чебышева о законе убывания плотности расположения простых чисел, геометрические методы Г. Минковского, значителен вклад в теорию чисел работ российских (А.Н. Коркин, Г.Ф. Вороной, А.А. Марков) и советских (И.М. Виноградов, Л.Г. Шнирельман, Б.Н. Делоне, А.О. Гельфонд и др.) математиков.

3.4.4 Реформа анализа

Реформа анализа в трудах О. Коши, Б. Больцано, Н. Абеля, К. Гаусса и К. Вейерштрасса. Понятие предела Б. Больцано и О. Коши как основной операции математического анализа; понятие бесконечно малой величины, непрерывности суммы ряда, производной, дифференциала и интеграла на основе понятия предела (О. Коши). Построение фундамента для работ по обоснованию анализа; построение теории вещественных чисел (Р. Дедекинд, Г. Кантор и К. Вейерштрасс), публикация основных работ Кантора по теории бесконечных множеств. Современное изложение начал математического анализа с точными формулировками и доказательствами на языке «ε – δ» у К. Вейерштрасса. Вопросы сходимости рядов (К. Маклорен, Ж. Даламбер, К. Гаусс, Б. Больцано, О. Коши, Н. Абель, П. Дирихле, О. Бонне, Б. Риман, Й. Раабе, Э. Куммер, Н. Лобачевский, Ж. Бертран, В.П. Ермаков). Равномерная сходимость рядов (Дж. Стокс, Л. Зейдель, К. Вейерштрасс). Разложение функции в тригонометрический ряд, коэффициенты Фурье (Ж. Фурье, Л. Дирихле). Интегралы Римана и Дарбу, классы интегрируемых функций (Б. Риман, Г. Дарбу, Г. Асколи, Г. Смит и П. дю Буа-Реймон, Г. Лебег).

3.4.5 Уравнения математической физики

Парижская и Петербургская научные школы (С. Пуассон, И. Фурье, О. Коши, В.Я. Буняковский, М.В. Остроградский, В.А. Стеклов). Школы Германского союза (Л. Дирихле, Б. Риман, Ф. Нейман, их ученики, К. Гаусс в сотрудничестве с Г. Вебером, Г. Шварц, Д. Гильберт, Р. Курант). Ученые Англии (Дж. Грин, Г. Стокс, У. Томсон, В.Р. Гамильтон, Дж. Максвел). Французские математики (А. Пуанкаре, Э. Пикар, Э. Гурса, Ж. Адамар). Оператор Лапласа, гармонические функции, формула Гаусса-Остроградского. Задачи Дирихле, К. Неймана. Теория потенциала, теория обратных задач потенциала, способствовавшая появлению нового раздела математики –

теории некорректных задач. Математическая теория теплопроводности. Ж.Б. Фурье. Ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье (Дирихле, Лобачевский, Риман др.) Уравнение колебания струны и его решение (Тейлор, И. Бернулли, Д. Бернулли, Даламбер, Эйлер). Математический аппарат механики. Велик вклад российской школы в области уравнений математической физики (А.М. Ляпунов. В.А. Стеклов, С.Н. Бернштейн, Н.М. Гюнтер, А.Н. Крылов, В.И. Смирнов, И.Г. Петровский, М.А. Лаврентьев, М.В. Келдыш, Л.С. Соболев, А.Н. Тихонов и др.).

3.4.6 Теория дифференциальных уравнений

Задача Коши, теоремы существования и единственности Коши, С.В. Ковалевская, Е. Пикар). Внедрение в теорию дифференциальных уравнений теоретико-групповых представлений (С. Ли, А. Пуанкаре) и создание качественных методов (топологические методы А. Пуанкаре, теория устойчивости А.М. Ляпунова). Теория динамических систем. Вклад математиков России в развитие теории дифференциальных уравнений (О.В. Ковалевская, В.А. Стеклов, А.Н. Крылов, А.М. Ляпунов, В.В. Степанов, Н.Н. Боголюбов, И.Г. Петровский и др.).

3.4.7 Топология

Начало «комбинаторных», «гомологических» и «гомотопических» методов в работах Р. Римана и А. Пуанкаре; их разработка Л. Брауэром, О. Вебленом, Дж. Александером, С. Лефшетцем, Г. Хопфом. Построение теории общих топологических пространств (М. Фреше, Ф. Хаусдорф, П.С. Урысон, П.С. Александров, А.Н. Тихонов, Л.С. Понтрягин); применение топологических методов в анализе (Г. Биркгоф, М. Морс, Ю. Шаудер, Л.А. Люстерник).

3.4.8 Формирование теории функций комплексного переменного

Вхождение в математику мнимых и комплексных объектов (Р. Бомбелли, Г.В. Лейбниц, И. Бернулли); уравнения гидродинамики Даламбера-Эйлера; формулы Эйлера для показательной и логарифмической функций от комплексного аргумента, связь с тригонометрическими функциями; решение Эйлером задачи о конформном отображении областей сферы на плоскость; введение основных понятий – геометрическая интерпретация комплексного числа, интегрирование по комплексной переменной (Гаусс, Лаплас, Пуассон), теорема Коши, понятие вычета и теория вычетов, интегральная формула Коши. Ряд Р. Лорана. Формирование теории аналитических функций, краевые задачи, принцип Дирихле. Геометрическая теория аналитических функций: Риманова поверхность, конформные отображения. Дзета-функция Римана (гипотеза Римана) и аналитическая теория чисел. Развитие теории функций комплексного переменного (через степенные ряды) в работах К. Вейерштрасса – идеи аналитического продолжения, изучение конкретных классов функций. Аналитическая теория функций комплексного переменного, целые и мероморфные функции (К. Вейерштрасс, С.В. Ковалевская, М. Миттаг-Леффлер, Ш. Эрмит, Э. Пикар, Э. Лагерр, А. Пуанкаре). Работа Ж. Адамара об аналитическом продолжении и корректность по Адамару. Работы А. Пуанкаре, Ф. Клейна и Р. Кёбе о связи геометрии Лобачевского с римановыми поверхностями, о значении неевклидовой геометрии в изучении этих поверхностей и свойств связанных с ними аналитических функций. Работы Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина и их приложения в аэро- и гидродинамике. Специальные функции: модулярные функции Эрмита, автоморфные Клейна и Пуанкаре, алгебраические Абеля и Якоби, функции Л. Шварца. Связь теории функций комплексного переменного с другими разделами математики через внесение в неё понятий из теории множеств, из теории функций действительного переменного, теории групп и топологии, которые подверглись глубокому логическому анализу и уточнению.

3.4.9 Теория функций действительного переменного

Теория функций действительного переменного как результат систематического построения математического анализа, глубже и шире изучающая общие определения и понятия анализа бесконечно малых – предел, топология числовой прямой, функция, интеграл, дифференциал : понятие меры множества, интеграл Лебега, проблема восстановления функции по её производной, переход к пределу под знаком интеграла, разложение функции в тригонометрические ряды и др. Основы современной теории функций действительного переменного в работах французских математиков (К. Жордан, Э. Борель, Г. Лебег, Р. Бэр, П. Леви). Ведущее значение в этом разделе математики исследований российской школы, созданной Д.Ф. Егоровым и особенно Н.Н. Лузиным. Виднейшие представители этой школы: Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин, П.С. Александров, М.Я. Суслин, И.И. Привалов, Н.К. Бари, А.Н. Колмогоров и др. Вклад в теорию функций действительного переменного и теорию множеств польской школы В. Серпинского. П.Л. Чебышев и созданная им, исходившая из запросов теории механизмов, теория наилучших приближений. С.Н. Бернштейн и конструктивная теория функций, в которой ведущее место принадлежит российским исследователям. Теория приближения XX века, пополнившаяся большим числом интересных, оригинальных работ, как самостоятельный раздел математики (П.Л. Чебышев, братья А.А. и В.А. Марковы, А.И. Коркин, Е.И. Золотарёв, Л.В. Гончаров, С.Н. Бернштейн, Н.К. Бари, Д.Е. Меньшов, А.Н. Колмогоров, С.М. Никольский, С.Б. Стечкин, П.Л. Ульянов, Н.П. Корнейчук, В.М. Тихомиров, П.П. Коровкин, В.К. Дзядык, Н.И. Ахиезер, братья М.Ф. и А.Ф. Тиманы, Н.П. Купцов и др.). Влияние теории функций действительного переменного на другие разделы математики и её роль в приложениях. Уральская школа теории приближения (С.Б. Стечкин и его ученики).

