Министерство образования Российской Федерации
Уральский государственный университет им. А.М.Горького

К.Н. Гурьянова, С.А. Рогожин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Функции нескольких переменных

Учебное пособие

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2000

УДК 517.55(075.8)
Г959

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Уральского государственного
университета

Гурьянова К.Н., Рогожин С.А. Математический анализ. Функции нескольких переменных: Учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та. 2000. 84 с.

Излагается один из традиционных разделов математического анализа – функции нескольких переменных, включая неявные функции, теорию абсолютного и условного экстремума и замену переменных в дифференциальных выражениях.

Пособие является одной из серий общего пособия по курсу "Математический анализ" для студентов дистантной и заочной формы обучения по специальностям "Информационные системы", "Прикладная информатика", "Математика. Компьютерные науки", а также может быть предложено студентам дневной формы обучения по родственным специальностям.

Рецензенты: кафедра математического анализа Уральского государственного педагогического университета; ведущий научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН доктор физ.-мат. наук В.Т.Шевалдин

ISBN 5-7996-0075-4

Введение

С понятием функциональной зависимости человек сталкивается во многих областях своей деятельности. Многочисленные примеры можно найти в физике, технике, экономике... В математическом анализе понятие функции является основным и изучается с наиболее общей точки зрения.

Пусть даны два множества X и Y. Говорят, что задано *отображение (функция)* на X со значениями в Y, если всякому $x \in X$ по некоторому правилу f поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$. В этом случае используют одну из следующих записей:

$$f : X \to Y; \quad X \xrightarrow{f} Y; \quad y = f(x), x \in X.$$

Если $X \subseteq \mathbb{R}$ и $Y \subseteq \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, то говорят о *числовой функции одной вещественной переменной.* До сих пор, как правило, изучались именно эти функции. Однако многие величины, представляющие интерес и в других разделах математики, и в приложениях, зависят от многих параметров (переменных).

Как и в случае функций одной переменной, изучение функций нескольких переменных начинается с описания множеств величин, то есть областей определения и областей значений отображений.

1. Метрические пространства. Пространства $\mathbb{R}^n$

1.1. Расстояние. Сходимость в метрическом пространстве

Определение 1.1. Пусть E – произвольное непустое множество, а $x, y, z, u, v, \dots$ – его элементы. Это множество называется *метрическим пространством*, если указано правило, по которому каждой паре элементов x, y ставится в соответствие единственное неотрицательное число $\rho(x, y)$, причем

1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Это правило называется *функцией расстояния* (*метрикой*) в E, а $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между x и y.

Метрическое пространство будем обозначать (E, ρ) или E.

Пример 1.1.

1. Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел с $\rho(x, y) = |x - y|$.

2. Любое множество можно превратить в метрическое пространство, задав

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \ne y. \end{cases}$$

Определение 1.2. Пусть $r \in \mathbb{R}$ и $r > 0$, *r-окрестностью* точки $a \in (E, \rho)$ называется множество $O_r(a) = \{x \in E : \rho(x, a) < r\}$.

Пример 1.2. В пространстве $\mathbb{R}$ (см. пример 1.1)

$$O_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < r\}$$

– интервал $(a - r, a + r)$. Если радиус окрестности не указан, то пишут $O(a)$.

Определение 1.3. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ – последовательность точек (элементов) метрического пространства (E, ρ). Эта последовательность называется *сходящейся* в (E, ρ), если $\exists\, a \in E : \ \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$.

Определение 1.4. Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если

$$\exists\, x_0 \in E : \ \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = +\infty,$$

а множество точек $x \in E$, для которых $\rho(x, x_0) > \Delta$, называют *Δ-окрестностью бесконечно удаленной точки* и обозначают $O_\Delta(\infty)$.

Определение 1.5. Пусть (E, ρ) – метрическое пространство. Точка $a \in E$ называется *предельной точкой множества* $M \subseteq E$, если

$$\forall\, O(a)\ \exists\, x \in M, x \ne a : \ x \in O(a).$$

Множество всех предельных точек множества M обозначают M'.

Точка a называется *внутренней точкой множества* M, если $\exists\, O(a) : \ O(a) \subseteq M$.

Множество M называется *открытым* в (E, ρ), если каждая точка M внутренняя.

Часто под окрестностью точки a понимают любое открытое множество, содержащее точку a.

Точка $a \in E$ называется *граничной точкой множества* M, если

$$\forall\, O(a)\ \exists\, x \in M \quad \text{и} \quad \exists\, y \notin M : \ x \in O(a) \quad \text{и} \quad y \in O(a).$$

Множество M называется *замкнутым* в (E, ρ), если $M' \subseteq M$.

Определение 1.6. Множество $M \subset (E, \rho)$ называется *ограниченным*, если $\exists\, O_r(a)$, что $M \subseteq O_r(a)$.

1.2. Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение 1.7. Пусть A и B – произвольные множества. *Декартовым произведением* множеств A и B (обозначают $A \times B$) называется множество пар (a, b), где $a \in A, b \in B$, причем $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$ ($\Leftrightarrow$ означает: тогда и только тогда).

Можно определить

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

– множество упорядоченных наборов из трех элементов $(a, b, c) \in A \times B \times C$, если $a \in A, b \in B, c \in C$.

Если $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$, то это множество обозначается $\mathbb{R}^n$, то есть $\mathbb{R}^n$ – множество всех упорядоченных наборов из n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Каждый набор будем называть *точкой (вектором)* и обозначать одной буквой $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, число x_i называют i-й координатой точки x.

Пример 1.3.

1. $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ – множество вещественных чисел;
2. $\mathbb{R}^2$ – числовая плоскость, в которой задана система координат;
3. $\mathbb{R}^3$ – числовое трехмерное пространство.

Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$.
Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – точки из $\mathbb{R}^n$. Расстояние между ними определим тремя разными правилами:

1. $\rho_0(x, y) = \max\limits_i |x_i - y_i|$.

2. $\rho_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.
3. $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ (евклидова метрика).

Функции $\rho_0(x, y), \rho_1(x, y), \rho_2(x, y)$ являются метриками (см. определение 1.1).

Проверим неравенство треугольника для $\rho_2(x, y)$ (проверка остальных утверждений не представляет особых трудностей и предлагается читателю). Вначале докажем неравенство Коши–Буняковского

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}. \tag{1.1}$$

Пусть $\varphi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2$.

$\varphi(t) \geq 0$; $\varphi(t) = t^2 \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right) + 2t \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2$ – квадратный трехчлен относительно t. Тогда его дискриминант

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0,$$

то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Из этого неравенства следует

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \tag{1.2}$$

– неравенство Минковского. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq$$

$$\le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Теперь покажем, что

$$\rho_2(x,y) \le \rho_2(x,z) + \rho_2(z,y)$$

или

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}.$$

Оно получается из неравенства Минковского (1.2), если взять $a_i = x_i - z_i$; $b_i = z_i - y_i$.

Дальше под $\mathbb{R}^n$ мы будем понимать метрическое пространство с какой-нибудь из указанных метрик.

Лемма 1.1. *Пусть* $\{x^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)\}$ *- последовательность в* $\mathbb{R}^n$ *и* $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. *Тогда если* $a = \lim\limits_{p\to\infty} x^p$ *в* $\mathbb{R}^n$ *с одним из расстояний* (ρ_0, ρ_1, ρ_2), *то* $a = \lim\limits_{p\to\infty} x^p$ *и в* $\mathbb{R}^n$ *с любым другим из расстояний* (ρ_0, ρ_1, ρ_2).

Доказательство. Справедливы неравенства

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \le \sqrt{n}\max_i |x_i-y_i|,$$

то есть

$$\frac{1}{n}\rho_1(x,y) \le \rho_2(x,y) \le \sqrt{n}\rho_0(x,y) \le \sqrt{n}\rho_1(x,y)$$

(попробуйте доказать это самостоятельно!). □

Замечание 1.1. Лемма позволяет в дальнейшем использовать любую из метрик (ρ_0, ρ_1, ρ_2). Все три пространства будем обозначать $\mathbb{R}^n$.

Пример 1.4. Изобразить $O_r(a)$ в $(\mathbb{R}^2, \rho_0)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ и $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$.

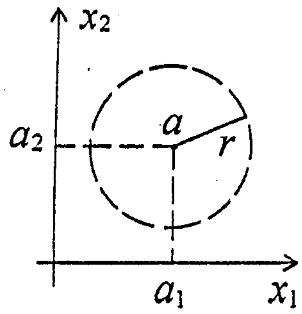

Рис. 1.1.

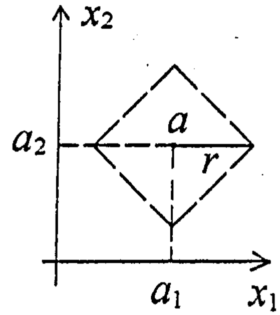

Рис. 1.2.

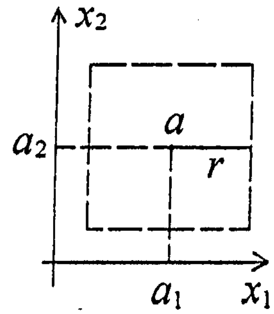

Рис. 1.3.

Ответ:

В $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$: $(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2$, то есть открытый круг с центром в точке a радиуса r (рис. 1.1).

В $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$: $|x_1-a_1| + |x_2-a_2| < r$ - квадрат с центром в точке a, диагонали которого параллельны координатным осям OX_1 и OX_2 и равны $2r$ (без границы) (рис. 1.2).

В $(\mathbb{R}^2, \rho_0)$: $\max\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\} < r$ - квадрат с центром в точке a, стороны которого параллельны координатным осям и равны $2r$ (без границы) (рис. 1.3).

1.3 Топологические свойства $\mathbb{R}^n$

Определение 1.8. Последовательность $\{x^p\}$ называется *фундаментальной* в (E, ρ), если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)\ \forall\, q\ \forall\, p\ (q > N, p > N \Rightarrow \rho(x^p, x^q) < \varepsilon).$$

Теорема 1.1. *Для того чтобы последовательность* $\{x^p\}$ *сходилась в* $\mathbb{R}^n$, *необходимо и достаточно, чтобы сходились* $\{x_i^p\}$ *– последовательности одноименных координат для любого* i. *Причем* $a = \lim\limits_{p\to\infty} x^p \Leftrightarrow a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *где* $a_i = \lim\limits_{p\to\infty} x_i^p$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть последовательность $\{x^p\}$ сходится в $(\mathbb{R}^n, \rho_0)$:

$$\exists\, a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, p\ (p > N \Rightarrow \rho_0(a, x^p) < \varepsilon);$$

$$\rho_0(a, x^p) = \max_i |x_i^p - a_i| < \varepsilon \Rightarrow \forall\, i\ |x_i^p - a_i| < \varepsilon,$$

то есть

$$\forall\, i\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, p\ (p > N \Rightarrow |x_i^p - a_i| < \varepsilon),$$

то есть $\lim\limits_{p\to\infty} x_i^p = a_i$.

Достаточность.

$$\forall\, i\ \exists\, a_i\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_i\ \forall\, p\ \ (p > N_i \Rightarrow |x_i^p - a_i| < \varepsilon)\,.$$

Пусть $N = \max\limits_i \{N_i\}$. Тогда

$$\forall\, p\ \ (p > N \Rightarrow |x_i^p - a_i| < \varepsilon\ \forall\, i) \Rightarrow \max_i |x_i^p - a_i| < \varepsilon,$$

то есть

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, p\ (p > N \Rightarrow \rho_0(a, x^p) < \varepsilon).$$

□

Определение 1.9. Последовательность $\{x^p\}$ называется *ограниченной* в $\mathbb{R}^n$, если существует такая $O_r(a)$, что $\{x^p\} \subset O_r(a)$.

Теорема 1.2. *В пространстве* $\mathbb{R}^n$ *из ограниченной последовательности* $\{x^p\}$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность* $\{x^{p_k}\}$.

Доказательство проведем для $\mathbb{R}^3$.

Последовательность $\{x^p\}$ ограничена, то есть, например, $\{x^p\} \in O_r(b) \subset (\mathbb{R}^3, \rho_0)$, то есть $\exists\, b = (b_1, b_2, b_3)$ и

$$\exists\, r > 0\ \forall\, p:\ \max\{|x_1^p - b_1|, |x_2^p - b_2|, |x_3^p - b_3|\} < r.$$

А это значит, что последовательности $\{x_1^p\}, \{x_2^p\}$ и $\{x_3^p\}$ ограничены.

Из ограниченной числовой последовательности $\{x_1^p\}$ выделим подпоследовательность $\{x_1^{p_k}\}$, которая сходится к a_1. Из $\{x^p\}$ тоже выделим подпоследовательность с этими номерами $\{x^{p_k}\}$. Переобозначим $\{x^{p_k}\}$ как $\{x^k\}$. Из $\{x_2^k\}$ выделим подпоследовательность $\{x_2^{k_l}\}$, которая сходится к a_2. Из $\{x^p\}$ выделим $\{x^{k_l}\}$ и переобозначим ее как $\{x^l\}$. Из $\{x_3^l\}$ выделим $\{x_3^{l_q}\}$, которая сходится к a_3. Подпоследовательность $\{x^{l_q}\}$ сходится к $a = (a_1, a_2, a_3)$, так как

$$\lim_{l_q\to\infty} x_1^{l_q} = a_1, \quad \lim_{l_q\to\infty} x_2^{l_q} = a_2, \quad \lim_{l_q\to\infty} x_3^{l_q} = a_3$$

(см. теорему 1.1). □

Определение 1.10. Метрическое пространство (E, ρ) называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Заметим, что *любая сходящаяся в* (E, ρ) *последовательность является фундаментальной.* Действительно, если последовательность $\{x^p\}$ сходится, то

$$\exists\, a \in E\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)\ \forall\, p\ \left(p > N \Rightarrow \rho(x^p, a) < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Тогда для любых $q > N:\ \rho(x^q, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, то есть $\forall\, p, q$

$$p > N, q > N \Rightarrow \rho(x^p, x^q) \le \rho(x^p, a) + \rho(x^q, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема 1.3. *Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ – полное.*

Доказательство. Пусть $\{x^p\}$ – фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^n$, то есть $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)\ \forall\, p\ \forall\, q$

$$p > N,\ q > N \Rightarrow \rho_0(x^p, x^q) = \max_i\{|x_i^p - x_i^q| < \varepsilon\}.$$

Тогда

$$\forall\, i\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_i(\varepsilon) = N(\varepsilon)\ \forall\, p\ \forall\, q\ (p > N, q > N \Rightarrow |x_i^p - x_i^q| < \varepsilon),$$

то есть $\forall\, i$ последовательность $\{x_i^p\}$ фундаментальна, а тогда из критерия Коши для числовой последовательности следует сходимость последовательностей $\{x_i^p\}$ $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, то есть $\exists\, a_i \in \mathbb{R}$, что $\lim\limits_{p\to\infty} x_i = a_i$, и тогда по теореме 1.1 о покоординатной сходимости следует, что последовательность $\{x^p\}$ сходится. □

Пример 1.5. Пусть $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\rho = |x - y|$. Тогда последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ фундаментальна, но не сходится, так как не существует такого $a \in E$, чтобы $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$.

Замечание 1.2. На $\mathbb{R}$ имеет место принцип вложенных отрезков Кантора. Для $\mathbb{R}^n$ имеет место его аналог, если отрезки, например, заменить замкнутыми прямоугольниками $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Он следует из принципа вложенных шаров (для метрических пространств): для того чтобы метрическое пространство E было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров (замкнутых окрестностей), радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.