3.4.10 Развитие функционального анализа

Становление и развитие **функционального анализа**, влияние теории функций действительного переменного и теории множеств на его методы. Взаимосвязь функционального анализа с классическим анализом, вариационным исчислением (задачи на максимум и минимум функционалов), с математической физикой (через теорию операторов – интегральные уравнения В. Вольтерра и Э. Фредгольма). Теория бесконечномерных пространств (в частности, пространств С. Банаха) и операторов в них, пространства и операторы Д. Гильберта, сингулярные интегральные уравнения Н.И. Мусхелишвили. Изучение общих вопросов функционального анализа (Ф. Рис, Дж. Нейман, Н. Данфорд, Дж. Т.П. Халмош, М.А. Наймарк, Л. Шварц, С. Банах, Д. Гильберт, работы под псевдонимом Н. Бурбаки, И.М. Гельфанд, Л.В. Канторович, М.А. Лаврентьев, С.Л. Соболев, М.К. Крейн и др.). Использование методов функционального анализа в различных разделах математики и её приложений. Теория некорректных задач, теория обобщенных функций, и т.п.

3.4.11 Вычислительная математика

Вычислительная математика. Выделение самостоятельной ветви математики – **численные методы** анализа. Численное интегрирование дифференциальных уравнений (метод Дж .Адамса-К. Штёрмер, метод К. Рунге, метод последовательных приближений, обоснованный Е. Пикаром, метод С.А. Чаплыгина, метод С.А. Гершкорина, метод В. Ритца, получивший развитие в работах Б.Г. Галёркина и М.В. Келдыша и др.). Роль А.Н. Крылова в развитии всех направлений в области численных методов в СССР. Связь численных методов анализа с функциональным анализом (Л.В. Канторович). Математические таблицы, «теория табулирования». Использование ЭВМ, теория программирования.

3.4.12 Создание теории вероятностей. Создание математической статистики

Создание **теории вероятностей**. Предыстория понятия вероятности и случайного события (Д Кардано, Н. Тарталья, Г. Галилей, Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс и др.). Бурный рост статистических концепций в различных областях естествознания, неизбежность привлечения методов теории вероятностей в приложениях от теории артиллерийской стрельбы и теории ошибок до развития статистической физики и механики и разработки аппарата математической статистики). Формирование основ теории вероятностей (Я. Бернулли, А. Муавр, П. Лаплас, Т. Байес, К. Гаусс, С. Пуассон и др). Статьи М.В. Остроградского и В.Я. Буняковского по теории вероятностей и математической статистике, первый учебник по теории вероятностей В.Я. Буняковского. Глубокие теоретические исследования по общим вопросам теории вероятностей в работах русской школы (П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов): вопрос об условиях применимости центральной предельной теоремы. Работы Р. Мезиса. Э. Бореля, П. Леви, В. Феллера и др.). Фундаментальные работы С.Н. Бернштейна, завершившего работы чебышевской школы и начавшего целый ряд теоретических и прикладных направлений, в частности по формально-логическому обоснованию теории вероятностей. Исследования школы В.И. Романовского в Ташкенте (математическая статистика, цепи Маркова в теории интегральных уравнений). Создание А.Н. Колмогоровым, А.Я. Хинчиным и др. основ теории «случайных» процессов и ассимптотическое изложение теории вероятностей, исходящее из усмотренных впервые Борелем аналогий между понятием вероятности и и понятием меры в теории функций действительного переменного. Теория случайных процессов: А.К. Эрланг (математическая теория загрузки информационных сетей; В. Вольтерра (математическая биология – динамика развития биологических популяций); А. Эйнштейн (броуновское движение на основе теоретико-вероятностных предпосылок); теория моделей Н.Винера. Основополагающие работы А.А. Маркова, Е.Е. Слуцкого, А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина. Московская школа теории вероятностей. Возрастание значения статистических исследований, введение статистических методов в ряд наук – биометрика, эконометрика. Создание **математической статистики** в тесной связи с теорией вероятностей.

3.4.13 Дискретная математика

Возрастающая роль **дискретной математики** в её приложениях – автоматы и автоматические линии, схемы оптимальной организации производственных процессов, электронные платы, транспортные потоки, системы связи и управления, коды и другие средства защиты информации, ЭВМ на принципах дискретного счёта. Разработка соответствующих математических моделей (графы, матрицы, блоксхемы, производящие функции, дискретно-геометрические построения, специальные схемы логических высказываний и т.п. Период накопления конкретных комбинаторных результатов: фигурные числа (с 19 века – графы), магические квадраты, биномиальные теоремы, арифметический треугольник (Пифагор, Диофант, Ферма, Декарт и др.). Первые теоретические построения, идеи общей комбинаторной теории (Г.В. Лейбниц), К.Ф. Гинденбург), связь с вероятностными задачами, теорией чисел и алгеброй. Комбинаторика в работах Л. Эйлера (задачи о разбиениях чисел, о паросочетаниях, о числовых квадратах, циклические расстановки с выбыванием, задача о мостах в г. Кенигсберге). Комбинаторный анализ К.Ф. Гинденбурга и его последователей: попытка построения общей комбинаторной теории, построены алгоритмы работы с комбинаторными комплексами, использование комбинаторных методов в теории рядов и последовательностей, в работе с непрерывными дробями. Дискретные методы математического исследования в XIX веке: задачи о встречах, задачи о гостях, теория разбиений и метод производящих функций, развитие теории графов (проблема анализа химических соединений, задача о 4 красках), создание основ алгебраической топологии. Таблично-матричный и схемный аппарат, его связь с теорией конечных групп, конечных геометрий и его применение (И. Вейраух. А. Кели, Дж. Сильвестр, Т. Симпсон, И.Б. Листинг, У.Р. Гамильтон, Т.П. Киркман, К. Жордан, Д. Пойа, Ю.Х. Петерсен, А. Пуанкаре. Построение в XX веке общих комбинаторных теорий: Е. Нетто и его «Lehrbuch der Combinatorik» с дополнениями 1927 года (Вигго Брун, Туральд Теодор, Альберт Сколем). Комбинаторика Мак Магона, симметрические функции, теория инвариантов. Графовые интерпретации общей комбинаторной теории, теория графов как самостоятельная важная часть математики, аналогии между графами и структурами векторного пространства; образование, развитие и применение структуры «матроид» (Д. Кёниг, Д. Пойа, Веблен Освальд, Уитни).

§ 3.5 Вопросы обоснования математики

3.5.1 Роль теории множеств и математической логики

Парадоксы оснований: парадокс Кантора, парадокс Рассела; аксиоматическая теория множеств и разрешение известных парадоксов.

Теоретико-множественная концепция строения математических теорий. Необходимость логического обоснования теории бесконечных множеств. Общее понятие равномощности у Г. Галилея. Потребности анализа (в частности, теории функций действительного переменного), формировавшие предмет математической логики и теории множеств. Г. Кантор – создатель теории множеств (работы о тригонометрических рядах и «исключительные» множества, «производные множества»; канторовский способ определения действительных чисел; проблемы равномощности, теория совершенно упорядоченных множеств, топологические свойства пространств и проблема меры). Кардинальные числа и «проблема континуума» (наряду с Кантором Ф. Бернштейн, Е. Цермело), принцип трансфинитной индукции (К. Куратовский, Цорн). Работы Дедекинда по упорядоченным множествам, решеткам, первые примеры тщательного аксиоматического построения. Роль Д. Гильберта в распространении идей Г. Кантора. («Никто не сможет изгнать нас из рая, созданного для нас Кантором»). Парадоксы оснований: парадокс Кантора, парадокс Рассела; аксиоматическая теория множеств и разрешение известных парадоксов. Некоторые варианты аксиоматизации теории множеств (система Цермело-Френкеля, система фон Неймана, Бернайса, К. Гёделя). Логические средства развития математических теорий. Вопросы логики у Э. Бореля, Р. Бэра, Ж. Адамара, А. Лебега. Формальная логика и интуиционистская логика (Брауэр). Разрешимые и неразрешимые алгоритмические проблемы. Логика предикатов и её законы; теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности и её приложения. Теорема Гёделя о неполноте арифметики и программа формализации Гильберта.

§ 3.6 Математика в России (обзор)

Математические знания до XVII в. Реформы Петра I. Основание Петербургской Академии наук и Московского университета. Петербургская математическая школа (М.В. Остроградский, П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов). Основные направления творчества Чебышева. Жизнь и творчество С.В. Ковалевской. Организация математического общества. Математический сборник. Первые научные школы в СССР. Московская школа теории функций (Н.Н. Лузин, Д.Ф. Егоров и их ученики). Математика в Московском университете. Математика в Уральском университете, Уральские математические школы (П.Г. Конторович. Г.И. Малкин, Е.А. Барбашин, В.К. Иванов, С.Б. Стечкин, А.Ф. Сидоров, Н.Н. Красовский).

§ 3.7 Изменение структуры математики и её приложений с появлением ЭВМ

Выход на передний план дискретных методов математического исследования. Значение машинной математики для дискретных методов: облегчение переборов ситуаций и подсчёт вариантов решений, при решении комбинаторных задач экстремального типа, изучение сложных систем, постановка новых перспективных проблем. Активные исследования комбинаторного характера во второй половине XX века (Дж. Риордан, К. Берж, М. Холл, Г.Дж. Райзер, К.А. Рыбников, В.Н. Сачков и др.). Появление новых разделов дискретной математики: математическая теория кодирования, теория сетей, целочисленное программирование, теория автоматов и ряд других направлений.

Раздел IV Некоторые вопросы методологии и истории математики

§ 4.1 Предмет математики

Ф. Энгельс о предмете математики. Выделение количественных отношений и пространственных форм, присущих всем, независимо от их вещественного содержания, объектам и отношениям действительного мира. Расширение и уточнение предмета математики в процессе её исторического развития, связанное с включением новых форм и отношений. Количественные отношения и пространственные формы в свете сегодняшнего состояния математики.

§ 4.2 Понятия и определения

Понятие как совокупность (существенных) признаков предмета (явления), мыслимая как (идеальный) предмет. Основная функция понятия, процесс образования понятия, содержание понятия, объём понятия; пустое, единичное, общее понятия; тождественные, подчинённые, соподчинённые, пересекающиеся; противоположные и противоречащие понятия. Операции над понятиями, образование новых понятий применением операций.

Виды определений. Отличие определений в математике от определений в естественных науках. Требования к определениям (однозначность – синоним, но не омоним, отсутствие порочного круга). Проблема определения первичных понятий. Решение этой проблемы в аксиоматических теориях с помощью аксиом, а в других – с помощью терминов речи и терминов других наук.

§ 4.3 Гипотезы, законы и факты

Стадии развития гипотезы: накопление новых фактов (истинные утверждения, аксиомы, определения и теоремы), формулировка гипотез, выведение из гипотез всех логических следствий, сопоставление следствий с данными эксперимента, превращение гипотезы в теорию или достоверные знания, в закон.

§ 4.4 Методы исследования. Методы математики. Модель

Методы частные, общие и всеобщие. Обобщение, абстракция, анализ, синтез, дедукция, индукция, идеализация, эксперимент, моделирование.

4.4.1 Модель

Классификация моделей: по “материалу”, по способу моделирования (подобные, аналоговые, имитационные), по цели (изучение – проверка), по степени отражения (качественная-количественная). Понятие и закон как модели. Исследовательская триада: эксперимент(наблюдение) – обобщение (гипотеза, закон) – проверка как порождающая процесс: наблюдение – построение модели – исследование модели – интерпретация результатов – проверка. Иерархия моделей. Примеры моделей.

4.4.2 Аксиоматический метод

Аксиоматический метод (проблемы задания аксиом, проверка непротиворечивости). Методы доказательства (метод цепочки импликаций, метод от противного, метод разбора случаев, метод математической индукции) . Частные методы.

4.4.3 Математика «чистая» и «прикладная»

Особенности моделей. Проблемы обоснования математики. Воздействие на Мир.

4.4.4 Освоение научного знания

Создание структуры (выделение основных понятий и связей), особое внимание к базовым понятиям и основным законам, построение примеров для освоения понятий, освоение законов (объектов, связанных с законом, место закона среди других, ближайшие следствия, как был получен, условия применимости). Освоение материала в целом (цель изучения, предмет, основные проблемы, приведшие к развитию, методы, основные факты и приложения, нерешенные проблемы.

Раздел V Математика как учебная дисциплина в вузе и школе

Цели: утилитарная (научить) и общекультурная (изучить); личностно-формирующая (научить: логике рассуждений, доказательности речи, гибкости мышления; прививать навыки самостоятельной, творческой работы, эстетическое чувство).

Система образования в разные исторические периоды.

Отечественные ученые-математики как просветители (П.С. Александров, А.Д. Александров, Б.Н. Делоне, В.И. Смирнов, Б.Д. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, Л.Д. Кудрявцев, Л.Я. Люстерник, И.М. Гельфанд, С.Л. Соболев, Л.С. Понтрягин, В.М. Тихомиров и др.)

Раздел VI Математика и компьютерные науки

§ 6.1 Вехи истории вычислительной техники

Эскизный рисунок суммирующего устройства Леонардо да Винчи. Изобретение логарифмов и логарифмическая линейка. Машина В. Шиккарда (сложение, вычитание, табличное умножение и деление). «Паскалина» Б. Паскаля. «Арифметический прибор» Г.В. Лейбница. Ткацкий станок Ж. Жакара с программным управлением при помощи перфокарт. Гаспар де Прони. Новая технология вычислений: разработка численного метода, составление программы последовательности арифметических действий, проведение вычислений по программе. Ч. Бэббедж и его разностная машина. Самосчёты В.Я. Буняковского, арифмометр В.Т. Однера, арифмометр Чебышева и клавишные вычислительные машины.»машинное» интегрирование дифференциальных уравнений А.Н. Крылова, интегратор И.С. Брука.

§ 6.2 Фрагменты истории развития ЭВМ в России

Фрагменты история развития ЭВМ в России. Разработки С.А. Лебедева и его учеников, их применение (подсчёт орбит малых планет, составление карт по геодезическим съёмкам, создание словарей и программ для перевода и др.). Создание отечественных машин (А.А. Ляпунов, А.П. Ершов, Б.И. Рамеев, М.Р. Шура-Бура, Г.П. Лопато, М.А. Карцев и многие другие), появление персональных компьютеров. Многоплановое использование машин: управление космическими полётами, наблюдение за космическим пространством, в научных работах, для управления технологическими процессами, обработка экспериментальных данных, электронные словари-переводчики, экономические задачи, учительские и ученические машины, бытовые компьютеры и т.п.)

§ 6.3 Фрагменты истории компьютерных наук

Соединение электроники и логики: двоичная система Лейбница, алгебра логики Дж. Буля, абстрактная «машина А. Тьюринга», машины Поста, Маркова. Работы по теории информации и кибернетике К. Шеннона. Полная мера информации по А. Харкевичу. Принцип «необходимого многообразия» по У. Росс Эшби и его гомеостат. Норберт Винер: Кибернетика и общество. «Метод критического пути» М. Уолкер и Дж. Келли. Персептроны Э. Бравермана и Г. Розенблата. Марковские системы. Динамическое программирование и принцип оптимальности Р. Беллмана. Принцип максимума Л. Понтрягина. Линейное программирование Л.В. Канторовича. Теория случайных процессов А.Н. Колмогорова и Н. Винера. Джон фон Нейман: теория автоматов, принципы архитектуры вычислительных машин, в том числе принцип хранения программы в оперативной памяти машины. Первый язык программирования высокого уровня – «Фортран». Алгоритмический язык «Алгол-60». Д. Кнут и его "Искусство программирования". Структурное программирование. Н. Вирт и язык «Паскаль». Объектно-ориентированное программирование. Суперкомпьютеры, параллелизация вычислений. Сети и распределённая обработка информации. «Computer Science» и «информатика». В.М. Глушков, Е.Л. Ющенко, А.А. Летичевский и др. Теоретическая и прикладная информатика. Новые информационные технологии: научное направление – искусственный интеллект и его приложения (использование логических методов доказательства правильности программ, обеспечение интерфейса на профессиональном естественном языке с пакетами прикладных программ и др.)

§ 6.4 История развития числовых систем

6.4.1 Первые числовые системы

Первые числовые системы: Египет, Шумеры, Греция, Рим, Индия, Арабы. Различные подходы к формированию числовых систем. Взаимное влияние числовых систем, доминирующих взглядов на логику доказательного, мировоззренческих концепций и практических потребностей. Числовые системы как неотъемлемая часть семи свободных искусств (тривиум (грамматика, риторика и диалектика) и квадриум (арифметика, геометрия, астрономия и музыка)). Нумерология. Кабала. Кассиодор: свободные искусства и понимание Библии. Магия чисел и Пифагорейская школа. Современные числовые системы. Человек и компьютер: два полюса восприятия числовых систем. Аксиоматика Пеано. Теорема Геделя о неполноте.

6.4.2 Первые геометрические концепции

Первые геометрические концепции. Геометрия и искусство. Витрувий, Альбрехт Дюрер, Леонардо да Винчи, Томас Гоббс: природное восприятие – результат обучения. Прямая и обратная перспектива. Эффект Дюрера черного и белого. Пространственно-временные взаимодействия. Цветные и мультиспектральные пространства. Теорема о цвете: цвет+форма=const.

Алгебры Клиффорда. Аксиоматические системы в геометрии. Геометрия и теория инвариантов. Геометрия в распознавании образов. Понимание природы геометрического восприятия как ключ к построению интеллектуальных систем.