2. Предел функции многих (нескольких) переменных

Предел функции – это основа многих построений математического анализа.

В рамках этого параграфа будем считать, что $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ и $f:\ X \to Y$; точка, в которой определяется предел функции, является предельной для X. В предыдущих разделах достаточно подробно рассмотрен случай $X \subseteq \mathbb{R}$ и $Y \subseteq \mathbb{R}$. Понятие предела функции многих переменных в определенном смысле является обобщением понятия предела функции одной переменной, и поэтому следует ожидать здесь как определенные аналоги, так и новые аспекты.

Определение 2.1. *Функцией многих переменных* называется функция с областью определения $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и областью значений $Y \subseteq \mathbb{R}^m$.

Как правило, у нас будет $m = 1$, то есть мы будем изучать числовую (вещественную) функцию от n вещественных переменных. Обозначение: $y = f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$; или $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$.

При исследовании функции одной переменной часто используют ее график. По аналогии с графиком для функции $y = f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$, который можно всегда изобразить на плоскости, вводится график функции n переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – множество точек $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))\}$. Удобно в случае $n = 2$ независимые переменные обозначать x, y, а функцию – $z = f(x, y)$; в случае $n = 3$ независимые переменные – x, y, z, функцию – $u = f(x, y, z)$.

Пример 2.1. $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения с осью Oz, с вершиной в начале координат (см. рис. 7.1 на с. 70).

Определение 2.2. (Предел по Коши). Пусть $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Пусть a – предельная точка X ($a \in X'$). Точка $A \in \mathbb{R}^m$ называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall\, O(A)\ \exists\, O(a)\ \forall\, x \neq a,\ x \in X \cap O(a):\ f(x) \in O(A).$$

Обозначение: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Удобно множество $O(a)\setminus\{a\}$ называть *проколотой окрестностью точки* a и обозначать $\breve{O}(a)$.

Если указаны радиусы окрестностей, то определение 2.2 запишется: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \breve{O}_\delta(a):\ f(x) \in O_\varepsilon(A)$$

или

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X\ (0 < \rho(x,a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) < \varepsilon).$$

Если $m = 1$, то будем писать

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X\ (0 < \rho(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

или $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X,\ x \neq a$

$$\left(\begin{array}{l} |x_1 - a_1| < \delta, \\ |x_2 - a_2| < \delta, \\ \quad\vdots \\ |x_n - a_n| < \delta \end{array} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

Определение 2.3. (Предел по Гейне). Пусть $f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X'$; $f(x) \in \mathbb{R}^m$. Точка $A \in \mathbb{R}^m$ называется пределом $f(x)$ в точке a, если

$$\forall\, \{M^p\}\ (M^p \in X,\ M^p \neq a)\quad (\lim_{p\to\infty} M^p = a \Rightarrow \lim_{p\to\infty} f(M^p) = A).$$

Теорема 2.1. (Об эквивалентности определений предела). *Пусть* $y = f(x)$, $x \in X$ *и* $a \in X'$. *Пусть* $f(x) \in \mathbb{R}^m$ *и* $A \in \mathbb{R}^m$.

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \quad (\textit{по Гейне}) \quad \Longleftrightarrow \quad A = \lim_{x\to a} f(x) \quad (\textit{по Коши}).$$

Доказательство легко проводится по той же схеме, что и доказательство этой теоремы для случая функции одной переменной.

Замечание 2.1. Пусть функция $f(x) \in \mathbb{R}$. Говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если

$$\forall\, E > 0\ \exists\, \delta(E) > 0\ \forall\, x \in X \quad (0 < \rho(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x)| > E).$$

Замечание 2.2. Если множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и X не ограничено, то существует последовательность $\{x^p\}$ из X, что $\lim\limits_{p\to\infty} x^p = \infty$ или, если $x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)$, то $\exists\, i$, что $\lim\limits_{p\to\infty} x_i^p = \infty$. Будем считать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \Delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, x \in X \quad (x \in O_\Delta(\infty)\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon)$$

(по Коши) или

$$\forall\, \{x^p\}\ (x^p \in X) \quad (\lim_{p\to\infty} x^p = \infty\ \Rightarrow\ \lim_{p\to\infty} f(x^p) = A)$$

(по Гейне).

Пример 2.2. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$. Здесь $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; $(0,0)$ – предельная точка области определения функции f.

Во многих задачах полезно пользоваться неравенством

$$|a \cdot b| \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

где $a, b \in \mathbb{R}: \ (|a|-|b|)^2 \geq 0, \ (|a|-|b|)^2 = a^2 - 2|ab| + b^2 \geq 0$, то есть $2|ab| \leq a^2 + b^2$.

$$|f(x,y)| = \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} = |x|\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq |x|\frac{x^2+y^2}{2(x^2+y^2)} = \frac{|x|}{2},$$

а $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{2} = 0$.

Пример 2.3. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ не существует, если

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0.$$

Возьмем последовательность точек $\{M_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}$, она стремится к $(0,0)$, но $M_n \neq (0,0)$.

$$f(M_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Пусть $\left\{M_n'(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n})\right\}$ – последовательность, стремящаяся к $(0,0)$, но $M_n' \neq (0,0)$.

$$f(M_n') = f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5},$$

то есть $f(M_n)$ и $f(M_n')$ стремятся к разным пределам, значит, $f(x,y)$ не имеет предела в точке $(0,0)$ (согласно определению 2.3).

Как уже отмечалось, если не оговорено противное, будем предполагать, что $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to Y \subseteq \mathbb{R}$, то есть f – вещественная функция n вещественных переменных. Наряду с уже введенным понятием предела (для $n = 2$ он называется *двойным*; а для $n = 3$ – *тройным*) для функций многих переменных определяются повторные пределы.

Рассмотрим случай $n = 2$.

Определение 2.4. Пусть функция $f(x,y)$ определена на декартовом произведении множеств X и Y : $X \times Y$ ($X \subseteq \mathbb{R}$; $Y \subseteq \mathbb{R}$). Пусть $x_0 \in X'$, $y_0 \in Y'$. Пусть $\forall\, x \in X$, $x \neq x_0$, существует $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = g(x)$. Если существует

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),$$

то этот предел называется *повторным пределом функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0)*.

Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

Замечание 2.3. Повторные пределы функции $f(x,y)$, взятые в разных порядках, в общем случае не равны. Например,

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

Замечание 2.4. Из существования двойного предела может не следовать существование повторного предела. Например,

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Так как $|f(x,y)| \leq |x|$, то

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0, \quad \text{но} \quad \lim_{\substack{y \to 0 \\ (x \neq 0)}} x\sin\frac{1}{y}$$

не существует, а значит, и не существует $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$.

Замечание 2.5. Из существования и равенства повторных пределов в общем случае не следует существование двойного. Например,

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\neq 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0,$$

а $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не существует (см. пример 2.3).

Однако между двойным и повторными пределами существует определенная связь, которая выражается следующей теоремой.

Теорема 2.2. *Пусть функция $f(x,y)$ определена на $X\times Y$ и $x_0\in X'$, $y_0\in Y'$ (тогда $(x_0,y_0)\in(X\times Y)'$). Если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ и для любого $x\in X$, $x\neq x_0$, существует $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=g(x)$, тогда существует $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ и он равен A.*

Доказательство. $A=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0\ \forall\,(x,y)\in X\times Y,\ (x,y)\neq(x_0,y_0)$$

$$\left(\begin{array}{l}|x-x_0|<\delta,\\ |y-y_0|<\delta\end{array}\Rightarrow |f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Зафиксируем $x\in X$, $x\neq x_0$ и $|x-x_0|<\delta$, и перейдем к пределу в неравенстве $|f(x,y)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ при $y\to y_0$. Тогда получим:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0\ \forall\,x\in X,\ x\neq x_0,$$

$$\left(|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |g(x)-A|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\right),$$

то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$. □

Следует отметить, что и для функций многих переменных имеют место факты, аналогичные тем, что были доказаны для функций одной переменной: об ограниченности функции, имеющей конечный предел; о пределе суммы, произведения и частного; о переходе к пределу в неравенствах.

3. Непрерывность функции многих переменных

3.1. Непрерывность в точке. Локальные свойства

Определение 3.1. Пусть $y=f(x)$, $x\in X\subseteq\mathbb{R}^n$, $f(x)\in\mathbb{R}^m$, $x_0\in X$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\forall\,O(f(x_0))\ \exists\,O(x_0)\ \forall\,x\in X\cap O(x_0):\ f(x)\in O(f(x_0))$$

или

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0\ \forall\,x\in X\ (\rho(x,x_0)<\delta\ \Rightarrow\ \rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon)$$

или, если $m=1$, то

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0\ \forall\,x\in X\ (\rho(x,x_0)<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

или $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0\ \forall\,x\in X$

$$\left(\begin{array}{l}|x_1-x_1^0|<\delta,\\ |x_2-x_2^0|<\delta,\\ \quad\vdots\\ |x_n-x_n^0|<\delta\end{array}\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Если $x_0 \in X'$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 3.2. Пусть $y = f(x)$, $x \in X$, $x_0 \in X$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\forall \{x^p\} \ (x^p \in X) \ \lim_{p\to\infty} x^p = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{p\to\infty} f(x^p) = f(x_0).$$

Определения 3.1 и 3.2 эквивалентны. Это следует из эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне.

Как и для функции одной переменной имеют место теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух непрерывных функций. Формулировки и доказательства этих теорем те же, что и для функции одной переменной.

Теорема 3.1. *Пусть $y = f(x)$, $x \in X$, $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}^n$; $f(x) \in \mathbb{R}^m$. Пусть $Y = \{f(x) : x \in X\}$, $y_0 = f(x_0)$, $g(y)$ определена на Y, $g(y) \in \mathbb{R}$. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то функция $F(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Заметим, что

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)).$$

Непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает непрерывность всех функций $f_i(x)$ в точке x_0, то есть если $x^p \in X$ и $x^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, то

$$\begin{aligned} f(x^p) &= (f_1(x^p), f_2(x^p), \dots, f_m(x^p)) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \\ &\quad (f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_m(x_0)) = f(x_0) = y_0. \end{aligned}$$

Пусть $y^p = f(x^p)$, то есть $y^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} y_0$. Тогда $g(y^p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} g(y_0)$, то есть

$$F(x^p) = g(f(x^p)) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} g(f(x_0)) = F(x_0). \qquad \square$$

Теорема 3.2. *Пусть $y = f(x)$, $x \in X$, $x_0 \in X$, $f(x) \in \mathbb{R}$. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f(x_0) > 0$ (< 0), то $\exists\, O(x_0)$, что $\forall\, x \in O(x_0) \cap X :\ f(x) > 0$ (< 0).*

Доказательство.

1. Если $x_0 \in X'$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то есть

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon)\ \forall\, x \in O_\delta(x_0) \cap X :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ ($f(x_0) > 0$) и по нему найдем $O_\delta(x_0)$, что в $O_\delta(x_0) \cap X :\ |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{f(x_0)}{2}$, то есть

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0), \quad \text{то есть} \quad f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

2. Если x_0 – не предельная точка множества X, тогда $\exists\, O(x_0)$, что $O(x_0) \cap X = x_0$, а $f(x_0) > 0$. $\square$

3.2. Непрерывность на множестве. Свойства непрерывных функций на множестве

Определение 3.3. Множество M из $\mathbb{R}^n$ называется *связным*, если любые две точки множества можно соединить непрерывной кривой, лежащей в этом множестве.

Напомним, что *непрерывной кривой* называется непрерывный образ отрезка

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ \quad \vdots \\ x_n = x_n(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

где $x_i(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ при любых $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 3.4. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в каждой точке X.

Теорема 3.3. *Пусть G – связное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на G и существуют $a \in G$ и $b \in G$ такие, что $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $c \in G$, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Так как G – связное, то существует непрерывная кривая

$$\lambda : \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ \quad\vdots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases} \qquad \alpha \leq t \leq \beta,$$

что $a = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha))$, $b = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta))$ и $\lambda \in G$.

Пусть $F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$. По теореме 3.1 функция $F(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $F(\alpha) = f(a)$, $F(\beta) = f(b)$, то есть $F(\alpha) \neq F(\beta)$ и C между $F(\alpha)$ и $F(\beta)$. Тогда по теореме о промежуточном значении непрерывной на $[\alpha, \beta]$ функции $F(t)$ найдется точка $\gamma \in (\alpha, \beta)$, что $F(\gamma) = C$, а тогда $c = (\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \ldots, \varphi_n(\gamma))$ – искомая точка. □

Теорема 3.4. (Первая теорема Вейерштрасса). *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ и F ограничено и замкнуто. Тогда любая непрерывная на множестве F функция $f(x)$ ограничена на F.*

Доказательство. Метод от противного: предположим, что функция $f(x)$ не ограничена на F, то есть

$$\forall\, E > 0\ \exists\, x_E \in F\ |f(x)| > E;$$

$$\begin{array}{ll} E = 1 & \exists\, x^1 \in F\ |f(x^1)| > 1, \\ E = 2 & \exists\, x^2 \in F\ |f(x^2)| > 2, \\ & \quad\vdots \\ E = p & \exists\, x^p \in F\ |f(x^p)| > p, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Последовательность $\{x^p\}$ ограничена (следует из ограниченности F), из нее выделим сходящуюся $\{x^{p_k}\}$, пусть $a = \lim\limits_{k\to\infty} x^{p_k}$. Так как F замкнуто, то $a \in F$. Из непрерывности следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{p_k}) = f(a)$, а по построению $\{x^p\}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x^{p_k})| = +\infty$. Получили противоречие, значит, предположение неверно и функция $f(x)$ ограничена на множестве F. □

Теорема 3.5. (Вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на множестве F – ограниченном и замкнутом, $f(x) \in \mathbb{R}$. Тогда существуют такие $x_1, x_2 \in F$, что $f(x_1) = \sup\limits_F f(x)$; $f(x_2) = \inf\limits_F f(x)$, то есть $f(x)$ достигает своих точных границ на F (принимает на F наибольшее и наименьшее значения).*

Доказательство полностью совпадает с доказательством этой теоремы для функции одной переменной.

Определение 3.5. Пусть $y = f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathbb{R}$. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на* X, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, x', x'' \in X$$

$$(\rho(x', x'') < \delta\ \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$$

или (если $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$; $x'' = (x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$)

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, x', x'' \in X$$

$$\left(\begin{array}{l} |x_1' - x_1''| < \delta, \\ |x_2' - x_2''| < \delta, \\ \quad\vdots \\ |x_n' - x_n''|, < \delta \end{array} \Rightarrow |f(x_1', \dots, x_n') - f(x_1'', \dots, x_n'')| < \varepsilon \right).$$

Заметим, что из равномерной непрерывности на множестве X следует непрерывность на X. Но не всякая непрерывная на X функция является равномерно непрерывной на X.

Теорема 3.6. (Теорема Кантора). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, ограниченном, замкнутом. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на X.*

Доказательство. Методом от противного.