6.4.3 Природа математического открытия

Природа математического открытия. Способен ли компьютер совершить Открытие? Общество и современные интеллектуальные системы. Лаборатория точек зрения: «Интеллектуальные системы будущего». Естественные и искусственные языки. Формализация понятия языка и развитие языковых систем. Синтаксический и лексический анализ. Сложность языка. Системы машинного доказательства. Ошибка как двигатель интеллектуального прогресса. Нуждается ли Человечество в «интеллектуальных революциях». (Если «да», то насколько закономерно их появление? Может ли компьютер моделировать интеллектуальный взрыв?)

6.4.4 Математическая логика и языки программирования

Математическая логика и языки программирования. Лаборатория точек зрения: «Какова она, вселенная великого Алгола?»

6.4.5 Современная теория информации

Современная теория информации: Вершина Творения? Наука? Инструмент? Идеология? «Средство от всех болезней»?

6.4.6 Классическая логика

Классическая логика: фундаментальная основа науки, инструмент в обыденной жизни, мост между человеком и кремниевым компьютером.

6.4.7 Понятие вычислимости

Понятие вычислимости. Тезис Черча. Алгоритмическая разрешимость. Степени неразрешимости. Алгоритмический и философский взгляды на процесс познания. Относительность непознанного и непознаваемого.

6.4.8 Семь проблем математики второго тысячелетия

Семь проблем математики второго тысячелетия. P vs NP. Новая идеология современной компьютерной науки. Артур и Мерлин: модель волшебства с точки зрения информатики? Иерархия классов вычислительной сложности. Сложность по Колмогорову. Константы и потенциальная бесконечность процессов.

§ 6.5 Некоторое видение математики и компьютерных наук в XXI веке

«Математика умерла в XX веке?!» Лаборатория точек зрения: «Математика и компьютерные науки в XXI веке».

6.5.1 Нейронные сети

Естественные и искусственные нейронные сети как прикладная наука, как часть современной математической логики, как инструмент прикладной информатики и как мировоззренческая концепция.

6.5.2 Криптография

Развитие криптографических идей как зеркало информационного поля в человеческом обществе.

6.5.3 Интуиционизм

Интуиционизм. Конструктивизм в математике. Интуиционистская логика. Жизнеспособность компьютерных систем на базе неклассической логики.

6.5.4 Борьба за строгость математики

Борьба за строгость математики. Возникновение парадоксов как стимул развития оснований математики. Герметичность математической теории и научной теории вообще.

6.5.5 Математические парадоксы

Парадоксы теории множеств. Логические парадоксы.

Парадоксы теории вероятностей. Статистические парадоксы. «Закон» – что это такое? Математические законы, физические законы, статистические законы, «законы природы», законы в гуманитарном знании, законы в компьютерных науках.

6.5.6 Нечеткая логика

Мир нечеткой логики. Нечеткая логика и современные компьютерные системы. Нечеткая логика как механизм функционирования социально-экономических систем. Нечеткая логика и конструирование искусственных нейронных сетей.

6.5.7 Квантовый компьютер и биологический компьютер

Биологический компьютер. Модель Адлемана. Компьютер Шапиро. Может ли биологический компьютер решать обычные алгоритмические проблемы? Понятие биологически адаптированной постановки задачи. Молекулярные вычисления и алгоритмически неразрешимые проблемы. Уместно ли говорить о понятии естественного биологического компьютера? Биологические компьютеры и современные религиозные течения.

Сравнительный анализ моделей квантовых и биологических вычислений с точки зрения вычислительной сложности решаемых ими задач.

6.5.8 Internet

Internet: «две чаши весов правосудия: модель искусства будущего, культуры будущего и, наконец, социума будущего – скромная математическая модель». Internet как феномен современной культуры.

Раздел VII Тесты

§ 7.1 Тест № 1 Период накопления начальных математических сведений

Вопрос 1. Дайте правильный ответ. Какую систему счисления использовали в Древнем Вавилоне?

1. Двадцатиричную
2. Шестидесятиричную
3. Двоичную
4. Шестнадцатиричная

Вопрос 2. Дайте правильный ответ. Какая дробь была первой?

1. Обыкновенная
2. Шестидесятиричная
3. Аликвотная
4. Одна вторая

Вопрос 3. Выберите правильные ответы. Каким принципам отвечает египетская нумерация?

1. Аддитивно-мультипликативная
2. Аддитивная

3. Восьмиричная
4. Десятиричная-непозиционная
5. Шестидесятеричная

Вопрос 4. Какой знак был у славян, чтобы отличить цифры от букв?

Вопрос 5. Выберите правильные ответы. Какие источники, дошедшие до нас, позволяют судить о математических знаниях в Индии?

1. Папирус Райнда
2. Московский папирус
3. Сутры
4. Кожанный свиток египетской математики
5. Глиняные таблички
6. Веды

Вопрос 6. Дайте правильный ответ. В какой стране использовали пятеричную систему счисления?

1. Индия
2. Греция
3. Египет
4. Африка

Вопрос 7. Выберите правильные ответы. Какие дроби были у древних вавилонян?

1. Шестидесятиричные позиционные

2. Шестидесятиричные непозиционные
3. Десятиричные непозиционные
4. Десятиричные позиционные
5. Любые обыкновенные

Вопрос 8. Выберите правильные ответы. Какие геометрические фигуры использовались как эталон измерения в Древнем мире?

1. Квадрат
2. Круг
3. Сегменты параболы
4. Овал
5. Прямоугольник

Вопрос 9. Как называется доска, с помощью которой производили расчеты в древности?

Вопрос 10. Дайте правильный ответ. Какая древная цивилизация использовала для изображения цифр горизонтальные и вертикальные клинья?

1. Др.Египет
2. Др.Греция
3. Др.Вавилон
4. Готы

Вопрос 11. Выберите правильные ответы. Какие источники, дошедшие до нас, позволяют судить о математических знаниях в Египте?

1. Папирус Райнда
2. Московский папирус
3. Сутры
4. Кожанный свиток египетской математики
5. Глиняные таблички
6. Веды

Вопрос 12. Дайте правильный ответ на задачу из папируса Райнда.

Куча, ее 1/2, ее 1/4 составляют 10. Определить величину кучи.

1. 50/7
2. 53/2
3. 40/7
4. 40/3

Вопрос 13. Дайте правильный ответ. Как называется ранняя славянская нумерация?

1. Риторическая нумерация
2. Алфавитная нумерация
3. Численная нумерация
4. Никак не называется

Вопрос 14. Выберите правильные ответы. Перечислите основные принципы Римской нумерации.

1. Мультипликативная
2. Непозиционная
3. Субтрактивная
4. Позиционная
5. Аддитивно-субтрактивная

Вопрос 15. Выберите правильные ответы. Какие источники, дошедшие до нас, позволяют судить о математических знаниях в Вавилоне?

1. Папирус Райнда
2. Московский папирус
3. Сутры
4. Кожанный свиток египетской математики
5. Глиняные таблички
6. Веды

Вопрос 16. Дайте правильный ответ. Для какой нумерации характерны следующие черты: аддитивно-позиционная, десятичная нумерация?

1. Арабская нумерация
2. Египетская нумерация
3. Вавилонская нумерация
4. Римская нумерация

Вопрос 17. Что означает в переводе на русский язык слово «геометрия»?

§ 7.2 Тест № 2 Формирование математической науки (VI в. до н.э. – VI в.н.э.)

Вопрос 1. Дайте правильный ответ. Где был основан пифагорейский союз?

1. о.Самос
2. Кротон
3. Рим
4. Афины

Вопрос 2. Дайте правильный ответ. В каком веке жил Диофант?

1. IX в.н.э.
2. V в.до н.э.
3. I в.до н.э.
4. III в.н.э.

Вопрос 3. Выберите правильные ответы. Какими древними математиками характеризуется античная математика?

1. ал-Караджи
2. Пифагор

3. ал-Каши
4. Архимед
5. Евдокс

Вопрос 4. Что пифагорейцы называли множеством единиц?

Вопрос 5. Дайте правильный ответ. Кто впервые ввел буквенную символику?

1. Виет
2. Архимед
3. Диофант
4. Пифагор

Вопрос 6. Выберите правильные ответы. Какие известные произведения принадлежат Архимеду?

1. Исчисление песчинок
2. Начала
3. Арифметика
4. О шаре и цилиндре
5. Псаммит

Вопрос 7. Дайте правильный ответ. Кого называли творцом геометрии?

1. Евклид
2. Пифагор

3. Евдокс
4. Эратосфен

Вопрос 8. Как называется первое дошедшее до нас произведение Евклида?

Вопрос 9. Дайте правильный ответ. В какой период времени жил Евдокс?

1. VI в.н.э.
2. V в.до н.э.
3. XIв. до н.э.
4. VIII в.н.э.

Вопрос 10. Выберите правильные ответы. На какие части делили математику пифагорейцы?

1. арифметика
2. алгебра
3. геометрия
4. астрономия
5. гармония

Вопрос 11. Дайте правильный ответ. Какие числа равны сумме делителей другого числа?

1. Совершенные
2. Четные
3. Фигурные

4. Дружественные

Вопрос 12. Дайте правильный ответ. Что предлагает Диофант в своей Арифметике?

1. Таблицу умножения
2. Первые отрицательные степени
3. Правила умножения степеней неизвестной величины
4. Правила привидения к общему знаменателю
5. Основные правила алгебраических операций(перенос в другую часть уравнения, сокращение равных слагаемых)

Вопрос 13. Дайте правильный ответ. Что лежало в основе изучения математики у пифагорейцев?

1. Геометрия
2. Арифметика
3. Астрономия
4. Гармония

Вопрос 14. Дайте правильный ответ. Какие числа равны сумме своих делителей?

1. Совершенные
2. Дружественные
3. Фигурные-треугольные
4. Фигурные-квадратные

Вопрос 15. Дайте правильный ответ. Какой используется алгоритм для нахождения общей меры двух отрезков?

1. Алгоритм вычитания
2. Алгоритм деления отрезка пополам
3. Алгоритм последовательного умножения
4. Алгоритм попеременного вычитания

§ 7.3 Тест № 3 Математика постоянных величин в VI – XVI вв.

Вопрос 1. Дайте правильный ответ. Благодаря какому китайскому произведению можно судить о математике в Древнем Китае?

1. Начала
2. Арифметика
3. Математика в девяти книгах
4. Исчисление песчинок

Вопрос 2. Выберите правильные ответы. Наиболее значимыми алгоритмами китайской математики являются.

1. Ал-мукабала
2. Фан-чэн

3. Чжэн-фу

4. Тянь-юань

5. Ал-джабр

Вопрос 3. Дайте правильный ответ. Кто первый ученый, отделивший алгебру от арифметики?

1. Брахмагупта

2. О.Хайям

3. ал-Хорезми

4. ал-Каши

Вопрос 4. Выберите правильные ответы. Какими учеными характеризуется математика стран Арабского Халифата?

1. О.Хайям

2. Диофант

3. ал-Бируни

4. Архит

5. ал-Хорезми

Вопрос 5. Дайте правильный ответ. Чем характеризуется метод Фан-чэн?

1. Метод решения системы линейных уравнений

2. метод приближенного решения алгебраических уравнений

3. Метод отрицательных чисел

4. Все вышеперечисленое

Вопрос 6. Что означает «измерение треугольника»?

Вопрос 7. Выберите правильные ответы. С помощью каких приемов решает уравнения ал-Хорезми?

1. Ал-мукабала
2. Фан-чэн
3. Чжэн-фу
4. Тянь-юань
5. Ал-джабр

Вопрос 8. Дайте правильный ответ. В какой период жил О.Хайям?

1. VII-VIII вв.
2. XII-XIII вв.
3. X в.
4. XI-XII вв.

Вопрос 9. Дайте правильный ответ. Что такое «ал-джабр»?

1. Приближенное решение алгебраических уравнений
2. Перенесение отрицательных членов из одной части уравнения в другую
3. Решение систем линейных уравнений
4. Отбрасывание из обеих частей уравнения одинаковых членов

Вопрос 10. Кто является основоположником математической географии, в частности, ввел географические координаты - широту и долготу?

Вопрос 11. Дайте правильный ответ. Что такое «ал-мукабала»?

1. Приближенное решение алгебраических уравнений
2. Перенесение отрицательных членов из одной части уравнения в другую
3. Решение систем линейных уравнений
4. Отбрасывание из обеих частей уравнения одинаковых членов

Вопрос 12. Выберите правильные ответы. Кого из перечисленных людей принято считать крупнейшими индийскими математиками V-XII вв.?

1. ал-Караджи
2. Бхаскара
3. О.Хайям
4. ал-Каши
5. Брахмагупта

Вопрос 13. Дайте правильный ответ. Чем характеризуется метод Тянь-юань?

1. Метод решения системы линейных уравнений
2. метод приближенного решения алгебраических уравнений
3. Метод отрицательных чисел
4. Все выше перечисленное

Вопрос 14. Дайте правильный ответ. В какой период жил ал-Хорезми?

1. VIII-IX вв.
2. VII-VIII вв.
3. XII-XIII вв.
4. X в.

Вопрос 15. Выберите правильные ответы. Чем характеризуется метод Чжэн-фу?

1. Деление отрицательных чисел
2. Сложение отрицательных чисел
3. Умножение отрицательыынх чисел
4. Вычитание отрицательных чисел
5. Все выше перечисленное

§ 7.4 Тест № 4 Состояние математических знаний в странах Западной Европы и в России в средние века и в эпоху Возрождения

Вопрос 1. Дайте правильный ответ. Один из крупных математиков в Западной Европе в XIII в.?

1. Л.Пизанский
2. Н.Тарталья

3. Дж.Кардано
4. Л.Феррари

Вопрос 2. Дайте правильные ответы. Основные свойства в арифметике чисел Фибоначчи.

1. Каждое четвертое делится на три
2. Каждое третье число Фибоначчи нечетно
3. Каждое третье число Фибоначчи четно
4. Каждое пятнадцатое число Фибоначчи оканчивается нулем
5. Все выше перечисленное

Вопрос 3. Дайте правильный ответ. Как называется трактат Л.Пизанского (Фибоначчи)?

1. Арифметика
2. Книга Абака
3. Ключ арифметики
4. Начала

Вопрос 4. Дайте правильные ответы. Кто из итальянских математиков занимался решением кубических уравнений?

1. Л.да Винчи
2. С.Ферро
3. Л.Пачоли
4. Н.Тарталья

5. Дж.Кардано

Вопрос 5. Дайте правильный ответ. Кто открыл десятичные дроби и правила арифметических действий с ними?

1. Ф.Виет
2. Р.Бомбелли
3. С.Стевин
4. Все выше перечисленные

Вопрос 6. Как называли в Западной Европе отрицательное число?

Вопрос 7. Дайте правильные ответы. Что встречается в «Книге Абака» Л.Пизанского впервые?

1. Термин «корень»
2. Признаки делимости на 5
3. Термины плюс и минус
4. Таблица простых чисел до 97
5. Слово «дробь» вместо «ломанное число»

Вопрос 8. Дайте правильный ответ. Кого называют основоположником буквенной символики?

1. Ф.Виет
2. Л.да Винчи
3. Р.Бомбелли
4. Фибоначчи

Вопрос 9. Дайте правильный ответ. Что открыл Р.Бомбелли?

1. Буквенную символику
2. Таблицу простых чисел
3. Десятичные дроби
4. Комплексные числа

Вопрос 10. Кто ввел для обозначения коэффициентов строчные начальные буквы латинского алфавита (a,b,c), для неизвестных же – последние буквы (x,y,z)?

Вопрос 11. Дайте правильный ответ. Кто изобрел вычислительную машину, но только в чертежах?

1. Ф.Виет
2. Л.да Винчи
3. Р.Бомбелли
4. Фибоначчи

Вопрос 12. Дайте правильные ответы. Кто в Западной Европе изучал мнимые числа?

1. Н.Тарталья
2. Р.Бомбелли
3. Л.Феррари
4. С.Ферро
5. Дж.Кардано

Вопрос 13. Дайте правильный ответ. Кто смог решить уравнение четвертой степени?

1. Н.Тарталья
2. С.Ферро
3. Л.Феррари
4. Все вышеперечисленные

Вопрос 14. Дайте правильный ответ. В какой период времени жил Ф.Виет?

1. XV в.
2. XII в.
3. XIX в.
4. XVI в.

Вопрос 15. Дайте правильные ответы. Какие характерные черты буквенной символики Ф.Виета?

1. Коэффициенты - латинские прописные согласные буквы
2. Коэффициенты и неизвестные - прописными согласными буквами латинского алфавита
3. Неизвестные - латинские прописные гласные буквы
4. Неизвестные - последние буквы латинского алфавита
5. Коэффициенты - строчные начальные буквы латинского алфавита

§ 7.5 Тест № 5 Математика в странах Западной Европы в XVII веке

Вопрос 1. Дайте правильный ответ. Кто составил первые логарифмические таблицы?

1. А.Влакк
2. Бриггс
3. И.Бюрги
4. Дж.Непер

Вопрос 2. Дайте правильные ответы. Что лежит в основе таблицы Непера?

1. Прогрессия возрастающая
2. Геометрическая прогрессия
3. Арифметическая прогрессия
4. Прогрессия убывающая
5. Нет правильных ответов

Вопрос 3. Дайте правильный ответ. Кем была осуществлена идея создания десятичного логарифма?

1. Бриггс
2. Дж.Непер
3. А.Влакк
4. И.Бюрги

Вопрос 4. Дайте правильные ответы. Как называет различного вида числа Л.Ф. Магницкий?