Предположим, что $f(x)$ непрерывна на X, но не равномерно непрерывна на X, то есть

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x_\delta', x_\delta'' \in X$$

$$(\rho(x_\delta', x_\delta'') < \delta\ \wedge\ |f(x_\delta') - f(x_\delta'')| \geq \varepsilon_0).$$

Возьмем $0 < \delta_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$, тогда

$$\forall\, \delta_p\ \exists\, x_p', x_p'' \in X\ (\rho(x_p', x_p'') < \delta_p\ \wedge\ |f(x_p') - f(x_p'')| \geq \varepsilon_0).$$

Последовательность $\{x_p'\}$ ограничена (принадлежит ограниченному множеству), тогда из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{p_k}'\}$, пусть $x^0 = \lim\limits_{k \to \infty} x_{p_k}'$, причем $x^0 \in X$ (X замкнуто). Возьмем последовательность $\{x_{p_k}''\}$ (с теми же номерами, что и x_{p_k}'!). Так как $\rho(x_{p_k}', x_{p_k}'') < \delta_{p_k}$ и $\delta_{p_k} \to 0$, то $\rho(x_{p_k}'', x_{p_k}') \to 0$ при $k \to \infty$, но $\rho(x_{p_k}'', x^0) \leq \rho(x_{p_k}'', x_{p_k}') + \rho(x_{p_k}', x^0)$, то есть $x_{p_k}'' \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} x^0$. Однако $|f(x_{p_k}') - f(x_{p_k}'')| \geq \varepsilon_0$ и, перейдя к пределу в этом неравенстве при $k \to \infty$ (из непрерывности $f(x)$ в точке x^0 : $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{p_k}') = f(x^0)$ и $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{p_k}'') = f(x^0)$), получим $|f(x^0) - f(x^0)| \geq \varepsilon_0$, то есть $\varepsilon_0 \leq 0$ вопреки предположению ($\varepsilon_0 > 0$). Значит, предположение неверно и $f(x)$ равномерно непрерывна на X. □

4. Дифференцируемость функции многих переменных

4.1. Линейное нормированное пространство

Пусть E – *линейное пространство над полем вещественных чисел*, то есть E – множество, на котором определены операция сложения и операция умножения каждого элемента из E на вещественные числа, причем если $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$, а α и β – вещественные числа, то $\alpha x_1 + \beta x_2 \in E$.

Если на E определено отображение, которое каждому x из E ставит в соответствие неотрицательное число, которое обозначаем $\|x\|$, причем выполняются условия

1. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, где λ – вещественное число;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

тогда множество E называется *линейным нормированным пространством*, а $\|x\|$ – *нормой элемента x*. Заметим, что с помощью нормы можно ввести расстояние между двумя элементами по формуле

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

(проверьте, что $\|x-y\|$ удовлетворяет свойствам расстояния!).

Пример 4.1. Пусть $E = \mathbb{R}^n$, где сумма определена по правилу: если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

а если $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Обычно на $\mathbb{R}^n$ норму определяют по одному из следующих правил

$$\|x\|_0 = \max_i |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

что соответствует тем трем функциям расстояния (ρ_0, ρ_1, ρ_2), которые были определены раньше.

Обозначим

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \\ x^0 &= (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0), \\ \Delta x &= (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n). \end{aligned}$$

Определение 4.1. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x^0)$. Если существует

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}{\Delta x_i},$$

то он называется *частной производной функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *по переменной* x_i *в точке* x^0 и обозначается

$$f'_{x_i}(x^0) \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0).$$

То есть $f'_{x_i}(x^0)$ – это производная функции $f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$ по x_i при $x_i = x_i^0$.

Определение 4.2. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x^0)$. Если найдутся такие числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что

$$\begin{aligned} & f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \qquad (4.1) \\ = \; & A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + \\ + \; & \alpha_1(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)\Delta x_1 + \alpha_2(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)\Delta x_2 + \ldots + \\ + \; & \alpha_n(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)\Delta x_n, \end{aligned}$$

где

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta x_n \to 0}} \alpha_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0,$$

то функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *дифференцируемой в точке* x^0.

Теорема 4.1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то существуют все частные производные, причем*

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0).$$

Доказательство. В формуле (4.1) положим

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1} = \ldots = \Delta x_n = 0,$$

$$\Delta x_i \neq 0,$$

тогда получим

$$\begin{aligned} & f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + \Delta x_i, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0) = \\ = \; & A_i \Delta x_i + \alpha_i(\Delta x_i, 0, \ldots, 0, \Delta x_i, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

где $\alpha_i(0, \ldots, 0, \Delta x_i, 0, \ldots, 0) \to 0$, при $\Delta x_i \to 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + \Delta x_i, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}{\Delta x_i} = \\ = \; & \lim_{\Delta x_i \to 0} (A_i + \alpha_i(0, \ldots, 0, \Delta x_i, 0, \ldots, 0)) = A_i, \end{aligned}$$

то есть существует $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ и она равна A_i. □

Утверждение 4.1. *Определение дифференцируемости функции можно дать следующим образом. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x^0, если найдутся такие числа $A_1, \ldots, A_n$, что*

$$\begin{aligned} &f(x_1^0+\Delta x_1, \ldots, x_n^0+\Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \\ + \;& A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \\ + \;& \gamma(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)\cdot\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}, \end{aligned}$$

где

$$\lim_{\Delta x\to 0}\gamma(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0.$$

Причем это определение эквивалентно определению 4.2.

Доказательство. Пусть имеет место определение 4.2, тогда

$$\begin{aligned} &\alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_n\Delta x_n = \sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}\,\times \\ \times &\left(\alpha_1\frac{\Delta x_1}{\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots\Delta x_n^2}} + \ldots + \alpha_n\frac{\Delta x_n}{\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}}\right) = \\ = \;& \gamma(\Delta x)\cdot\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}. \end{aligned}$$

Так как $\left|\dfrac{\Delta x_i}{\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}}\right| \le 1$ и $\alpha_i \to 0$ при $\Delta x \to 0\ \forall\, i$, то $\gamma(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Обратно, пусть

$$\begin{aligned} &f(x_1^0+\Delta x_1, \ldots, x_n^0+\Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \\ = \;& A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n + \gamma(\Delta x)\cdot\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}, \end{aligned}$$

где $\gamma(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x \to 0$, тогда можно записать

$$\begin{aligned} &\gamma(\Delta x)\cdot\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2} = \\ = \;& \frac{\gamma(\Delta x)\Delta x_1}{\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\gamma(\Delta x)\Delta x_n}{\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}}\Delta x_n = \\ = \;& \alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \alpha_n(\Delta x)\Delta x_n, \end{aligned}$$

где $\alpha_i(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. □

Заметим, что (в отличие от случая функции одной переменной) из существования частных производных не следует дифференцируемость функции.

Пример 4.2. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ в точке $x^0 = (0,0)$.

$f(x,0) = 0$ и $f(0,y) = 0$, тогда $f'_x(0,0) = 0$ и $f'_y(0,0) = 0$.

$$\begin{aligned} &f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \\ = \;& 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + \gamma(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}, \end{aligned}$$

$$\gamma(\Delta x, \Delta y) = \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \underset{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}{\not\longrightarrow} 0,$$

так как $\gamma(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ при $\Delta y = \Delta x$, то есть $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$, хотя существуют частные производные.

Теорема 4.2. (Достаточные условия дифференцируемости). *Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в $O(x^0)$, где $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, имеет в $O(x^0)$ все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, которые непрерывны в точке x^0. Тогда функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0.*

Доказательство проведем для $n = 2$, то есть для $f(x, y)$, определенной в $O(x^0, y^0)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ существуют в $O(x^0, y^0)$ и непрерывны в точке (x^0, y^0). Пусть $(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y) \in O(x^0, y^0)$. Рассмотрим функции $\varphi(x) = f(x, y^0 + \Delta y)$ на отрезке с концами x^0 и $x^0 + \Delta x$ и $\psi(y) = f(x^0, y)$ на отрезке с концами y^0 и $y^0 + \Delta y$. По формуле Лагранжа получим

$$\varphi(x^0 + \Delta x) - \varphi(x^0) = \varphi'(x^0 + \theta_1 \Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

то есть

$$f(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y) - f(x^0, y^0+\Delta y) = f'_x(x^0+\theta_1\Delta x, y^0+\Delta y)\Delta x.$$

Аналогично, применив формулу Лагранжа к функции $\psi(y)$, получим

$$f(x^0, y^0 + \Delta y) - f(x^0, y^0) = f'_y(x^0, y^0 + \theta_2\Delta y)\Delta y, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

В силу непрерывности $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ в точке (x^0, y^0) имеем

$$f'_x(x^0 + \theta_1\Delta x, y^0 + \Delta y) = f'_x(x^0, y^0) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y),$$
$$f'_y(x^0, y^0 + \theta_2\Delta y) = f'_y(x^0, y^0) + \alpha_2(\Delta y),$$

где $\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\alpha_2(\Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
& f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - f(x^0, y^0) = \\
= \;& f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - f(x^0, y^0 + \Delta y) + \\
+ \;& f(x^0, y^0 + \Delta y) - f(x^0, y^0) = \\
= \;& f'_x(x^0 + \theta_1\Delta x, y^0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x^0, y^0 + \theta_2\Delta y)\Delta y = \\
= \;& [f'_x(x^0, y^0) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)]\Delta x + [f'_y(x^0, y^0) + \alpha_2(\Delta y)]\Delta y = \\
= \;& f'_x(x^0, y^0)\Delta x + f'_y(x^0, y^0)\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta y)\Delta y,
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\longrightarrow} 0 \quad \text{и} \quad \alpha_2(\Delta y) \underset{\Delta y \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

то есть функция $f(x, y)$ удовлетворяет определению дифференцируемости функции в точке $(0, 0)$. □

Заметим, что условия теоремы лишь достаточны для дифференцируемости, что видно из примера:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0,$$

аналогично, $f'_y(0, 0) = 0$. Запишем

$$\begin{aligned}
f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) &= f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + \\
&+ \gamma(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},
\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}
\gamma(\Delta x, \Delta y) &= \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \\
&= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \sin\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

то есть (по определению) функция $f(x, y)$ дифференцируема, а

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{2x}{x^2 + y^2}\cos\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

не имеет предела в точке $(0, 0)$ (проверить!), то есть не выполняется условие непрерывности $f'_x(x, y)$ в точке $(0, 0)$.

Определение 4.3. Пусть функция $f(x)$, $x \in O(x^0)$, дифференцируема в точке x^0, тогда *дифференциалом функции $f(x)$ в точке x^0* называется функция

$$df(x^0) = f'_{x_1}(x^0)h_1 + f'_{x_2}(x^0)h_2 + \ldots + f'_{x_n}(x^0)h_n,$$

где h_i – независимые переменные.

Замечание 4.1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$, тогда $df(x^0) = f'_{x_i}(x^0)h_i = h_i$, то есть в общем случае правомерно равенство

$$df(x^0) = f'_{x_1}(x^0)dx_1 + f'_{x_2}(x^0)dx_2 + \dots + f'_{x_n}(x^0)dx_n,$$

причем $dx_i = \Delta x_i$.

4.2. Операции над дифференцируемыми функциями

Лемма 4.1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то $f(x)$ непрерывна в точке x^0.*

Доказательство. Из дифференцируемости $f(x)$ в точке x^0

$$\begin{aligned} f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) &= f'_{x_1}(x^0)\Delta x_1 + \dots + f'_{x_n}(x^0)\Delta x_n + \\ &+ \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n, \end{aligned}$$

где $\alpha_i \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0 \ \forall\, i$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)] = 0$. □

Теорема 4.3. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$, $x \in O(x^0)$, и $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x^0. Тогда*

1. *функция $F(x) = f(x) + g(x)$ дифференцируема в точке x^0, причем $dF(x^0) = df(x^0) + dg(x^0)$;*
2. *функция $F(x) = f(x)g(x)$ дифференцируема в точке x^0 и $dF(x^0) = f(x^0)dg(x^0) + g(x^0)df(x^0)$;*
3. *если $g(x^0) \neq 0$, то функция $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке x^0 и $dF(x^0) = \dfrac{g(x^0)df(x^0) - f(x^0)dg(x^0)}{[g(x^0)]^2}$.*

Докажем для произведения, для $n = 2$ (остальные утверждения доказать самим!). Из дифференцируемости функции $f(x, y)$ в точке (x^0, y^0) имеем

$$\begin{aligned} & f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - f(x^0, y^0) = \\ = \;& f'_x(x^0, y^0)\Delta x + f'_y(x^0, y^0)\Delta y + \\ + \;& \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \gamma(\Delta x, \Delta y)\Delta y \end{aligned}$$

и $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\gamma(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Из дифференцируемости функции $g(x, y)$ в точке (x^0, y^0) следует непрерывность $g(x, y)$ в точке (x^0, y^0), то есть

$$g(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) = g(x^0, y^0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)$$

и $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} & g(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - g(x^0, y^0) = \\ = \;& g'_x(x^0, y^0)\Delta x + g'_y(x^0, y^0)\Delta y + \\ + \;& \sigma(\Delta x, \Delta y)\Delta x + r(\Delta x, \Delta y)\Delta y \end{aligned}$$

и $\sigma(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $r(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} & F(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - F(x^0, y^0) = \\ = \;& f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y)g(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - \\ - \;& f(x^0, y^0)g(x^0, y^0) - f(x^0, y^0)g(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) + \\ + \;& f(x^0, y^0)g(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) = \\ = \;& g(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y)[f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - f(x^0, y^0)] + \\ + \;& f(x^0, y^0)[g(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - g(x^0, y^0)] = \\ = \;& [g(x^0, y^0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)] \cdot [f'_x(x^0, y^0)\Delta x + \\ + \;& f'_y(x^0, y^0)\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \gamma(\Delta x, \Delta y)\Delta y] + \\ + \;& f(x^0, y^0)[g'_x(x^0, y^0)\Delta x + g'_y(x^0, y^0)\Delta y + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad \sigma(\Delta x, \Delta y)\Delta x + r(\Delta x, \Delta y)\Delta y] = \\
&= \quad [g(x^0, y^0) f'_x(x^0, y^0) + f(x^0, y^0) g'_x(x^0, y^0)]\Delta x + \\
&+ \quad [g(x^0, y^0) f'_y(x^0, y^0) + f(x^0, y^0) g'_y(x^0, y^0)]\Delta y + \\
&+ \quad (g\beta + f'_x\alpha + \alpha\beta + f\sigma)\Delta x + (\alpha f'_y + \alpha\gamma + g\gamma + rf)\Delta y,
\end{aligned}$$

где

$$(g\beta + f'_x\alpha + \alpha\beta + f\delta) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\longrightarrow} 0,$$

$$(\alpha f'_y + \alpha\gamma + g\gamma + rf) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\longrightarrow} 0$$

(в последних двух скобках у функций опущены аргументы), то есть

$$\begin{aligned}
dF(x^0, y^0) &= (gf'_x + fg'_x)dx + (gf'_y + fg'_y)dy = \\
&= g(f'_x dx + f'_y dy) + f(g'_x dx + g'_y dy) = gdf + fdg \square
\end{aligned}$$

Теорема 4.4. (Дифференцируемость сложной функции). *Пусть функции* $\varphi_1(t,u), \varphi_2(t,u), \ldots, \varphi_n(t,u)$ *определены в* $O(t^0, u^0)$ *и дифференцируемы в точке* (t^0, u^0); *пусть* $\varphi_i(t,u)$ *переводят* $O(t^0, u^0)$ *в* $O(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *где* $x_i^0 = \varphi_i(t^0, u^0)$. *Пусть функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена в* $O((x_1^0, \ldots, x_n^0))$ *и дифференцируема в точке* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. *Тогда функция* $F(t,u) = f(\varphi_1(t,u), \varphi_2(t,u), \ldots, \varphi(t,u))$ *дифференцируема в точке* (t^0, u^0), *причем справедливы формулы*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t},$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial u},$$

где $x_i = \varphi_i(t,u)$; $\dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial F}{\partial u}, \dfrac{\partial x_i}{\partial t}, \dfrac{\partial x_i}{\partial u}$ *взяты в точке* (t^0, u^0), *а* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ – *в точке* $(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)$.

Доказательство проведем для $n = 2$.

$$\begin{aligned}
&\quad F(t^0 + \Delta t, u^0 + \Delta u) - F(t^0, u^0) = \\
&= f(\varphi_1(t^0 + \Delta t, u^0 + \Delta u), \varphi_2(t^0 + \Delta t, u^0 + \Delta u)) - \\
&- f(\varphi_1(t^0, u^0), \varphi_2(t^0, u^0)) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)\Delta x_2 + \\
&+ \alpha(\Delta x_1, \Delta x_2)\Delta x_1 + \beta(\Delta x_1, \Delta x_2)\Delta x_2 =
\end{aligned}$$

$(\alpha(\Delta x_1, \Delta x_2) \to 0, \beta(\Delta x_1, \Delta x_2) \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0$ и $\Delta x_2 \to 0)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t^0, u^0)\Delta t + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(t^0, u^0)\Delta u + \gamma_1(\Delta t, \Delta u)\Delta t + \right.\\
&+ \left.\gamma_2(\Delta t, \Delta u)\Delta u\right] + \frac{\partial f}{\partial t}\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t^0, u^0)\Delta t + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(t^0, u^0)\Delta u + \right.\\
&+ \left.\gamma_3(\Delta t, \Delta u)\Delta t + \gamma_4(\Delta t, \Delta u)\Delta u\right] + \alpha\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\Delta u + \right.\\
&+ \left.\gamma_1\Delta t + \gamma_2\Delta u\right] + \beta\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\Delta u + \gamma_3\Delta t + \gamma_4\Delta u\right] = \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right]\Delta t + \\
&+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right]\Delta u + \\
&+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\gamma_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma_3 + \alpha\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \alpha\gamma_1 + \beta\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \beta t_3\right]\Delta t + \\
&+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\gamma_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma_4 + \alpha\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \alpha\gamma_2 + \beta\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} + \beta\gamma_4\right]\Delta u,
\end{aligned}$$

$$\varphi_1(t^0 + \Delta t, u^0 + \Delta u) = x_1^0 + \Delta x_1,$$

$$\varphi_2(t^0 + \Delta t, u^0 + \Delta u) = x_2^0 + \Delta x_2,$$

$$\varphi_1(t^0, u^0) = x_1^0, \quad \varphi_2(t^0, u^0) = x_2^0.$$

Пусть

$$\sigma_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\gamma_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma_3 + \alpha\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \alpha\gamma_1 + \beta\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \beta t_3,$$

$$\sigma_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\gamma_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma_4 + \alpha\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \alpha\gamma_2 + \beta\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} + \beta\gamma_4.$$

При $\Delta t \to 0$ и $\Delta u \to 0$ функции $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ и α, β стремятся к нулю (так как φ_1 и φ_2 непрерывны в точке (t^0, u^0), то $\Delta x_1 \to 0$ и $\Delta x_2 \to 0$ при $\Delta t \to 0, \Delta u \to 0$). То есть $F(t,u)$ дифференцируема в точке (t^0, u^0) и справедливы формулы для $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial u}$.

□

4.3. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 4.4. Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в $O((x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0))$ и в этой окрестности существует $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$. Если для $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ существует частная производная по x_j в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, то эту производную называют *второй производной от* $f(x_1, \dots, x_n)$ *по переменным* x_i, x_j *в точке* $(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Если $i \neq j$, то такая производная называется *смешанной* и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$$

или $f''_{x_i x_j}(x^0)$.

Аналогично определяется

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(x^0) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_1}\right)(x^0)$$

или

$$f^k_{x_{i_1} x_{i_1} \dots x_{i_k}}(x^0) = \left(f^{k-1}_{x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}}}\right)'_{x_{i_k}}(x^0).$$

Заметим, что в общем случае смешанные производные одного порядка по одним и тем же переменным, но взятые в различных порядках, не совпадают. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 4.5. *Пусть функция* $f(x,y)$ *определена в* $O((x^0, y^0))$, *в этой окрестности существуют* $f''_{xy}(x,y)$ *и* $f''_{yx}(x,y)$, *которые непрерывны в точке* (x^0, y^0). *Тогда* $f''_{xy}(x^0, y^0) = f''_{yx}(x^0, y^0)$.

Доказательство. Пусть

$$\Delta_x f = f(x^0 + \Delta x, y) - f(x^0, y) = \phi(y),$$

$$\Delta_y f = f(x, y^0 + \Delta y) - f(x, y^0) = \varphi(x),$$

$$\begin{aligned}
\Delta_y(\Delta_x f) &= \psi(y^0 + \Delta y) - \psi(y^0) = \\
&= f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - f(x^0, y^0 + \Delta y) - \\
&- f(x^0 + \Delta x, y^0) + f(x^0, y^0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_x(\Delta_y f) &= \varphi(x^0 + \Delta x) - \varphi(x^0) = f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - \\
&- f(x^0 + \Delta x, y^0) - f(x^0, y^0 + \Delta y) + f(x^0, y^0).
\end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta_y(\Delta_x f) = \Delta_x(\Delta_y f)$. Используя формулу Лагранжа, получим

$$\begin{aligned}
\Delta_y(\Delta_x f) &= \psi(y^0 + \Delta y) - \psi(y^0) = \psi'_y(y^0 + \theta_1 \Delta y)\Delta y = \\
&= [f'_y(x^0 + \Delta x, y^0 + \theta_1 \Delta y) - f'_y(x^0, y^0 + \theta_1 \Delta y)]\Delta y = \\
&= f''_{yx}(x^0 + \theta_2 \Delta x, y^0 + \theta_1 \Delta y)\Delta y \Delta x,
\end{aligned}$$

$0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1,$

$$\begin{aligned}\Delta_x(\Delta_y f) &= \varphi(x^0+\Delta x) - \varphi(x^0) = \varphi'_x(x^0+\theta_3\Delta x) = \\ &= [f'_x(x^0+\theta_3\Delta x, y^0+\Delta y) - f'_x(x^0+\theta_3\Delta x, y^0)]\Delta x = \\ &= [f''_{xy}(x^0+\theta_3\Delta x, y^0+\theta_4\Delta y)]\Delta x\Delta y,\end{aligned}$$

$0 < \theta_3 < 1,\ 0 < \theta_4 < 1$, то есть

$$f''_{yx}(x^0+\theta_2\Delta x, y^0+\theta_1\Delta y) = f''_{xy}(x^0+\theta_3\Delta x, y^0+\theta_4\Delta y).$$

В силу того, что $0 < \theta_i < 1$, а f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в точке (x^0, y^0), при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ получаем

$$f''_{yx}(x^0, y^0) = f''_{xy}(x^0, y^0).$$

□

Определение 4.5. Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в $O((x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0))$ и в этой окрестности существуют все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, которые дифференцируемы в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Тогда *дифференциалом второго порядка функции* $f(x_1, \ldots, x_2)$ *в точке* x^0 $(d^2f(x^0))$ называется квадратичная форма, соответствующая дифференциалу от первого дифференциала, то есть

$$\begin{aligned}& d^2f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \\ = {} & d(f'_{x_1}(x)dx_1 + f'_{x_2}(x)dx_2 + \ldots + f'_n(x)dx_n)_{x=x^0} = \\ = {} & f''_{x_1x_1}(x^0)dx_1\delta x_1 + f''_{x_1x_2}(x^0)dx_1\delta x_2 + \ldots + f''_{x_1x_n}(x^0)dx_1\delta x_n + \\ + {} & f''_{x_2x_1}(x^0)dx_2\delta x_1 + \ldots + f''_{x_2x_n}(x^0)dx_2\delta x_n + \ldots + \\ + {} & f''_{x_ix_j}(x^0)dx_i\delta x_j + \ldots + f''_{x_nx_n}(x^0)dx_n\delta x_n\end{aligned}$$

при $dx_i = \delta x_i$.

Например, при $n = 2$

$$\begin{aligned}d^2f(x^0, y^0) &= f''_{xx}(x^0, y^0)(dx)^2 + f''_{xy}(x^0, y^0)dxdy + \\ &+ f''_{yx}(x^0, y^0)dxdy + f''_{yy}(x^0, y^0)(dy)^2.\end{aligned}$$

Если $(f''_{xy}(x^0, y^0) = f''_{yx}(x^0, y^0)$ (см. теорему 4.5), то

$$d^2f(x^0, y^0) = f''_{xx}(x^0, y^0)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x^0, y^0)dxdy + f''_{yy}(x^0, y^0)(dy)^2.$$

Дифференциал k*-го порядка функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в точке* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ $(d^kf(x^0))$ определяется как $d(d^{k-1}f(x_1, \ldots, x_n))_{x=x_0}$, если в $O(x^0)$ определены все частные производные $(k-1)$-го порядка, дифференцируемые в точке x^0.

Теорема 4.6. (Инвариантность формы первого дифференциала). *Пусть функции* $\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ *определены в* $O((t_1^0, \ldots, t_m^0))$ *и отображение, определенное* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, *переводит* $O((t_1^0, \ldots, t_m^0))$ *в некоторую* $O((x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0))$, *где* $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *в которой определена функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *Пусть все функции* $\varphi(t), t = (t_1, \ldots, t_m)$ *дифференцируемы в точке* $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_m^0)$, *а функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x^0. *Тогда*

$$df(x^0) = f'_{x_1}dx_1(t^0) + \ldots + f'_{x_n}dx_n(t^0),$$

то есть формула для определения дифференциала первого порядка для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *где* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *- независимые переменные, применима и для случая, когда* $x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_m)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $f(x, y)$, $x = \varphi(t, v)$ и $y = \psi(t, v)$.

Пусть $F(t, v) = f(\varphi(t, v), \psi(t, v))$, она дифференцируема в точке (t^0, u^0) по теореме 4.4,

$$\begin{aligned}dF(t^0, v^0) &= F'_t(t^0, v^0)dt + F'_v(t^0, v^0)dv = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=t^0, v=v^0} dt +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right]_{t=t^0,v=v^0} dv = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)[\varphi_t'(t^0,v^0)dt+\varphi_v'(t^0,v^0)dv] + \\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)[\psi_t'(t^0,v^0)dt+\psi_v'(t^0,v^0)dv] = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)dx(t^0,v^0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)dy(t^0,v^0).
\end{aligned}
$$

Если же рассмотреть дифференциал второго порядка, то получим

$$
\begin{aligned}
d^2f(x^0,y^0) &= d(df(x,y))_{x=x^0,y=y^0} = \\
&= d(f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy)_{x=x^0,y=y^0} = \\
&= df_x'(x,y)_{x=x^0,y=y^0}dx+f_x'(x^0,y^0)d^2x(t^0,v^0)+ \\
&+ df_y'(x,y)dy+f_y'(x^0,y^0)d^2y(t^0,v^0) = \\
&= f_{xx}''(x^0,y^0)(dx(t^0,v^0))^2+f_{xy}''(x^0,y^0)dxdy+ \\
&+ f_{yx}''(x^),y^0)dxdy+f_{yy}''(x^0,y^0)(dy)^2+ \\
&+ f_x'(x^0,y^0)d^2x(t^0,v^0)+f_y'(x^0,y^0)d^2y(t^0,v^0),
\end{aligned}
$$

то есть в общем случае форма дифференциала второго порядка для случая зависимых переменных имеет другой вид.

Теорема 4.7. (Формула Тейлора). *Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x^0)$, где $O(x^0)\subset\mathbb{R}^n$, и имеет в этой окрестности дифференциалы до $(k+1)$-го порядка. Тогда справедлива формула Тейлора*

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(x^0) &= df(x^0)+\frac{1}{2!}d^2f(x^0)+\ldots+\frac{1}{k!}d^kf(x^0)+ \\
&+ \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(x^0+\theta(x-x^0)),
\end{aligned}
$$

где $0<\theta<1$, а $dx_i=\Delta x_i=(x_i-x_i^0)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in O(x^0)$, $x^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=f(x^0+t(x-x^0)),\quad 0\le t\le 1,\quad x\in O(x^0).$$

Функция $\varphi(t)$ дифференцируема на $[0,1]$ до $(k+1)$-го порядка по теореме 4.4, причем, $\varphi^{(k)}(t)=d^kf(x^0+t(x-x^0))$, где $\Delta x_i=dx_i$. Для функции $\varphi(t)$ можно записать формулу Тейлора по степеням t с остатком в форме Лагранжа при $t=1$

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{(k+1)!}\varphi^{(k+1)}(\theta),$$

где $0<\theta<1$, а тогда (учитывая вид $\varphi^{(k)}(t)$ при $t=0$)

$$f(x)=f(x^0)+df(x^0)+\ldots+\frac{d^kf(x^0)}{k!}+\frac{d^{k+1}f(x^0+\theta(x-x^0))}{(k+1)!},$$

причем во всех дифференциалах dx_i берутся равными $\Delta x_i=(x_i-x_i^0)$. □

5. Геометрические приложения

Определение 5.1. *Касательной плоскостью к графику функции* $f(x,y)$, определенной в $O((x_0,y_0))$, в точке $((x_0,y_0),f(x_0,y_0))$ называется такая плоскость, что разность ее аппликаты z в точке (x,y) и $f(x,y)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ при $\rho\to 0$, то есть $z-f(x,y)=o(\rho)$.

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то плоскость

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$, является касательной к графику функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), так как

$$\begin{aligned} f(x,y) - z &= f(x,y) - z_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \\ &- \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = o(\rho) \end{aligned}$$

(это следует из определения дифференцируемости функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0)).

Таким образом, геометрический смысл полного дифференциала dz функции в точке (x_0, y_0) состоит в том, что он равен приращению аппликаты плоскости, касательной к графику функции $f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, когда приращение функции равно $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ (рис. 5.1). □

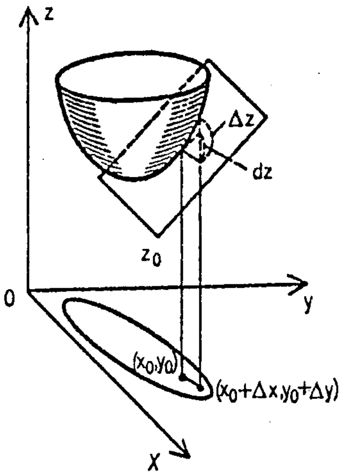

Рис. 5.1.

Из геометрии известно, что вектор

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

перпендикулярен этой плоскости. Тогда *уравнение нормали к графику* $f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0), то есть прямой, перпендикулярной касательной плоскости в точке (x_0, y_0), будет

$$\begin{cases} x = x_0 + t\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \\ y = y_0 + t\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \\ z = z_0 - t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Определение 5.2. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в окрестности $O((x_0, y_0, z_0))$. Пусть задано направление $\mathbf{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы вектора $\mathbf{l}$ с осями координат OX, OY, OZ. Тогда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Пусть

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases}$$

$0 \le t \le t_0$ – отрезок, лежащий в $O(x_0, y_0, z_0)$, содержащий точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$ и параллельный вектору $\mathbf{l}$. Если существует предел

$$\lim_{\rho_2(M,M_0)\to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M, M_0)} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t},$$

то этот предел обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0)$ и называется *производной по направлению вектора* $\mathbf{l}$ *в точке* (x_0, y_0, z_0) (см. рис. 5.2).

Заметим, что частные производные являются производными по положительным направлениям осей координат.

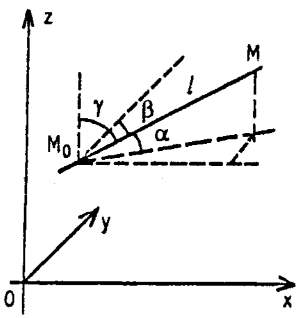

Рис. 5.2.