1. Персты
2. Сочинения
3. Однозначные числа
4. Суставы
5. Многозначные числа

Вопрос 5. Дайте правильный ответ. Когда были изданы первые тригонометрические таблицы в России?

1. конец XVII в.
2. XV в.
3. начало XVII в.
4. середина XVIII в.

Вопрос 6. Как называли в России число ноль в XVII в.?

Вопрос 7. Дайте правильные ответы. Что можно узнать из книги Л.Ф. Магницкого Арифметика?

1. Употребление алгебраической символики
2. Введение термина корня
3. Действия над многочленами
4. Славянская и арабская нумерация
5. Правила решений многочленов первой и второй степени

Вопрос 8. Дайте правильный ответ. Что такое у Л.Ф. Магницкого персты?

1. Простые многозначные числа
2. Числа из единицы и нуля
3. Однозначные числа
4. Все остальные числа

Вопрос 9. Дайте правильный ответ. Какая используется идея в таблицах Непера?

1. Непрерывность связи между числами и логарифмами
2. Знаменатель прогрессии должен быть дальше единицы
3. Имеются точки разрыва
4. Все выше перечисленные

Вопрос 10. Какой термин ввел Непер?

Вопрос 11. Дайте правильный ответ. Кто заполнил пропуски в таблице десятичных логарифмов Бриггса?

1. И.Бюрги
2. Дж.Непер
3. А.Влакк
4. Сам Бриггс

Вопрос 12. Дайте правильный ответ. Как называются числа, составленные из цифры и нуля у Л.Ф. Магницкого?

1. Низачто

2. Персты

3. Сочинения

4. Суставы

Вопрос 13. Дайте правильные ответы. Где имели применение первые печатные таблицы логарифмов?

1. Астрономия

2. Химия

3. Прикладная математика

4. География

5. Все выше перечисленные

Вопрос 14. Дайте правильный ответ. Как называется книга, которая в начале XVIII в. в России считалась энциклопедией математики?

1. Ключ арифметики

2. Арифметика

3. Начала

4. Книги сошного письма

Вопрос 15. Дайте правильный ответ. Когда вышло первое русское издание Начал Евклида?

1. XII в.

2. XVIII в.

3. XV в.

4. XVII в.

§ 7.6 Тест № 6 Комплексное тестирование. Часть 1

Вопрос 1. Дайте правильный ответ. Кто является автором следующего определения математики:

“Математика - это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира”.

1. Рене Декарт
2. Николя Бурбаки
3. Фридрих Энгельс

Вопрос 2. Дайте правильный ответ. Математическая модель

1. учитывает все свойства и особенности изучаемого объекта
2. учитывает лишь те свойства и особенности, которые будут приниматься во внимание
3. не учитывает существующие, а описывает новые свойства и особенности изучаемого объекта

Вопрос 3. Дайте правильный ответ. Различные утверждения получают из набора аксиом с помощью

1. индуктивного метода
2. дедуктивного метода

Вопрос 4. Дайте правильный ответ. Французский аристократ Гийом Лопиталь (1661—1704) посещал лекции по математике, которые читал

1. Огюстес де Морган
2. Иоганн Бернулли
3. Анри Пуанкаре

Вопрос 5. Дайте правильный ответ. Статью «Математика» в 1-м и 2-м изданиях Большой Советской Энциклопедии написал академик

1. Андрей Николаевич Колмогоров
2. Мстислав Всеволодович Келдыш
3. Владимир Игоревич Арнольд
4. Григорий Яковлевич Перельман

Вопрос 6. Дайте правильный ответ. Цифры используемой нами десятичной системы счисления изначально появились в

1. Древнем Вавилоне
2. Арабском мире
3. Древней Индии
4. Древнем Египте

Вопрос 7. Дайте правильный ответ. Основной идеей, проповедуемой Пифагором и его учениками, была

1. Все в мире есть число
2. Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю
3. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов
4. Нельзя быть математиком, не будучи немного поэтом

Вопрос 8. Дайте правильный ответ. Математиком, благодаря изобретениям которого долгое время удавалось сдерживать Римскую армию, был

1. Аполлоний
2. Архимед

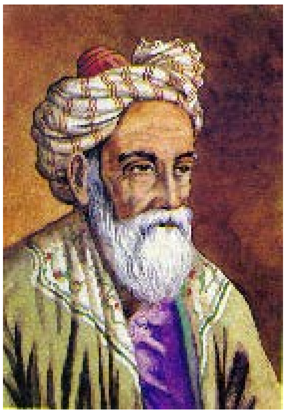
3. Пифагор
4. Эратосфен

Вопрос 9. Дайте правильный ответ. Несоизмеримость длин стороны квадрата и его диагонали в рациональных числах была открыта

1. Архимедом
2. Диофантом
3. Пифагором
4. Евклидом

Вопрос 10. Установите соответствие между именами и портретами

1. Омар Хайям
2. Мухаммед Бен Мусса аль-Хорезми
3. Улугбек



Вопрос 11. Дайте правильный ответ. Числа Фибоначчи впервые были описаны в книге

1. Книга об абаке («Liber abaci») (1202)
2. Божественная пропорция («Divina Proportione») (1509)

3. Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus (1521)

Вопрос 12. Дайте правильный ответ. Длина большего отрезка золотого сечения есть

1. среднее арифметическое
2. среднее геометрическое
3. среднее гармоническое

длин всего отрезка и его меньшей части.

Вопрос 13. Выберите объекты, которые могут иметь форму логарифмической спирали (спирали золотого сечения):

1. раковина улитки
2. циклонический вихрь
3. звездное скопление
4. волюта капители

Вопрос 14. Выберите правильные ответы. Логарифмическую спираль можно построить с помощью

1. решета Эратосфена
2. золотого прямоугольника
3. золотого треугольника
4. золотого семиугольника

§ 7.7 Тест № 7 Комплексное тестирование. Часть 2

Вопрос 1. Выберите правильные ответы. Кто из этих выдающихся российских учёных-математиков, работавших на математико–механическом факультете УрГУ, окончил УПИ?

1. А.Б.Куржанский
2. Ю.С.Осипов
3. Н.Н.Красовский
4. С.Б.Стечкин
5. В.К.Иванов

Вопрос 2. Дайте правильный ответ. Отметьте того математика, который не является прямым учеником П.Л. Чебышева

1. А.М. Ляпунов
2. М.В. Остроградский
3. Е.И. Золотарёв
4. А.А. Марков
5. К.А. Поссе

Вопрос 3. Дайте правильный ответ. О ком Ф. Энгельс сказал: «самая универсальная голова» среди древнегреческих учёных?

1. Архимед
2. Аристотель

3. Евклид

4. Пифагор

5. Евдокс

Вопрос 4. Дайте правильный ответ. Кто из ученых, связанных с корабельной наукой, был крупным математиком и кораблестроителем, возглавлявшим в 1908-1910 годах кораблестроение России?

1. И.Г. Бубнов

2. А.Ф. Иоффе

3. И.П. Колонг

4. А.Н. Крылов

5. С.О. Макаров

6. З.П. Рождественский

Вопрос 5. Дайте правильный ответ. Какой из объектов, названных в честь членов семьи Бернулли, назван в честь Иоганна Бернулли?

1. Дифференциальное уравнение Бернулли

2. Закон Бернулли и Интеграл Бернулли в гидродинамике

3. Лемниската Бернулли

4. Многочлен Бернулли

5. Неравенство Бернулли

6. Распределение и Схема Дернули в теории вероятностей

7. Формула Бернулли

8. Числа Бернулли

Вопрос 6. Дайте правильный ответ. Кто придал теории вероятностей стиль, принятый в современной математике (аксиоматический)

1. С.Н. Бернштейн
2. Э. Борель
3. Б.В. Гнеденко
4. А.Н. Колмогоров
5. А.Я. Хинчин

Вопрос 7. Дайте правильный ответ. Кто из этих учеников Н.Н. Лузина входил в ядро «Лузитании»

1. П.С. Александров
2. А.Я. Хинчин
3. Д.Е. Меньшов
4. А.Н. Колмогоров
5. Л.В. Келдыш

Вопрос 8. Дайте правильный ответ. Кто из этих математиков не был академиком Петербургской Академии Наук?

1. Н. Бернулли
2. Д. Бернулли
3. Г.В. Лейбниц
4. Л. Эйлер

5. С.В. Ковалевская

Вопрос 9. Дайте правильный ответ. Какой период в истории естествознания и математики Ф. Энгельс назвал: «величайший прогрессивный переворот из всех пережитых до того времени человечеством»?

1. 5-6 вв. до н.э.

2. вторая половина 15 века

3. семнадцатый – начало восемнадцатого веков

4. девятнадцатый век

Вопрос 10. Дайте правильный ответ. «Эпоха, которая нуждалась в титанах и породила титанов по силе мысли». Кто из философов так сказал о второй половине 15 века?