Теорема 5.1. *Если функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0,z_0), то существует производная по любому направлению $\mathrm{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ в точке (x_0,y_0,z_0) и вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{l}}(x_0,y_0,z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$, $F(t)$ имеет производную в точке $t_0 = 0$ (теорема 4.4) и

$$F'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0,y_0,z_0)}{t},$$

а тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{l}}(x_0,y_0,z_0) &= F'(0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma\end{aligned}$$

(по теореме 4.4). □

Рассмотрим вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right),$$

который обозначается $\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)$ и называется *градиентом функции $f(x,y,z)$ в точке (x_0,y_0,z_0)*. На производную по направлению можно смотреть как на скалярное произведение вектора l и $\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)$, а тогда получаем, что если

$$\mathrm{l} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)}{|\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)|},$$

то в этом направлении производная функции $f(x,y,z)$ в точке (x_0,y_0,z_0) будет наибольшей.

Определение 5.3. Отображение, действующее из некоторого множества числовой прямой в n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, называется *вектор-функцией*, то есть это отображение, которое каждой точке $t \in T \subset \mathbb{R}$ (как правило T – промежуток) ставит в соответствие единственную точку $M(t) \in \mathbb{R}^n$. Это можно записать, например, следующим образом:

$$M(t) = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases}$$

где $t \in [\alpha,\beta]$, или $\mathbf{r}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$.

В случае, когда начало каждого из векторов $\mathbf{r}(t)$ совпадает с началом координат, эти векторы называют *радиус-векторами*, а множество их концов – *годографом вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$, $t \in T$, который можно рассматривать как траекторию точки $M(t)$ – конца вектора $\mathbf{r}(t)$, если считать, что t – время.

Определение 5.4. Вектор $\mathbf{a}$ называется *пределом функции* $\mathbf{r}(t)$ *в точке* t_0 (обозначение $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}$), если $\lim\limits_{t\to t_0}|\mathbf{r}(t)-\mathbf{a}|=0$, где $|\mathbf{r}(t)-\mathbf{a}|$ – длина вектора $(\mathbf{r}(t)-\mathbf{a})$.

Теорема 5.2. *Если* $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ *и* $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, *то* $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=a_1$, $\lim\limits_{t\to t_0}y(t)=a_2$, $\lim\limits_{t\to t_0}z(t)=a_3$.

Действительно,

$$|\mathbf{r}(t)-\mathbf{a}|=\sqrt{(x(t)-a_1)^2+(y(t)-a_2)^2+(z(t)-a_3)^2}.$$

Отсюда следует, что $|x(t)-a_1|\le|\mathbf{r}(t)-\mathbf{a}|$, то есть $|\mathbf{r}(t)-\mathbf{a}|\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}0\Rightarrow|x(t)-a_1|\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}0$. Аналогично для $y(t)$ и $z(t)$.

Обратно, если $x(t)\to a_1$, $y(t)\to a_2$, $z(t)\to a_3$, то $\sqrt{(x(t)-a_1)^2+(y(t)-a_2)^2+(z(t)-a_3)^2}\to 0$. □

Отметим несколько свойств вектор-функций (связанных с пределом).A

1. Если $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0}|\mathbf{r}(t)|=|\mathbf{a}|$.

   Это следует из неравенства: $\big||\mathbf{r}(t)|-|\mathbf{a}|\big|\le|\mathbf{r}(t)-\mathbf{a}|$.

2. Если $\mathbf{r}(t)\to\mathbf{a}$ при $t\to t_0$, а скалярная функция $f(t)\to A$ при $t\to t_0$, то $f(t)\cdot\mathbf{r}(t)\to A\mathbf{a}$ при $t\to t_0$.

   Действительно, $\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}+\mathbf{a}(t)$, где $\mathbf{a}(t)\to 0$ и $f(t)=A+\varphi(t)$, где $\varphi(t)\to 0$. Тогда $f(t)\mathbf{r}(t)=A\mathbf{a}+\varphi(t)\mathbf{a}+A\mathbf{a}(t)$ и $\varphi(t)\mathbf{a}\to 0$ $(|\varphi(t)\mathbf{a}|\le|\varphi(t)||\mathbf{a}|)$, $A\mathbf{a}(t)\to 0$ $(|A\mathbf{a}(t)|\le|A||\mathbf{a}(t)|)$.

3. Если $\mathbf{r_1}(t)\to\mathbf{a}$; $\mathbf{r_2}(t)\to\mathbf{b}$ при $t\to t_0$, то

   $$\lim_{t\to t_0}[\mathbf{r_1}(t)+\mathbf{r_2}(t)]=\mathbf{a}+\mathbf{b},\quad \lim_{t\to t_0}(\mathbf{r_1}(t),\mathbf{r_2}(t))=(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

   то есть предел скалярного произведения равен скалярному произведению пределов.

Напомним, что *скалярным произведением* двух векторов называется скалярная функция со свойствами:

1. $(\mathbf{a},\mathbf{a})\ge 0$ и $(\mathbf{a},\mathbf{a})=0\Leftrightarrow\mathbf{a}=0$;
2. $(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$;
3. $(\mathbf{c},\mathbf{a}+\mathbf{b})=(\mathbf{c},\mathbf{a})+(\mathbf{c},\mathbf{b})$.

Если $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Доказательство теоремы. Пусть $\mathbf{r_1}(t)=\mathbf{a}+\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{r_2}(t)=\mathbf{b}+\mathbf{b}(t)$, где $\mathbf{a}(t)\to 0$, $\mathbf{b}(t)\to 0$. Тогда

$$\mathbf{r_1}(t)+\mathbf{r_2}(t)=\mathbf{a}+\mathbf{b}+(\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t)),$$

где $\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t)\to 0$ $(|\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t)|\le|\mathbf{a}(t)|+|\mathbf{b}(t)|)$, то есть $\mathbf{r_1}(t)+\mathbf{r_2}(t)\to\mathbf{a}+\mathbf{b}$;

$$\begin{aligned}(\mathbf{r_1}(t),\mathbf{r_2}(t))&=(\mathbf{a}+\mathbf{a}(t),\mathbf{b}+\mathbf{b}(t))=\\&=(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{a},\mathbf{b}(t))+(\mathbf{b},\mathbf{a}(t))+(\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t)),\end{aligned}$$

а из неравенства Коши-Буняковского (1.1) следует, что

$$|(\mathbf{a},\mathbf{b}(t))|\le|\mathbf{a}||\mathbf{b}(t)|,\quad |(\mathbf{b},\mathbf{a}(t))|\le|\mathbf{b}||\mathbf{a}(t)|,$$

$$|(\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t))|\le|\mathbf{a}(t)|\cdot|\mathbf{b}(t)|,$$

то есть $(\mathbf{a},\mathbf{b}(t))\to 0$, $(\mathbf{b},\mathbf{a}(t))\to 0$ и $(\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t))\to 0$. □

Определение 5.5. Функция $\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)$.

Из теоремы 5.1 следует, что непрерывность $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 равносильна непрерывности координатных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в точке t_0.

Если $\Delta\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_0+\Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$, то есть $\Delta\mathbf{r}(t_0)$ – приращение $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0, тогда непрерывность $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 эквивалентна тому, что $\Delta\mathbf{r}(t_0) \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Определение 5.6. Если существует $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$, то этот предел называется *производной вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ *в точке* t_0 и обозначается $\mathbf{r}'(t_0)$.

Замечание 5.1. Если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

Доказательство. Если $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, то

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}\mathbf{i}+\right.\\ +\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}\mathbf{j} &+ \left.\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}\mathbf{k}\right] =\\ &= x'(t_0)\mathbf{i}+y'(t_0)\mathbf{j}+z'(t_0)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

□

Замечание 5.2. Если $\mathbf{r}(t)$ определяет некоторую кривую, то $\mathbf{r}'(t_0)$ – это вектор, который направлен по касательной к этой кривой в точке $\mathbf{r}(t_0)$.

Справедливы следующие правила дифференцирования вектор-функций:

1. $(\mathbf{r_1}(t)+\mathbf{r_2}(t))' = \mathbf{r}_1'(t)+\mathbf{r}_2'(t)$.

2. Если $f(t)$ – скалярная функция, то
$$(f(t)\cdot\mathbf{r}(t))' = f'(t)\cdot\mathbf{r}(t)+f(t)\cdot\mathbf{r}'(t).$$

3. $(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2})' = (\mathbf{r}_1',\mathbf{r_2})+(\mathbf{r_1},\mathbf{r}_2')$ при условии, что существуют производные $f(t)$, $\mathbf{r_1}(t)$ и $\mathbf{r_2}(t)$.

Докажем 3, а 1, 2 – доказать самостоятельно.

$$\begin{aligned}&(\mathbf{r_1}(t),\mathbf{r_2}(t))'_{t=t_0} =\\ =\ &\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\mathbf{r_1}(t_0+\Delta t),\mathbf{r_2}(t_0+\Delta t))-(\mathbf{r_1}(t_0),\mathbf{r_2}(t_0))}{\Delta t} =\\ =\ &\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(\mathbf{r_1}(t_0+\Delta t),\mathbf{r_2}(t_0+\Delta t))-(\mathbf{r_1}(t_0),\mathbf{r_2}(t_0+\Delta t))}{\Delta t}+\right.\\ +\ &\left.\frac{(\mathbf{r_1}(t_0),\mathbf{r_2}(t_0+\Delta t))-(\mathbf{r_1}(t_0),\mathbf{r_2}(t_0))}{\Delta t}\right] =\\ =\ &\lim_{\Delta t\to 0}\left[\left(\frac{\mathbf{r_1}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r_1}(t_0)}{\Delta t},\mathbf{r_2}(t_0+\Delta t)\right)+\right.\\ +\ &\left.\left(\mathbf{r_1}(t_0),\frac{\mathbf{r_2}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r_2}(t_0)}{\Delta t}\right)\right] =\\ =\ &\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r_1}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r_1}(t_0)}{\Delta t},\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{r_2}(t_0+\Delta t)\right)+\\ +\ &\left(\mathbf{r_2}(t_0),\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r_2}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r_2}(t_0)}{\Delta t}\right) =\\ =\ &(\mathbf{r_1}'(t_0),\mathbf{r_2}(t_0))+(\mathbf{r_1}(t_0),\mathbf{r}_2'(t_0)).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались правилом перехода к пределу в скалярном произведении. □

Замечание 5.3. Для вектор-функции имеет место следующее утверждение (формула Лагранжа). Если $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$ и имеет $\mathbf{r}'(t)$ на (α,β), то

$$\exists\ \xi\in(\alpha,\beta):\ |\mathbf{r}(\beta)-\mathbf{r}(\alpha)|\le|\mathbf{r}'(\xi)|(\beta-\alpha).$$

Замечание 5.4. Для вектор-функции, имеющей производные до k-го порядка в точке t_0, имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{r}^{(\mathbf{k})}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k+\mathbf{o}((t-t_0)^n),$$

где $\mathbf{o}((t-t_0)^n)$ – вектор-функция, которая может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{o}((t-t_0)^n) = (t-t_0)^n \cdot \mathbf{e}(t),$$

где вектор $\mathbf{e}(t) \to 0$ при $t \to t_0$.

6. Неявные функции

6.1. Определения, предварительные сведения

Зависимость одной переменной от другой (или от других) не обязательно может быть выражена при помощи так называемого явного представления, когда зависимая переменная задается аналитической формулой, содержащей независимую переменную: $y = f(x)$. Часто значения двух или более переменных связаны между собой какими-то уравнениями. Например, уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ связывает между собой координаты точек окружности на плоскости xOy, уравнение $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ задает в трехмерном пространстве конус, система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

задает в трехмерном пространстве окружность (пересечение сферы и плоскости). Вообще, переменные могут быть связаны между собой одним или несколькими уравнениями вида

$$F(x, y) = 0, \tag{6.1}$$

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, \tag{6.2}$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \end{cases} \tag{6.3}$$

где $F, F_1, \ldots, F_m$ – функции соответствующего числа переменных, $x, x_1, \ldots, x_n$ – независимые переменные, $y, y_1, \ldots, y_m$ – переменные, для которых изучается их зависимость от x или $x_1, \ldots, x_n$.

Если в случае (6.1) для каждого значения x из некоторого числового множества X существует ровно одно значение y из другого числового множества Y такое, что пара (x, y) удовлетворяет уравнению (6.1), то этим определяется однозначная функция $f : X \to Y$, для которой уравнение (6.1) превращается при каждом значении $x \in X$ в верное числовое равенство $F(x, f(x)) \equiv 0$ (тождество на множестве X). При этом говорят, что уравнение (6.1) определяет на множестве X со значениями в Y *неявную функцию* $y = f(x)$.

В случае (6.2) определение неявной функции аналогично, только X является не числовым множеством, а подмножеством n-мерного пространства, а сама функция f зависит от n переменных $x_1, \ldots, x_n$.

В случае системы уравнений (6.3) речь идет о том, что эта система определяет m функций $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$. А именно, если для каждой точки $(x_1, \ldots, x_n)$ из некоторого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ существует единственный набор чисел $y_1 \in Y_1, \ldots, y_m \in Y_m$ (где $Y_1, \ldots, Y_m$ – некоторые числовые множества), удовлетворяющих совместно с $x_1, \ldots, x_n$ всем уравнениям системы (6.3), то этим определяются на множестве X *неявные функции* $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$ со значениями соответственно в $Y_1, \ldots, Y_m$, превращающие систему (6.3) в систему тождеств на множестве X

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0. \end{cases}$$

Рассмотрим для примера уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{6.4}$$

Если положить $X = (-1, 1), Y = \mathbb{R}$, то точкам x будут соответствовать два разных значения y, удовлетворяющих совместно с x уравнению (6.4): $y' = \sqrt{1-x^2}$ и $y'' = -\sqrt{1-x^2}$ (рис. 6.1). А в случае $X \subseteq (-1, 1), Y \subseteq (0, +\infty)$ уравнение (6.4) определяет однозначную функцию $y = \sqrt{1-x^2}$ (рис. 6.2).

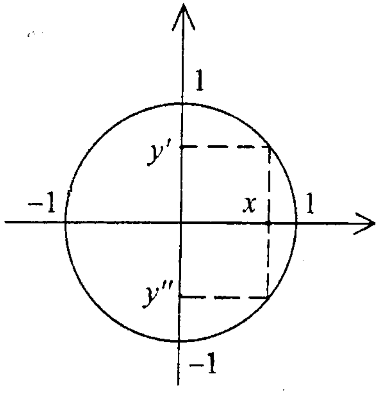

Рис. 6.1.

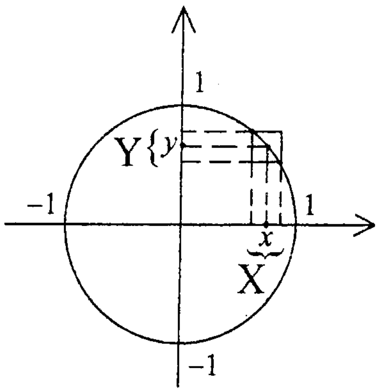

Рис. 6.2.

На практике для исследования свойств неявных функций не обязательно разрешать уравнения (6.1), (6.2) или систему (6.3) относительно переменной y (переменных $y_1, \ldots, y_m$), т.е. находить явную зависимость y от x ($y_1, \ldots, y_m$ от $x_1, \ldots, x_n$). Часто удается достаточно хорошо изучить неявную функцию по уравнению (системе), которыми она определяется. При этом главным оказывается вопрос о существовании неявной функции. В последующих пунктах этот вопрос мы будем решать локально, т.е. фиксировать точку с координатами (x_0, y_0) (соответственно $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ и $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$), удовлетворяющую уравнению (6.1) (уравнению (6.2), системе уравнений (6.3)), и для некоторой окрестности точки x_0 ($(x_1^0, \ldots, x_n^0)$)

искать окрестность точки y_0 (точек $y_1^0, \ldots, y_m^0$) такую, которая позволит однозначно определить неявную функцию $y = f(x)$ (функцию $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, набор функций $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$).