1. Г. В. Лейбниц

2. Ф. Энгельс

3. И. Кант

4. Бертран Рассел

5. А. Шопенгауэр

6. А.Ф. Лосев

Вопрос 11. Дайте правильный ответ. « Опыт – сын всякой достоверности. Мудрость – дочь опыта…» Чьи это слова?

1. Л. Пачолли

2. Фома Аквинский

3. М. Монтень

4. Леонардо да Винчи

5. Аристотель

Вопрос 12. Дайте правильный ответ. «Математика – это язык, на котором написана книга природы». Кому из математиков принадлежат эти слова?

1. Аристотель

2. Дж. Кардано

3. Г. Галилей

4. Леонардо да Винчи

5. И. Кеплер

Вопрос 13. Дайте правильный ответ. «Разве ты не заметил, что способный к математике изощрен во всех науках в природе?» Кому из древнегреческих философов могут принадлежать эти слова?

1. Анаксимен

2. Анаксимандр

3. Платон

4. Фалес Милетский

5. Аристотель

Вопрос 14. Дайте правильный ответ. «Науки математические с самой глубокой древности обращали на себя особенное внимание, в настоящее время они получили еще больше интереса по влиянию своему на искусство и промышленность». Эти слова принадлежат выдающемуся российскому математику, труды которого имеют мировое значение, создателю математической школы, автору ряда прикладных результатов. Кому из перечисленных?

1. М.В. Остроградскому

2. А.М. Ляпунову

3. П.Л. Чебышеву

4. А.Н. Крылову

5. Н.Е. Жуковскому

Вопрос 15. Дайте правильный ответ. «Механика – рай математических наук, посредством неё достигают математического плода» – так считал

1. Лука Пачоли
2. Ктесибий
3. Леонардо да Винчи
4. Пьер Симон Лаплас
5. Исаак Ньютон

Вопрос 16. Дайте правильный ответ. Кто был учителем Л. Эйлера

1. Якоб Бернулли

2. Иоганн Бернулли (1667-1748)

3. Иоганн Бернулли (1710-1790)

4. Даниил Бернулли

5. Николай Бернулли

Вопрос 17. Дайте правильный ответ. Почему христиане-фанаты жгли александрийскую библиотеку?

1. Боялись усиления греков

2. Мстили Архимеду за Сиракузы

3. Не признавали никакую науку о природе

4. Так выступали против язычников, не желающих принять христианство

5. В библиотеке хранились рукописи нехристианского содержания

§ 7.8 Ответы на тесты

Тест № 1		Тест № 2	
Вопрос	Ответ	Вопрос	Ответ
1	2	1	2
2	3	2	4
3	2	3	2, 4, 5
4	тильда	4	суть
5	3, 6	5	3
6	4	6	1, 4, 5
7	1, 3	7	1
8	4, 5	8	Начала
9	абак	9	2
10	3	10	1, 3, 5
11	1, 2, 4	11	4

12	3	12	2, 3
13	2	13	4
14	2, 3	14	1
15	5	15	4
16	1		
17	землемерие		

Тест № 3		Тест № 4	
Вопрос	Ответ	Вопрос	Ответ
1	3	1	1
2	2, 3, 4	2	1, 3
3	3	3	2
4	1, 3, 5	4	2, 4, 5
5	4	5	3
6	тригонометрия	6	
7	1, 5	7	5
8	4	8	1
9	2	9	4
10	Эратосфен	10	
11	4	11	1
12	2, 5	12	2
13	4	13	3
14	4	14	1, 4
15	5	15	1, 3, 4

Тест № 5		Тест № 6	

Вопрос	Ответ	Вопрос	Ответ
1	2, 3, 4	1	3
2	2, 3	2	2
3	4	3	2
4	1, 4	4	2
5	3	5	1
6	пусто	6	3
7	4	7	1
8	3	8	2
9	1, 2	9	3
10	логарифм	10	слева 2 в центре 3 справа 1
11	4	11	1
12	3	12	2
13	5	13	1, 2, 3, 4
14	3	14	2, 3
15	2		

Тест № 7	
Вопрос	Ответ
1	1, 3, 5
2	2
3	2
4	4
5	5

6	4
7	1, 2, 3
8	3, 5
9	2
10	2
11	4
12	3
13	3
14	3
15	3
16	3
17	5

Раздел VIII Методические указания для написания рефератов и курсовых работ

§ 8.1 Тематика рефератов

Биографическая серия.

История становления и развития конкретного раздела математики в конкретный период. История становления и развития математики в конкретный исторический период в конкретном государстве.

История возникновения научных центров и их роль в развитии конкретных разделов математики.

История становления и развития компьютерных наук по конкретным временным периодам.

Основоположники некоторых направлений компьютерных наук.

Конкретные выдающиеся ученые и мировая культура в различные периоды.

Из истории российской математики (конкретная историческая эпоха и конкретные личности).

§ 8.2 Примерные темы рефератов

1. Античная механика ("Боевая техника древности").
2. Математика времен Арабского халифата.
3. Основания геометрии: От Евклида до Гильберта.
4. Эварист Галуа – математик и революционер.
5. Замечательный математик Нильс Хэнрик Абель.
6. Энциклопедист 15 века Джероламо Кардано.
7. Великая семья Бернулли.
8. Видные деятели развития теории вероятностей (от Лапласа до Колмогорова).
9. Период предтечи создания дифференциального и интегрального исчисления.
10. Ньютон и Лебниц – создатели дифференциального и интегрального исчисления.
11. Алексей Андреевич Ляпунов – создатель первой вычислительной машины в России.
12. "Страсть к науке" (С.В.Ковалевская).
13. Блез Паскаль.
14. От абака до компьютера.
15. "Уметь дать направление – признак гениальности". Сергей Алексеевич Лебедев. Разработчик и конструктор первого компьютера в Советском Союзе.
16. Гордость российской науки – Пафнутий Львович Чебышев.
17. Франсуа Виет – отец современной алгебры и гениальный шифровальщик.

18. Андрей Николаевич Колмогоров и Павел Сергеевич Александров – уникальное явления русской культуры, ее национальное достояние.
19. Кибернетика: нейроны – автоматы – персептроны.
20. Леонард Эйлер и Россия.
21. Математика в России от Петра I до Лобачевского.
22. Пьер Ферма и Рене Декарт.
23. Как был изобретен персональный компьютер.
24. Из истории криптографии.
25. Обобщение понятия геометрического пространства. История создания и развития топологии.
26. Золотое сечение в музыке, астрономии, комбинаторики и живописи.
27. Золотое сечение в солнечной системе.
28. Языки программирования, их классификация и развитие.
29. Теория вероятностей. Аспект истории.
30. История развития неевклидовой геометрии (Лобачевский, Гаусс, Бойяи, Риман).
31. Король теории чисел – Карл Фридрих Гаусс.
32. Три знаменитые задачи древности как стимул различных разделов математики.
33. Ариабхата, "Коперник востока".
34. Давид Гильберт. 23 проблемы Гильберта.
35. Развитие понятия числа от Евдокса до Дедекинда.
36. Интегральные методы у Евдокса и Архимеда.
37. Вопросы методологии математики. Гипотезы, законы и факты.
38. Вопросы методологии математики. Методы математики.

39. Вопросы методологии математики. Структура, движущие силы, принципы и закономерности.
40. Пифагор – философ и математик.
41. Галилео Галилей. Формирование классической механики.
42. Жизненный путь и научная деятельность М.В.Остроградского.
43. Вклад российских ученых в теорию вероятностей.
44. Развитие математики в России в 18 и 19 столетиях.
45. История открытия логарифмов и их связь с площадями.

Список литературы

Основная литература

Рыбников К.А. История математики. М.: Изд-во МГУ, 1994.

Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М.; Л.: Наука, 1990.

Даан-Дальмедико и Пфейфер. Пути и лабиринты. М.: Мир, 1986.

Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. М.: Наука, 1991.

Марков С.Н. Курс истории математики. Изд.-во Иркутского ун.-та, 1995.

История и методология естественных наук. М.: Изд.-во МГУ, 1974.

Кириллин В.А. Страницы истории науки и техники. (Наука. Мировоззрение. Жизнь). М.: Наука, 1986.

Александров А.Д. Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988.

Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. М.: Физматгиз. 1959.

Хрестоматия по истории математики (под ред. А.П.Юшкевича). М.: Просвещение. 1976-1977.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963.

Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей. Пособие для студентов пед. ин.-тов. Под ред. А.П.Юшкевича. М.: Просвещение, 1977.

Яковлев В.И. Математические начала. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005.

Издания первоисточников

В библиографии к учебнику: Рыбников К.А. История математики. М.: Изд-во МГУ, 1994, стр. 490 – 491.

Историко-математические исследования. М.: ГТТИ-Наука.(с 1948г.).

Диофант. Арифметика. М.: Наука, 1974.

Володарский А.И. Очерки истории средневековой индийской математики. М.: Наука, 1977.

Березкина Э.И. Математика древнего Китая. М.: Наука, 1980.

Симонов Р.А. Кирик Новгородец. М.: Наука, 1994.

П.Ферма. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. М.: Наука, 1992.

Сборник статей. Гаспар Монж. Изд. АН СССР, 1947.

Осипенко И.Н. "Начала" Евклида. М., 1994.

Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии. М., 1965.

Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. 1961.

Литература для написания рефератов

Оре О. Замечательный математик Нильс Генрих Абель. М.: Физматгиз, 1961.

Дальма А. Эварист Галуа. Революционер и математик. М.: Наука, 1984.

Каган В.Ф. Архимед. М.: Гостехиздат, 1949.

Розенфельд Б.А., Рожанская М.М., Соколовская З.К. Абу-Райхан ал-Бируни. М.: Наука, 1973.

Кольман Э.Я. Бернард Больцано. М.: Изд. АН СССР, 1955.

Франкфурт У.И., Френк А.М. Христиан Гюйгенс. М.: Изд. АН СССР, 1962.

Космодемьянский А.А. Николай Егорович Жуковский. М.: Наука, 1984.

Воронцов-Вильяминов Б.А. Лаплас.М.: Наука, 1985.

Прудников В.Е. Пафнутий Львович Чебышев. Л.: Наука, 1976.

Ожигова Е.П. Шарль Эрмит. Л.: Наука, 1982.

Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. М.: Наука, 1981.

Лишевский В.П. Рассказы об учёных. М.: Наука, 1986.

Никифоровский В.А. Путь к интегралу. М.: Наука, 1985.

Яковлев А.Я. Леонард Эйлер. М.: Просвещение, 1983.

Григорьян А.Т. Ковалев Б.Д. "Бернулли Даниил. 1700-1782". М.: Наука, 1981.

Никифоровский В.А. "Великие математики Бернулли" М.: Наука, 1984

Карл Фридрих Гаусс. Сборник статей (ред. И.М.Виноградов).

Бюлер В. Гаус. Биографическое исследование. М.: наука, 1989.

Володарский А.И. "Ариабхата". М.: Наука, 1977

Отрадных Ф.П. Математика XYIII века и академик Леонард Эйлер. М.: Наука.

Рид К. Гильберт. М.: Наука, 1977.

Кочина П.Я. Карл Вейерштрасс. М.: Наука, 1985

Полищук Е.М. Эмиль Борель. Л.: Наука, 1980.

Матвиевская Г.П. Рене Декарт. М.: Наука, 1976.

Добровольский В.А. Василий Петрович Ермаков. М.: Наука, 1981.

Кочина П.Я. Софья Васильевна Ковалевская. М.: Наука, 1981.

Тюлина И.А. Жозеф Луи Лагранж М.: Наука, 1977.

Погребысский И.Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц. М.: Наука, 1981.

Лаптев Б.Л. Н.И.Лобачевский и его геометрия. М.: Просвещение, 1976.

Гутер Р.С. Полунов Ю.Л. Джон Непер. М.: Наука, 1980.

Вавилов С.И. Исаак Ньютон. М.: Наука, 1989.

Гнеденко Б.В., Погребысский И.Б. М.В. Остроградский. М.: 1963.

Кляус Е.М., Погребысский И.Б., Франкфурт У.И. Паскаль. М.: Наука, 1971.

РозенфельдБ.А., Юшкевич А.П. Омар Хайям. М.: 1965.

Булгаков П.Г. и др. Мухаммад ал-Хорезми. М.: Наука, 1983.

Владимиров В.С., Маркуш И.И. Владимир Андреевич Стеклов – учёный и организатор науки.

Гуров С.П., Хромиенков Н.А., Чебышева К.В. П.Л.Чебышев. М.: Просвещение, 1979.

Котек В.В. Леонард Эйлер. М.: Учпедгиз, 1961.

Дополнительная литература

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989

Гнеденко Б.В. Введение в специальность. Математика. М.: Наука, 1991.

Башмакова И.Г. История развития алгебры. М.: Наука, 1996.

Боголюбов А.Н. Механика в истории человечества. М.: Наука, 1978.

Музей компьютерной техники [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://museum/iu4/bmstu/ru/

Математика X1X века. Под ред. А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. М.: Наука, в 3-х томах, 1978, 1981, 1987.

Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. М.: Физматгиз. 1959.

Проблемы Гильберта.М.: Наука, 1969

Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф. За страницами учебника математики. М.: Просвещение, 1996.

Нейгебауэр О. Точные науки в древности. М.: Наука, 1975.

Подкорытов Г.А. О природе научного метода.- Л.: Изд.-во МГУ, 1988.

Юшкевич А.П. История математики в России до 1917года.-М.: Наука, 1968

Яновская С.А. О так называемых "определениях через абстракцию". //Методологические проблемы науки. М.: Мысль, 1972.

Медведев Ф.А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже X1X- XX вв. М.: Наука, 1976.

Медведев Ф.А.Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975.

С.Прохоров. 50 лет отечественной информатике. Computer Weekly №6, 1998.

Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. М.: Мир, 1979.

Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

Гнеденко Б.В. Из истории науки о случайном. М.: Знание, 1981.

Пойа Д. Математическое открытие. М.: Наука, 1976.

Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.

Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России. М.; Л.: Гостехиздат, 1946.

Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины X1X столетия. М.: Физматгиз, 1960.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

Вейль Герман. Математическое мышление. – М.: Наука, 1989.

Пуанкаре А. О науке. М.: Наука. 1983.

Математика в СССР.

Юшкевич А.П. История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961.

Девис М. Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир,1980

Сингх С. Великая теорема Ферма. М.: изд.-во МЦНМО, 2000.

Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? М.: Наука, 1987.

Пойа Д. Как решать задачу? М.: Учпедгиз, 1959.

Журнал "Человек. Компьютер. Будущее".

Яглом И.М. Конечная алгебра, конечная геометрия и коды. М.: Знание, 1980.

Арбиб М. Мозг, машина и математика. М.: Наука, 1968.

Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979.

Серия "Математика, кибернетика".

Гнеденко Б.В. Краткие беседы о зарождении и развитии математики. М:, 1946.

Морозов К.Е. Математические модели в кибернетике. М.: Знание. 1968.

Реньи А. Трилогия о математике. М.: Мир, 1980.

Колмогоров А.Н. О профессии математика. М.: физматгиз, 1960.

Башмакова И.Г. О методе введения новых понятий у Дедекинда. М.: Изд.-во МГУ, 1980.

Грехем Р., Кнут Д., Поташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.

Библиотека "Математическое просвещение". Издательства Московского центра непрерывного математического образования. В частности, цикл популярных лекций по математике для школьников.

Библиотека журнала "Квант".

Яковлев В.И. История классической механики. Пермский ун.-т, 1990.

История математики с древнейших времен до начала X1X столетия. М.:Наука, 1970-1972.

История отечественной математики. Киев: Наукова думка, 1966-1070.

Математика X1X века. М.: Наука, т.1,2.3.

Медведев Ф.А. Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965.

Медведев Ф.А. Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1974.

Цейтен Г. История математики в древности и в средние века. М.-Л.: ГТТИ, 1932.

Цейтен Г. История математики в XYI и в XVII веках. М.-Л.: ГТТИ, 1933.

Делоне Б.Н. Петербургская школа теории чисел М.-Л.: Изд.-во АН СССР, 1947.

Моисеев Н.Д. Очерки по истории механики. Изд.-во МГУ, 1961.

Кудрявцев П.С. История физики. М.: 1996.

Математика на средневековом востоке, Ташкент: Изд.-во "Фан", 1978.

Гиршвальд Л.Я. История открытия логарифмов. М.: Наука, 1981.

Никифоровский В.А. Из истории алгебры. М.: Наука, 1979.

Прудников В.Е. Русские педагоги-математики XVIII-XIX вв., 1956.

Лебедев С.А. Электронные вычислительные машины. М.: Изд.-во АН СССР, 1956.

Гутер Р.С., Полунов Ю.Л. От абака до компьютера. М.: Наука, 1975.

Имитатор машины Тьюринга для Microsoft Windows [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://odin.edu/cs407/matzd/turing/html/

Виртуальный компьютерный музей [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.computer-museum.ru/

Очерки о математике (статья Ж.Дьёдонне: Дело Никола Бурбаки). М.: Знание, 1973.

Вейль Г. Полвека математики. М.: Знание, 1969

Делоне Б.Н. Математика и её развитие в России (стенограмма лекции). М.: Изд-во "Правда", 1948.

Сойер У. Путь в математику. М.: Мир, 1972.

Калужнин Л.А. Основная теорема арифметики. М.: Наука,1969.