6.2. Существование и свойства неявной функции, определяемой одним уравнением

Теорема 6.1. *Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной по y в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда для некоторой окрестности точки x_0 (как области определения функции) и некоторой окрестности точки y_0 (как множества значений) существует единственная однозначная функция $y = f(x)$, непрерывная на всей своей области определения, обращающая уравнение (6.1) в верное равенство, и такая, что $y_0 = f(x_0)$. Если, кроме того, у функции $F(x, y)$ существует конечная частная производная по x, то функция $f(x)$ дифференцируема.*

Доказательство. Положим для определенности, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Так как по условию эта частная производная непрерывна, то она принимает только положительные значения в целой окрестности точки (x_0, y_0), т.е. существует такое $l > 0$, что для всех x и y : $|x - x_0| \leq l, |y - y_0| \leq l$ выполняется $F'_y(x, y) > 0$. Из этого следует, что функция $F(x, y)$ как функция одной переменной y при каждом фиксированном значении $x \in [x_0 - l, x_0 + l]$ является строго возрастающей на отрезке $[y_0 - l, y_0 + l]$. А поскольку по условию $F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x_0, y_0 - l) < 0, F(x_0, y_0 + l) > 0$. Ввиду непрерывности функции $F(x, y)$ эти неравенства сохранятся и для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, т.е. существует такое $\sigma > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \sigma$, выполняется $F(x, y_0 - l) < 0, F(x, y_0 + l) > 0$. Обозначим через m

наименьшее из чисел l и σ. Тогда для каждого фиксированного $x \in (x_0 - m, x_0 + m)$ непрерывная функция $F(x, y)$, как функция одной переменной y, принимает на отрезке $[y_0 - l, y_0 + l]$ промежуточное значение, равное нулю. В силу строгого возрастания этой функции такое значение y единственно, т.е. для каждого значения $x \in (x_0 - m, x_0 + m)$ существует единственное значение $y \in (y_0 - l, y_0 + l)$ такое, что $F(x, y) = 0$. Тем самым доказано существование на окрестности $(x_0 - m, x_0 + m)$ единственной однозначной функции $y = f(x)$, удовлетворяющей уравнению (6.1) и принимающей значения из окрестности $(y_0 - l, y_0 + l)$. Так как $F(x_0, y_0) = 0$, то, благодаря однозначности, функция $f(x)$ принимает в точке x_0 значение y_0, т.е. $y_0 = f(x_0)$ (рис. 6.3).

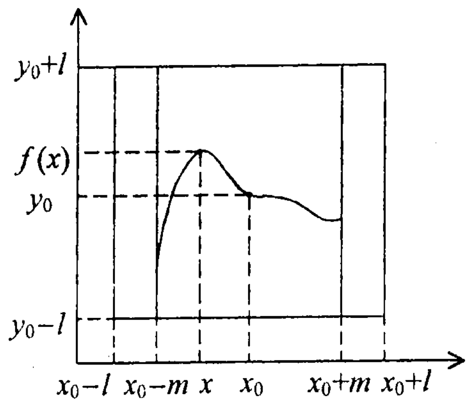

Рис. 6.3.

Докажем теперь непрерывность функции $f(x)$. Рассмотрим сначала точку x_0. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Можно считать, что $\varepsilon \leq l$. А тогда по предыдущей части доказательства $F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$. Из этого следует, что существует $\delta > 0$ (оно ищется так же, как искалось m в предыдущей части доказательства) такое, что для

всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняются неравенства $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$. Следовательно, отвечающее точке x значение $y = f(x)$ лежит между $y_0 - \varepsilon$ и $y_0 + \varepsilon$, т.е. $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Для доказательства непрерывности функции $f(x)$ в любой другой точке $x_1 \in (x_0 - m, x_0 + m)$ отметим, что пара $(x_1, f(x_1))$ является решением уравнения (6.1) и для нее выполнены все остальные условия теоремы (рис. 6.4). Следовательно, в силу доказанного, $f(x)$ непрерывна в точке x_1.

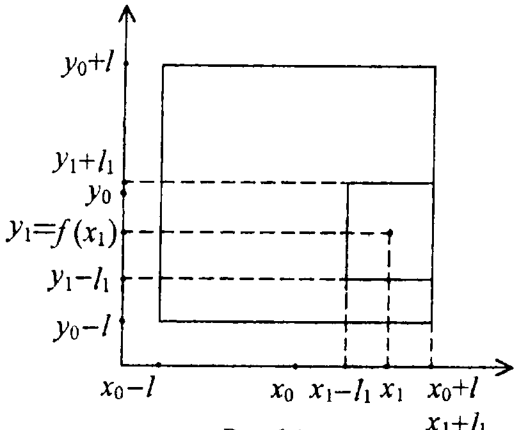

Рис. 6.4.

Докажем дифференцируемость функции $f(x)$ при условии существования $F'_x(x, y)$. Сначала опять рассмотрим точку x_0. По условию $F(x_0, y_0) = 0$. Для достаточно малых приращений Δx в точке $x_0 + \Delta x$ определена функция $f(x)$. Поэтому пара $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ тоже удовлетворяет уравнению (6.1).

Следовательно,

$$F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) - F(x_0, f(x_0)) = 0.$$

Преобразуем это равенство следующим образом

$$F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \quad - \quad F(x_0 + \Delta x, f(x_0)) +$$

$$+F(x_0+\Delta x, f(x_0)) \quad - \quad F(x_0, f(x_0)) = 0. \qquad (6.5)$$

По формуле Лагранжа конечных приращений имеем

$$F(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)) - F(x_0+\Delta x, f(x_0)) =$$
$$= F'_y(x_0+\Delta x, y_1)(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)),$$

где y_1 – промежуточное значение между $f(x_0)$ и $f(x_0+\Delta x)$. Если использовать эту формулу в (6.5) и поделить обе части получившегося равенства на Δx, то из него можно выразить $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$$
$$= -\frac{F(x_0+\Delta x, f(x_0)) - F(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0+\Delta x, y_1)\Delta x}. \qquad (6.6)$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, то $y_1 \to y_0 = f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. $F'_y(x,y)$ тоже непрерывна, поэтому $F'_y(x_0+\Delta x, y_1) \to F'_y(x_0, y_0)$ при $\Delta x \to 0$. Кроме того,

$$\frac{F(x_0+\Delta x, f(x_0)) - F(x_0, f(x_0))}{\Delta x} \to F'_x(x_0, f(x_0)) = F'_x(x_0, y_0)$$

при $\Delta x \to 0$. Итак, предел правой части равенства (6.6) при $\Delta x \to 0$ существует, значит, существует и предел левой части, т.е. $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))}.$$

Для доказательства дифференцируемости в произвольной точке $x \in (x_0 - m, x_0 + m)$ можно воспользоваться тем же приемом, что и при доказательстве непрерывности. Теорема полностью доказана. □

Результат теоремы 6.1 можно обобщить на случай неявной функции, зависящей от нескольких переменных.

Теорема 6.2. *Пусть функция $F(x_1, \dots, x_n, y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной по y в некоторой окрестности точки $M(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$, причем $F(M) = 0$, $F'_y(M) \neq 0$. Тогда для некоторой окрестности точки $M'(x_1^0, \dots, x_n^0)$ (как области определения функции) и некоторой окрестности точки y_0 (как множества значений) существует единственная однозначная функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$, непрерывная на всей своей области определения, обращающая уравнение (6.2) в верное равенство, и такая, что $y_0 = f(M')$. Если, кроме того, у функции $F(x_1, \dots, x_n, y)$ существует частная производная по переменной x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), то у функции $f(x_1, \dots, x_n)$ существует частная производная по этой же переменной. А если функция F дифференцируема, то и функция f дифференцируема.*

Доказательство теоремы 6.2 практически не отличается от доказательства теоремы 6.1. Попробуйте провести его самостоятельно!

6.3. Существование и свойства неявных функций, определяемых системой уравнений

Более сложным оказывается случай неявных функций, определяемых системой уравнений (6.3). Сформулируем соответствующую теорему без доказательства. Для этого требуется новое понятие.

Пусть функции $g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_l(x_1, \dots, x_k)$ определены и дифференцируемы на некотором множестве Ω. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial x_1} & \frac{\partial g_l}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

Эта матрица определена в каждой точке множества Ω и называется *матрицей Якоби*. При $k = l$ определитель этой матрицы называется *якобианом* и обозначается $\frac{D(g_1, \ldots, g_l)}{D(x_1, \ldots, x_l)}$. В случае $k \neq l$ можно рассматривать миноры матрицы Якоби, для них оставим такое же обозначение.

Теорема 6.3. *Пусть функции* $F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ *определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $M(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, *причем частные производные этих функций по переменным* $y_1, \ldots, y_m$ *непрерывны. Пусть, кроме того, для всех* $i \in \{1, \ldots, m\}$ $F_i(M) = 0$, *а* $\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(M) \neq 0$. *Тогда для некоторой окрестности точки* $M'(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *(как области определения функций) и некоторых окрестностей точек* $y_1^0, \ldots, y_m^0$ *(как множеств значений соответствующих функций) существует единственный набор однозначных функций* $y_1 = f(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$, *дифференцируемых на всей своей области определения, обращающих систему* (6.3) *в систему верных равенств и таких, что* $y_i^0 = f_i(M')$ *для всех* $i \in \{1, \ldots, m\}$.

6.4. Вычисление производных и дифференциалов неявных функций

В доказательстве теоремы 6.1 попутно выведена формула для производной неявной функции

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Дифференцируя это равенство дальше, получим формулы для производных более высокого порядка (при условии дифференцируемости функции $F(x, y)$ до соответствующего порядка). Правда, во всех этих формулах значения производных выражаются не только через значения переменной x, но и через значения самой неявной функции $f(x)$, часто неизвестной нам. Но для изучения свойств функции $f(x)$ бывает достаточно и такой информации.

Аналогично можно рассмотреть вопрос о нахождении частных производных неявной функции нескольких переменных. Но можно поступить и по-другому. А именно, по теореме 6.2 сложная функция $g(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ тождественно равна нулю в области определения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно, равны нулю и ее частные производные по всем переменным $x_1, \ldots, x_n$. Например, $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$. С другой стороны, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot 0 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot 0.$$

В итоге

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0. \qquad (6.7)$$

Из этого равенства можно выразить $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$. Равенство (6.7) показывает, что функция переменных $x_1, \ldots, x_n$, записанная в левой части, тоже тождественно равна нулю. Тогда будут равны нулю и ее частные производные. Сосчитаем, например, частную производную по x_2 (для краткости опустим в записи значения точек, в которых вычисляются производные)

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial y}\right) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + {}$$
$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

Из этого равенства можно выразить $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ (частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ найдены на первом этапе).

В случае неявных функций, определяемых системой функциональных уравнений, подобные рассуждения можно применить к каждому уравнению системы. В результате на первом этапе при вычислении частных производных, например, по переменной x_1, появится система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

Определителем этой системы относительно $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}$ является $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение. Решая ее, найдем значения частных производных всех функций $f_1, \ldots, f_m$ по переменной x_1. Продолжая рассуждения дальше, получим частные производные более высоких порядков (при условии дифференцируемости функций $F_1, \ldots, F_m$ до соответствующего порядка).

Аналогичные рассуждения можно применить и для вычисления дифференциалов неявных функций. Например, в случае уравнения (6.2) сложная функция $g(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ тождественно равна нулю в области определения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно, равен нулю и ее дифференциал dg. С другой стороны, при условии дифференцируемости функции $F(x_1, \ldots, x_n, y)$, благодаря свойству инвариантности формы дифференциала первого порядка, имеем

$$0 = dg = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F}{\partial y} df.$$

Из этого равенства можно выразить df. А если еще раз продифференцировать это равенство, получится

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} dx_1 + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} dx_n + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_1} dy\right) dx_1 + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} dx_1 + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} dx_n + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_n} dy\right) dx_n +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y} dx_1 + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial y} dx_n + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy\right) df + \frac{\partial F}{\partial y} d^2 f = 0.$$

Подставляя в новое равенство найденное на предыдущем этапе значение df, мы можем выразить $d^2 f$. И т.д.

В приведенных ниже примерах проверка условий теорем о существовании и дифференцируемости неявных функций предоставляется читателю.

Пример 6.1. Пусть функция $y = f(x)$ определяется неявно уравнением $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$. Требуется найти $f'(x)$ и $f''(x)$. Подставляя в уравнение зависимость $y = f(x)$, получим верное равенство. Продифференцируем это равенство по x

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2} \quad \text{или} \quad x+yy'=xy'-y,$$

где $y=f(x)$, $y'=f'(x)$. Продифференцируем полученное равенство еще раз

$$1+(y')^2+yy''=xy''.$$

Из последних двух равенств выражаем $y'=f'(x)$ и $y''=f''(x)$

$$y'=\frac{x+y}{x-y}; \quad y''=\frac{1+(y')^2}{x-y}=2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}.$$

Пример 6.2. Найти z''_{xy}, если $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$, где F – дважды дифференцируемая функция.

Подставляя $z=f(x,y)$ в уравнение и находя частные производные по x и y полученной функции, которая тождественно равна нулю, имеем

$$F'_1\cdot(1+z'_x)+F'_2\cdot(2x+2zz'_x)=0, \tag{6.8}$$

$$F'_1\cdot(1+z'_y)+F'_2\cdot(2y+2zz'_y)=0.$$

Из этих равенств выражаем z'_x и z'_y

$$z'_x=-\frac{F'_1+2xF'_2}{F'_1+2zF'_2}; \quad z'_y=-\frac{F'_1+2yF'_2}{F'_1+2zF'_2}.$$

Вычислим теперь частную производную по y от обеих частей верного равенства (6.8)

$$\begin{aligned}&(F''_{11}(1+z'_y)+F''_{12}(2y+2zz'_y))(1+z'_x)+F'_1z''_{xy}+\\&+(F''_{21}(1+z'_y)+F''_{22}(2y+2zz'_y))(2x+2zz'_x)+\\&+F'_2(2z'_yz'_x+2zz''_{xy})=0.\end{aligned}$$

Выражая из этого равенства z''_{xy} и подставляя найденные на первом этапе z'_x и z'_y, имеем

$$\begin{aligned}z''_{xy} &= -\frac{4(x-z)(y-z)}{(F'_1+2zF'_2)^3}((F'_2)^2F''_{11}-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_1)^2F''_{22})-\\&-\frac{2(F'_1+2xF'_2)(F'_1+2yF'_2)F'_2}{(F'_1+2zF'_2)^3}.\end{aligned}$$

Пример 6.3. Найти $y'(x)$ и $z'(x)$, если

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

Подставляя в уравнения системы $y(x), z(x)$ и дифференцируя по x полученные верные равенства, имеем

$$\begin{cases} 1+y'+z'=0 \\ 2x+2yy'+2zz'=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$y'=\frac{z-x}{y-z}, \quad z'=\frac{x-y}{y-z}.$$

Пример 6.4. Найти dz и d^2z, если $x^2+y^2+z^2=1$.

Подставляя в уравнение зависимость $z=f(x,y)$ и дифференцируя полученное тождество, имеем

$$2xdx+2ydy+2zdz=0,$$

откуда

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy.$$

Продифференцируем тождество еще раз (после сокращения на 2)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + zd^2z = 0.$$

Подставляя в это равенство найденное значение dz, выражаем d^2z

$$d^2z = \left(-\frac{1}{z} - \frac{x^2}{z^3}\right)dx^2 + \left(-\frac{1}{z} - \frac{y^2}{z^3}\right)dy^2 - \frac{2xy}{z^3}dxdy.$$

6.5. Замена переменных в дифференциальных выражениях

Методы дифференцирования функций, заданных параметрически, сложных функций и неявно заданных функций могут использоваться для замены переменных в дифференциальных выражениях – одного из основных способов решения дифференциальных уравнений. В этом пункте мы рассмотрим лишь вычислительный аспект замены переменных, не затрагивая проблемы теоретического обоснования проводимых операций.

I. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих обыкновенные производные.

Пусть дано дифференциальное выражение

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}),$$

и в нем требуется перейти к новой переменной t и новой функции $u(t)$ по формулам

$$\begin{cases} x = f(t,u) \\ y = g(t,u). \end{cases} \tag{6.9}$$

Так как u является функцией от t, то система (6.9) при некоторых условиях определяет параметрически функцию $y(x)$.

Поэтому производную $y'(x)$ можно выразить следующим образом

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{g'_t + g'_u u'}{f'_t + f'_u u'}. \tag{6.10}$$

Обозначим $z = y'(x)$. Формула (6.10) показывает зависимость z от t и u, т.е. $z = h(t,u)$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x = f(t,u) \\ z = h(t,u). \end{cases}$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, найдем z'_x, т.е. y''_{x^2}. Эта производная окажется выраженной через t, u, u', u''. Таким образом можно найти производную функции $y(x)$ любого порядка. Подставив найденные значения в Φ, получим новое дифференциальное выражение

$$\Psi(t, u, u', u'', \dots, u^{(n)}).$$

В частном случае, когда меняется только независимая переменная x на переменную t, т.е.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y(x) = u(t), \end{cases}$$

формулы оказываются более простыми. А именно, дифференцируя верное равенство $y(f(t)) = u(t)$, получим

$$y'_x f'_t = u'_t; \quad y''_{x^2}(f'_t)^2 + y'_x f''_{t^2} = u''_{t^2},$$

т.е.

$$y''_{x^2} = \frac{u''_{t^2} - y'_x f''_{t^2}}{(f'_t)^2} = \frac{u''_{t^2} f'_t - u'_t f''_{t^2}}{(f'_t)^3}$$

и т.д.

Пример 6.5. $\Phi(x,y,y',y'') = y'' + (x+y)(1+y')^3$, формулы замены: $x = u+t, y = u-t$, где $u = u(t)$. Составляем систему

$$\begin{cases} x = u(t) + t \\ y = u(t) - t, \end{cases}$$

находим производные первого и второго порядка функции $y(x)$, задаваемой этой системой параметрически

$$y'_x = \frac{u'_t - 1}{u'_t + 1},$$

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{u''_{t^2}(u'_t+1) - (u'_t-1)u''_{t^2}}{(u'_t+1)^3} = 2\frac{u''_{t^2}}{(u'_t+1)^3}.$$

Подставим значения x, y, y', y'' в Φ

$$2\frac{u''}{(u'+1)^3} + 2u\left(1 + \frac{u'-1}{u'+1}\right)^3,$$

т.е.

$$\frac{2}{(u'+1)^3}(u'' + 8u(u')^3).$$

II. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих частные производные.

Пусть дано дифференциальное выражение

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right) \tag{6.11}$$

и в нем требуется перейти к новым независимым переменным u, v и новой функции $w = w(u,v)$ по формулам $x = f(u,v,w), y = g(u,v,w)$, $z = h(u,v,w)$. Подставляя в последнюю формулу значения $z = z(x,y), x = f(u,v,w), y = g(u,v,w), w = w(u,v)$, получим верное равенство

$$z(f(u,v,w(u,v)), g(u,v,w(u,v))) = h(u,v,w(u,v)).$$

Найдем частные производные по u, v от обеих частей этого равенства

$$\begin{cases} z'_x(f'_u + f'_w w'_u) + z'_y(g'_u + g'_w w'_u) = h'_u + h'_w w'_u \\ z'_x(f'_v + f'_w w'_v) + z'_y(g'_v + g'_w w'_v) = h'_v + h'_w w'_v. \end{cases} \tag{6.12}$$

Решая эту систему относительно z'_x, z'_y, найдем их выражения через частные производные функций f, g, h и частные производные новой функции w.

Вычисляя затем частные производные по u, v в уравнениях системы (6.12), получим новую систему из четырех уравнений для определения четырех частных производных второго порядка функции $z(x,y)$ и т.д.

В частном случае, когда меняются только независимые переменные, а значения функции $z = z(x,y)$ остаются прежними, т.е. $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z(x,y) = w(u,v)$, формулы оказываются более простыми

$$\begin{cases} z'_x f'_u + z'_y g'_u = w'_u \\ z'_x f'_v + z'_y g'_v = w'_v. \end{cases}$$

Наконец, если формулы замены выражают не старые переменные через новые, а наоборот, то в формулах (6.10) и (6.12) просто меняются ролями производные старой и новой функций.

Пример 6.6. $\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, формулы замены: $u = x+y, v = x-y, w = xy - z$.

Подставим в последнее уравнение значения входящих в него функций от x, y :

$$w(x+y, x-y) = xy - z(x,y).$$

Найдем частные производные по x и y от обеих частей этого верного равенства

$$\begin{cases} w'_u \cdot 1 + w'_v \cdot 1 = y - z'_x \\ w'_u \cdot 1 + w'_v \cdot (-1) = x - z'_y. \end{cases}$$

Найдем частные производные по x и y от уравнений этой системы

$$\begin{cases} w''_{u^2} + w''_{uv} + w''_{vu} + w''_{v^2} = -z''_{x^2} \\ w''_{u^2} - w''_{uv} + w''_{vu} - w''_{v^2} = 1 - z''_{xy} \\ w''_{u^2} + w''_{uv} - w''_{vu} - w''_{v^2} = 1 - z''_{yx} \\ w''_{u^2} - w''_{uv} - w''_{vu} + w''_{v^2} = -z''_{y^2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$z''_{x^2} = -w''_{u^2} - w''_{uv} - w''_{vu} - w''_{v^2},$$

$$z''_{xy} = 1 - w''_{u^2} + w''_{uv} - w''_{vu} + w''_{v^2},$$

$$z''_{y^2} = -w''_{u^2} + w''_{uv} + w''_{vu} - w''_{v^2}.$$

Подставляем найденные значения в Φ

$$2 - 4w''_{u^2} + 2w''_{uv} - 2w''_{vu}.$$

Пример 6.7. $\Phi\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z$, формулы замены: $x = u, y = uv$, значения функции z остаются прежними, т.е. $z(x,y) = w(u,v)$.

Составим верное равенство $z(u, uv) = w(u,v)$. Ищем частные производные по переменным u и v

$$\begin{cases} z'_x \cdot 1 + z'_y \cdot v = w'_u \\ z'_x \cdot 0 + z'_y \cdot u = w'_v. \end{cases}$$

Отсюда

$$z'_y = \frac{w'_v}{u}, \quad z'_x = w'_u - vz'_y = w'_u - \frac{v}{u}w'_v.$$

Подставляем найденные выражения для z'_x, z'_y, а также $x = u$, $y = uv$, $z(x,y) = w(u,v)$ в Φ

$$u\left(w'_u - \frac{v}{u}w'_v\right) + uv\frac{w'_v}{u} - w = uw'_u - w.$$

7. Экстремумы функций нескольких переменных

7.1. Локальные экстремумы

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена на некотором открытом множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Точка $M \in D$ называется точкой *локального максимума* (*локального минимума*) функции f, если значение $f(M)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений этой функции в некоторой окрестности точки M (т.е. существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $(x_1, \ldots, x_n) \in O_\delta(M)$ выполняется $f(x_1, \ldots, x_n) \le f(M)$ $(f(x_1, \ldots, x_n) \ge f(M))$). Точки локального максимума и локального минимума называются точками *локального экстремума*.

Для локального экстремума дифференцируемой функции нескольких переменных можно обобщить необходимое и достаточные условия существования со случая одной переменной.

Лемма 7.1. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки M, являющейся точкой локального экстремума, и существует в точке M конечная частная производная функции f по какой-то переменной x_i, то эта частная производная равна* 0.

Доказательство. Обозначим координаты точки $M(x_1^0,\dots,x_n^0)$ и рассмотрим функцию одной переменной x_i : $g(x_i) = f(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0)$. Существование конечной частной производной функции $f(x_1,\dots,x_n)$ по переменной x_i в точке M эквивалентно дифференцируемости функции $g(x_i)$ в точке x_i^0. Очевидно, что функция $g(x_i)$ имеет в точке x_i^0 локальный экстремум. А тогда $g'(x_i^0) = 0$. Это означает, что $f'_{x_i}(M) = 0$. Лемма доказана. □

Теорема 7.1. (Необходимое условие локального экстремума). *Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$ определена на некотором открытом множестве D и дифференцируема в точке $M \in D$, являющейся точкой локального экстремума функции f. Тогда $df(M) = 0$.*

Доказательство непосредственно вытекает из леммы, если ее применить ко всем переменным x_i $(i \in \{1,\dots,n\})$.

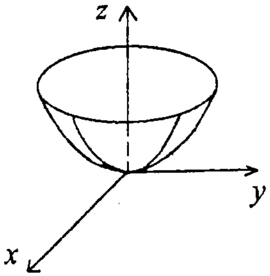

Рис. 7.1.

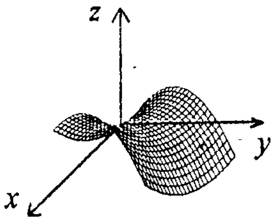

Рис. 7.2.

Точки множества D, в которых у функции f существует и равен нулю дифференциал, будем называть *стационарными.* Из теоремы 7.1 следует, что точками локального экстремума могут быть только стационарные точки и точки, в которых функция не дифференцируема. Оказывается, не любая стационарная точка является точкой локального экстремума у дифференцируемой функции. Например, для функции

$f(x,y) = x^2 + y^2$, $D = \mathbb{R}^2$ (см. рис. 7.1) точка $(0;0)$ является и стационарной, и точкой локального минимума (т.к. $f(x,y) = x^2 + y^2 \ge 0 = f(0,0)$), а для функции $f(x,y) = x^2 - y^2$, $D = \mathbb{R}^2$ (см. рис. 7.2) точка $(0;0)$ является стационарной, но не является точкой локального экстремума (т.к. в любой окрестности точки $(0;0)$ функция принимает и положительные $(f(\varepsilon,0) = \varepsilon^2)$, и отрицательные $(f(0,\varepsilon) = -\varepsilon^2)$ значения). Следовательно, для исследования локального экстремума нужны некоторые достаточные условия.

Предварительно вспомним известное из алгебры понятие квадратичной формы.

Квадратичной формой относительно переменных $t_1,\dots,t_n$ называется функция

$$\Phi(t_1,\dots,t_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}t_it_j,$$

где при всех $i,j \in \{1,\dots,n\}$ $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратичная форма называется *положительно определенной (отрицательно определенной),* если при всех значениях $t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}$, одновременно не обращающихся в 0, функция $\Phi(t_1,\dots,t_n)$ принимает только строго положительные (строго отрицательные) значения.

Квадратичная форма называется *знакопеременной,* если она принимает как строго положительные, так и строго отрицательные значения.

Теорема 7.2. (Достаточные условия локального экстремума). *Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $M(x_1^0,\dots,x_n^0)$, причем в самой точке M все частные производные второго порядка непрерывны. Пусть, кроме того, M – стационарная точка. Тогда, если $d^2f(M)$ представляет собой знакоопределенную квадратичную форму относительно*

$dx_1, \dots, dx_n$, то точка M является точкой локального экстремума (локального максимума, если отрицательно определенная, и локального минимума, если положительно определенная форма). Если $d^2f(M)$ представляет собой знакопеременную квадратичную форму, то в точке M локального экстремума нет.

Доказательство. Распишем приращение функции f в точке M по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(M_1) - f(M) = df(M) + \frac{1}{2}d^2f(M + \theta(M_1 - M)),$$

где M_1 имеет координаты $(x_1^1, \dots, x_n^1)$, $dx_i = \Delta x_i = x_i^1 - x_i^0$ $(i \in \{1, \dots, n\})$, $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^1 - x_i^0)^2}$. По условию $df(M) = 0$, значит, формулу можно переписать следующим образом:

$$f(M_1) - f(M) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_ix_j}(M + \theta(M_1 - M))\Delta x_i \Delta x_j.$$

Поскольку все $f''_{x_ix_j}$ непрерывны в точке M, то при всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется

$$f''_{x_ix_j}(M + \theta(M_1 - M)) \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} f''_{x_ix_j}(M).$$

Поэтому

$$f''_{x_ix_j}(M + \theta(M_1 - M)) = f''_{x_ix_j}(M) + \alpha_{ij}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n),$$

где $\alpha_{ij} \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0$. Таким образом,

$$f(M_1) - f(M) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_ix_j}(M)\Delta x_i \Delta x_j + \alpha(\rho)\rho^2,$$

где

$$\alpha(\rho) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)\frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_j}{\rho} \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Обозначим $h_i = \dfrac{\Delta x}{\rho}$, $(i \in \{1, \dots, n\})$. Тогда для $M_1 \neq M$

$$\begin{aligned} f(M_1) - f(M) &= \frac{1}{2}\rho^2 \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_ix_j}(M)h_ih_j + \alpha(\rho)\rho^2 = \\ &= \rho^2(\Phi(h_1, \dots, h_n) + \alpha(\rho)), \end{aligned}$$

где

$$\Phi(h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j, \quad a_{ij} = f''_{x_ix_j}(M).$$

Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2 = 1$, т.е. функция $\Phi(h_1, \dots, h_n)$ определена в точках n-мерной сферы единичного радиуса.

I. Рассмотрим сначала случай положительно определенной квадратичной формы $d^2f(M)$. В этом случае функция $\Phi(h_1, \dots, h_n)$, определенная на единичной сфере, принимает только положительные значения. Кроме того, очевидно, что $\Phi(h_1, \dots, h_n)$ непрерывна, а область ее определения – ограниченное замкнутое множество. Следовательно, по второй теореме Вейерштрасса $\Phi(h_1, \dots, h_n)$ достигает своего инфимума, т.е. $\inf \Phi(h_1, \dots, h_n) = \Phi(h_1^0, \dots, h_n^0) = \mu > 0$. Так как функция $\alpha(\rho)$ является бесконечно малой, то для достаточно малых ρ выполняется $|\alpha(\rho)| < \mu$. Поэтому для таких ρ

$$f(M_1) - f(M) = \rho^2(\Phi(h_1, \dots, h_n) + \alpha(\rho)) \geq \rho^2(\mu + \alpha(\rho)) \geq 0,$$

т.е. точка M является точкой локального минимума.

II. В случае отрицательно определенной квадратичной формы $d^2f(M)$ аналогично доказывается, что точка M – точка локального максимума.

III. Пусть $d^2f(M)$ – знакопеременная квадратичная форма, т.е. существуют два набора $(t'_1, \ldots, t'_n)$ и $(t''_1, \ldots, t''_n)$ значений для $dx_1, \ldots, dx_n$ таких, что в точках первого набора $d^2f(M)$ принимает положительное значение, а в точках второго набора – отрицательное значение. Это эквивалентно тому, что $\Phi(h'_1, \ldots, h'_n) > 0$ и $\Phi(h''_1, \ldots, h''_n) < 0$, где

$$h'_i = \frac{t'_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t'_i)^2}}, \quad h''_i = \frac{t''_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t''_i)^2}} \quad (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

Рассмотрим переменные точки M' с координатами $x'_i = x_i^0 + \rho h'_i$ и M'' с координатами $x''_i = x_i^0 + \rho h''_i$, где $\rho > 0$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Легко посчитать, что $\rho(M', M) = \rho(M'', M) = \rho$. Кроме того, для приращения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке M справедливы формулы

$$f(M') - f(M) = \rho^2(\Phi(h'_1, \ldots, h'_n) + \alpha'(\rho)),$$

$$f(M'') - f(M) = \rho^2(\Phi(h''_1, \ldots, h''_n) + \alpha''(\rho)),$$

где $\alpha'(\rho))$ и $\alpha''(\rho))$ – бесконечно малые при $\rho \to 0$. Поэтому для достаточно маленьких ρ выполняется

$$|\alpha'(\rho)| < \Phi(h'_1, \ldots, h'_n), \quad |\alpha''(\rho)| < \Phi(h''_1, \ldots, h''_n).$$

Итак, для сколь угодно малого ρ найдутся такие точки M' и M'', что $\rho(M', M) = \rho(M'', M) = \rho$, $f(M') > f(M)$, $f(M'') < f(M)$, т.е. точка M не является точкой локального экстремума. Теорема доказана. □

Для функций двух переменных $f(x, y)$ достаточные условия экстремума могут быть сформулированы более удобно для проверки.

Теорема 7.3. *Пусть функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки M и дважды непрерывно дифференцируема в самой точке M, которая является стационарной. Тогда, если $AC - B^2 > 0$, где $A = f''_{x^2}(M)$, $B = f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$, $C = f''_{y^2}(M)$, то M является точкой локального экстремума (локального максимума при $A < 0$ и локального минимума при $A > 0$. Если $AC - B^2 < 0$, то M не является точкой локального экстремума.*

Замечание 7.1. В случае $AC - B^2 = 0$ для исследования на экстремум нужно привлекать дифференциалы более высокого порядка.

Доказательство теоремы. Для функции двух переменных $f(x, y)$ ее приращение в точке M можно записать более конкретно, чем в теореме 7.2:

$$f(M_1) - f(M) = \frac{1}{2}(A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2) + \alpha(\rho)\rho^2,$$

где точка M_1 имеет координаты $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Обозначим $h_1 = \dfrac{\Delta x}{\rho}$, $h_2 = \dfrac{\Delta y}{\rho}$,

$$\Phi(h_1, h_2) = \frac{1}{2}(Ah_1^2 + 2Bh_1h_2 + Ch_2^2).$$

Тогда для $M_1 \neq M$

$$f(M_1) - f(M) = \rho^2(\Phi(h_1, h_2) + \alpha(\rho)),$$

где $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

I. Рассмотрим случай $AC - B^2 > 0$, $A > 0$. В этом случае

$$\begin{aligned}\Phi(h_1, h_2) &= \frac{1}{2A}(A^2h_1^2 + 2ABh_1h_2 + ACh_2^2) = \\ &= \frac{1}{2A}((Ah_1 + Bh_2)^2 + ACh_2^2 - B^2h_2^2) = \\ &= \frac{1}{2A}((Ah_1 + Bh_2)^2 + (AC - B^2)h_2^2). \qquad (7.1)\end{aligned}$$

Поскольку h_1 и h_2 не могут одновременно обратиться в ноль, то $\Phi(h_1, h_2)$ принимает только положительные значения. Дальше рассуждения такие же, как в доказательстве теоремы 7.2.

II. В случае $AC - B^2 > 0$, $A < 0$ формула (7.1) показывает, что функция $\Phi(h_1, h_2)$ принимает только отрицательные значения, и мы приходим к случаю II доказательства теоремы 7.2.

III. Пусть $AC - B^2 < 0$.

а) Если $A \neq 0$, то, полагая в (7.1) $h_1' = 1$, $h_2' = 0$, получим $\Phi(h_1', h_2') = \dfrac{A}{2}$, а полагая $h_1'' = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $h_2'' = -\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, получим $\Phi(h_1'', h_2'') = \dfrac{1}{2A}(AC - B^2)(h_2'')^2$. Так как $AC - B^2 < 0$, то $\Phi(h_1', h_2')$ и $\Phi(h_1'', h_2'')$ имеют противоположные знаки, т.е. $\Phi(h_1, h_2)$ является знакопеременной квадратичной формой. Доказательство завершает ссылка на соответствующий случай теоремы 7.2.

б) Если $A = 0$, а $C \neq 0$, то можно повторить рассуждения случая а), поменяв ролями переменные x и y.

в) Если $A = C = 0$, то $B \neq 0$, поскольку $AC - B^2 < 0$. В этом случае $\Phi(h_1, h_2) = Bh_1h_2$ – тоже знакопеременная квадратичная форма.

Пример 7.1. $f(x,y) = x^2 + y^2$. Единственная точка возможного экстремума – стационарная точка $(0,0)$. В ней $A = 2 > 0, AC - B^2 = 4 > 0$. Следовательно, точка $(0,0)$ – точка локального минимума.

Пример 7.2. $f(x,y) = x^2 - y^2$. Точка $(0,0)$ тоже является единственной точкой возможного экстремума. Но $AC - B^2 = -4 < 0$, поэтому у функции нет локальных экстремумов.

Пример 7.3. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$. Найдем частные производные первого порядка

$$f_x' = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad f_y' = 6xy - 36.$$

Составляем систему уравнений для нахождения стационарных точек

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Выражая y из второго уравнения и подставляя в первое, получим биквадратное уравнение

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad \text{или} \quad (x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0.$$

Таким образом, стационарными являются четыре точки $(3,2), (-3,-2), (2,3), (-2,-3)$. Вычисляем частные производные второго порядка

$$f_{x^2}'' = 6x, \quad f_{xy}'' = f_{yx}'' = 6y, \quad f_{y^2}'' = 6x.$$

Для точки $(3,2)$ $A = 18 > 0$, $AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0$. Следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум $f(3,2) = -100$. Для точки $(-3,-2)$ $A = -18 < 0$, $AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0$. Следовательно, в этой точке функция имеет локальный максимум $f(-3,-2) = 152$. Для точек $(2,3), (-2,-3)$ $AC - B^2 = 12^2 - 18^2 < 0$. Следовательно, в этих точках локального экстремума нет.

7.2. Условные экстремумы

Часто на практике приходится искать экстремумы функции нескольких переменных при условии, что переменные как-то связаны между собой. А именно, помимо функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенной на открытом множестве D, рассмотрим еще функции $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n)$ $(m < n)$ с той же областью определения D. Обозначим E – множество решений системы

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ F_m = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Будем говорить, что функция f имеет *условный экстремум* (*условный максимум* или *условный минимум*) в точке $M \in D$ относительно уравнений связи (7.2), если значение $f(M)$ является экстремальным (наибольшим или наименьшим) среди всех значений, принимаемых функцией f на пересечении множества E с некоторой окрестностью точки M.

Для нахождения точек условного экстремума иногда возможен следующий достаточно простой способ: решаем систему (7.2) относительно $x_1, \dots, x_m$

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

затем подставляем найденные значения в функцию f и исследуем полученную функцию $n - m$ переменных $f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n)$ на обычный локальный экстремум. Если точка $(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$ является точкой локального экстремума такой сложной функции, то точка $(x^0_1, \dots, x^0_n)$, где $x^0_1 = g_1(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n), \dots, x^0_m = g_m(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$, является точкой условного экстремума функции f относительно уравнений связи (7.2).

Пример 7.4. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $F(x,y) = x + y - 1$ (т.е. уравнение связи $x + y - 1 = 0$). Выражаем y через x из уравнения связи и подставляем в f: $f(x, y(x)) = 2x^2 - 2x + 1$. Для этой функции точка $x_0 = \dfrac{1}{2}$ является точкой локального минимума. Следовательно, точка $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ является точкой условного минимума функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ относительно уравнения связи $x + y = 1$.

Однако такой простой способ не всегда возможен, поскольку систему (7.2) не всегда удается разрешить. В этом

случае можно воспользоваться *методом неопределенных множителей* (*методом Лагранжа*), который применяется для дважды дифференцируемых функций $f, F_1, \dots, F_m$ и состоит в следующем (теоретическое обоснование метода из-за сложности опустим).

Рассмотрим новую функцию $n + m$ переменных

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) &= f(x_1, \dots, x_n) + \\ + \lambda_1 F_1(x_1, \dots, x_n) + \dots &+ \lambda_m F_m(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

которую называют функцией Лагранжа.

I. На первом этапе находим точки возможного условного экстремума. Для этого нужно найти стационарные точки функции Φ, т.е. решить систему

$$\begin{cases} \Phi'_{x_1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Phi'_{x_n} = 0 \\ \Phi'_{\lambda_1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Phi'_{\lambda_m} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f'_{x_1} + \lambda_1 (F_1)'_{x_1} + \dots + \lambda_m (F_m)'_{x_1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_n} + \lambda_1 (F_1)'_{x_n} + \dots + \lambda_m (F_m)'_{x_n} = 0 \\ F_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m = 0. \end{cases}$$

Если $(x^0_1, \dots, x^0_n, \lambda^0_1, \dots, \lambda^0_m)$ – стационарная точка функции Φ, то $(x^0_1, \dots, x^0_n)$ – точка возможного условного экстремума функции f.

II. На втором этапе для каждой точки $(x^0_1, \dots, x^0_n)$, найденной на первом этапе, рассматриваем свою функцию $g(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda^0_1, \dots, \lambda^0_m)$. Вычисляем $d^2 g(x^0_1, \dots, x^0_n)$. Кроме того, дифференцируя уравнения связи в точке $(x^0_1, \dots, x^0_n)$, получаем систему верных равенств

$$\begin{cases} (F_1)'_{x_1} dx_1 + \dots + (F_1)'_{x_n} dx_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (F_m)'_{x_1} dx_1 + \dots + (F_m)'_{x_n} dx_n = 0. \end{cases}$$

Если ранг матрицы Якоби для функций $F_1, \ldots, F_m$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ равен m, то из этой системы можно выразить некоторые m дифференциалов переменных $x_1, \ldots, x_n$ через остальные дифференциалы. Подставим найденные значения в $d^2g(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Получится некоторая квадратичная форма относительно $(n-m)$ переменных. Если эта квадратичная форма положительно определенная, то в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ условный минимум, отрицательно определенная – условный максимум, знакопеременная – нет условного экстремума.

Пример 7.5. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $F(x,y) = x + y - 1$. Составляем функцию $\Phi(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 1)$. Система для нахождения точек возможного условного экстремума

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ -2y + \lambda = 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $x + y = 0$, что противоречит третьему уравнению. Следовательно, система несовместна, и функция не имеет условных экстремумов.

Пример 7.6. $f(x,y) = xy$, $F(x,y) = x + y - 1$. Составляем функцию $\Phi(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$. Система для нахождения точек возможного условного экстремума

$$\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Решением этой системы является единственный набор $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$. Рассматриваем функцию $g(x,y) = \Phi(x,y,\lambda_0) = xy - \frac{1}{2}(x + y - 1)$. Для нее $g''_{x^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$, $g''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = g''_{yx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$, $g''_{y^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$. Следовательно,

$d^2g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2dxdy$. Из уравнения связи находим зависимость между dx и dy : $dx + dy = 0$. Подставляя значение $dy = -dx$ в $d^2g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, получаем отрицательно определенную квадратичную форму $-2(dx)^2$. Следовательно, точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – это точка условного максимума функции $f(x,y) = xy$ относительно уравнения связи $x + y = 1$.

Пример 7.7. На двух предприятиях отрасли необходимо изготовить 180 экземпляров некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x изделий на I предприятии, равны $4x + x^2$ тысяч руб., а затраты, обусловленные изготовлением y изделий на II предприятии, составляют $8y + y^2$ тысяч руб. Требуется определить, сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты были минимальными.

Решение. Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f(x,y) = 4x + x^2 + 8y + y^2$$

при условии $x + y = 180$ (и, конечно, $x \geq 0, y \geq 0$). Составим функцию Лагранжа

$$\Phi(x,y,\lambda) = 4x + x^2 + 8y + y^2 + \lambda(x + y - 180).$$

Приравняем нулю частные производные функции Φ

$$\begin{cases} 4 + 2x + \lambda = 0 \\ 8 + 2y + \lambda = 0 \\ x + y = 180. \end{cases}$$

Решением этой системы является набор $x_0 = 91$, $y_0 = 89$, $\lambda_0 = -186$. Этот набор удовлетворяет условию $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$. Для функции $g(x,y) = 4x + x^2 + 8y + y^2 - 186(x + y - 180)$ дифференциал второго порядка в точке (x_0, y_0) равен

$$d^2g(x_0, y_0) = 2dx^2 + 2dy^2.$$

Квадратичная форма положительно определенная, поэтому нет необходимости находить зависимость между dx и dy из уравнения связи. Итак, точка $(91, 89)$ – точка условного минимума.

Ответ. Оптимальный способ размещения заказа – 91 изделие на I предприятии и 89 – на II предприятии. При этом затраты будут минимальными и составят 17 278 000 руб.

7.3. Наибольшие и наименьшие значения функции

До сих пор мы предполагали, что область определения рассматриваемой функции является открытым множеством. Для случая замкнутого ограниченного множества D и непрерывной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ благодаря теореме Вейерштрасса можно поставить вопрос о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции. Если точка, в которой принимается одно из этих значений, является внутренней, то, очевидно, в этой точке функция имеет локальный экстремум. Но своего наибольшего (наименьшего) значения функция может достигать и на границе множества D. Таким образом, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве D, можно найти все внутренние стационарные точки, точки недифференцируемости функции f, вычислить значения функции в них и сравнить их между собой и со значениями функции f в граничных точках множества D : наибольшее (наименьшее) из всех этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции fна всем множестве D.

Пример 7.8. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = x^2y$ на множестве точек (x,y), удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \le 1$.

Найдем сначала стационарные точки в открытом круге $x^2 + y^2 < 1$

$$\begin{cases} f'_x = 2xy = 0 \\ f'_y = x^2 = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются все точки открытого круга, у которых $x = 0$. Значения функции f в этих точках равны 0. Для нахождения экстремальных точек на границе круга можно исследовать функцию f на условный экстремум относительно уравнения связи $x^2 + y^2 = 1$. Выразим из этого уравнения $x^2 = 1 - y^2$ и подставим в $f(x,y)$, получим функцию $h(y) = y - y^3$. Функция $h(y)$ имеет две экстремальные точки $y_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $y_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Из уравнения $x^2 = 1 - y^2$ найдем соответствующие значения x. Вычислим значения функции $f(x,y)$ в полученных четырех точках и сравним их со значениями функции f в точках ее возможного экстремума внутри круга $x^2 + y^2 = 1$. Так как в нашем примере эти значения равны 0, то наибольшее значение функции $f(x,y)$ на указанном множестве равно $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, наименьшее равно $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Содержание

Карма Николаевна Гурьянова
Сергей Алексеевич Рогожин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
Функции нескольких переменных

Учебное пособие

Редактор **М.А. Овечкина**
Компьютерный набор и верстка **М.В. Дейкаловой**

Подписано в печать 10.07.2000 Формат 60 × 84 1/16.
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 3,0. Усл. печ. л. 4,8. Заказ Тираж 250 экз.
Уральский государственный университет им А.М.Горького.
Екатеринбург, К-83 пр. Ленина, 51.

Отпечатано на ризографе исторического факультета.
Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.