Федеральное агентство по образованию
Уральский федеральный университет

А. Р. Данилин

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
для магистров

Конспект лекций

Екатеринбург 2012

УДК 517.98(075.8)
Д182

В пособии рассматриваются вопросы функционального анализа, не вошедшие в общий курс функционального анализа для бакалавров.

В частности, рассматривается аппарат направленностей, восстанавливающих эквивалентности подходов Коши и Гейне в общей топологии, элементы теории локально выпуклых пространств и двойственности, основы теории операторов с индексами и др.

Предназначено для магистров математических специальностей классических университетов.

Содержание

Предисловие

Данное электронное пособие есть конспект лекций двухсеместрового спецкурса "Дополнительные главы функционального анализа", читаемого автором магистрам первого года обучения.

Оно предназначено для магистров математических факультетов, изучавших курс "Функциональный анализ и интегральные уравнения". Здесь рассмотрены вопросы, которые в основном курсе для бакалавров либо не затрагивались совсем, либо рассматривались недостаточно полно. В частности, понятие топологического пространства, локально выпуклого пространства, теория двойственности локально выпуклых пространств, тонкие вопросы теории нормированных пространств (например, теория Эберлейна — Шмульяна, операторы с индексами, теорема Люстерника о касательном пространстве).

Как правило доказательства утверждений, получающиеся непосредственным применением соответствующих определений, не приводятся. Изложение материала в значительной степени замкнуто.

В пособии используются следующие обозначения и соглашения.

Запись $A := B$ или $B =: A$ означает, что A определяется посредством B.

Для обозначения множеств натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел используются символы $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Символ $\mathbb{P}$ используется в качестве общего обозначения для $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

$\mathcal{B}(X)$ — множество всех подмножеств множества X, или *булеан*.

Математическая структура $\langle X, \mathcal{R}\rangle$, где X — множество, а

$\mathcal{R}$ — набор различных отображений и отношений, часто обозначается одним символом X.

Множество, на котором определена математическая структура, часто обозначается так же, как и структура, например, обозначение нормированного пространства $C[a;b]$ часто используется для обозначения множества непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций (на котором это нормированное пространство определено).

Запись $A \subset B$ или $B \supset A$ означает нестрогое включение, т. е. равенство $A = B$ не исключено.

$f(x)$ — значение отображения (функции) f в точке x, а $f(\cdot)$ — сама функция f (используется для подчеркивания характера объекта, обозначенного символом f).

Если $f : D(f) \subset X \to Y$, то $Im\, f := f(D(f))$.

Часто у семейства множеств или элементов множества не указывается множество индексов, например, вместо $\{\, e_\alpha \,\}_{\alpha\in A}$ и $\bigcup\limits_{\alpha\in A} F_\alpha$ пишется $\{\, e_\alpha \,\}$ и $\bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha$ соответственно.

$\delta_{k,n}$ – символ Кронекера.

Если в утверждении, сформулированном с помощью предикатов, не указаны кванторы, то ко всем переменным подразумевается квантор всеобщности.

Все вводимые термины при первом упоминании выделяются *курсивом*.

Комментарии внутри цепочки формул даются либо внутри квадратных скобок, либо над символами отношений.

Если в теореме сформулировано несколько утверждений, то номер доказываемого утверждения заключается в рамку. Различные этапы доказательства конкретного утверждения нумеруются без заключения номера в рамку.

Символом $\blacksquare$ обозначается окончание доказательства или замечаний (когда это необходимо).

Данное пособие является продолжением пособия автора для бакалавров [3]. В связи с этим, при необходимости ссылки на теоремы, не рассматриваемые в данном пособии, но доказанные в пособии для бакалавров, ссылки даются на [3]. Кроме

этого без дополнительных пояснений используются понятия и обозначения, введенные в [3].

Ниже приводится список таких обозначений.

$\langle X, \rho\rangle$ — метрическое пространство с носителем X и метрикой ρ.

$\rho(x, y)$ — расстояние между элементами x и y метрического пространства.

$x_n \xrightarrow[\rho]{} x_0$ — последовательность $\{\, x_n \,\}$ сходится к x_0 относительно метрики ρ.

ρ_T — тривиальная метрика.

$\langle X, ||\cdot||\rangle$ — нормированное пространство с носителем X и нормой $||\cdot||$.

$||x||$ — норма элемента x нормированного пространства.

(x, y) — скалярное произведение элементов евклидова пространтсва

c^k, l_p^k $(p \geqslant 1)$ — конечномерные нормированные пространства.

c, c_0, m, l_p $(p \geqslant 1)$ — нормированные пространства последовательностей.

$M[a;b]$, $C[a;b]$, $C(X)$, $C^k[a;b]$, $\widetilde{L}_p(a;b)$, $L_p(a;b)$, $\widetilde{W}_p^k(a;b)$ и $W_p^k(a;b)$ $(p \geqslant 1)$ — нормированные пространства (классов) функций.

$B(a,r)$ или $B(a,r;X)$ — открытый шар с центром в точке a и радиуса $r > 0$ в метрическом пространстве X.

$B[a,r]$ или $B[a,r;X]$ — замкнутый шар с центром в точке a и радиуса $r \geqslant 0$ в метрическом пространстве X.

$\tau(\rho)$ — множество всех открытых множеств в метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$.

$\langle\{\, e_\alpha \,\}\rangle$ — линейная оболочка системы векторов $\{\, e_\alpha \,\}$ в линейном пространстве. Вместо $\langle\{\, e_1, \ldots, e_n \,\}\rangle$ часто пишется просто $\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$.

$\widetilde{x}$ — класс элементов, эквивалентных элементу x относительно заданного отношения эквивалентности $\sim$.

$\omega(\delta; f, M)$ — модуль непрерывности отображения f на множестве M.

I или I_X — тождественное отображение множества X на себя, т. е. $Ix := x$.

$\mathcal{L}(X,Y)$ — нормированное пространство линейных непрерывных операторов, определенных на нормированном пространстве X со значениями в нормированном пространстве Y.

$\langle x, x^* \rangle$ — значение линейного функционала x^* на элементе x, т. е. $x^*(x)$.

$x_n \xrightarrow{сл} x_0$ — последовательность элементов $\{ x_n \}$ нормированного пространства слабо сходится к элементу x_0.

$x_n^* \xrightarrow{*сл} x_0^*$ — последовательность элементов $\{ x_n^* \}$ нормированного пространства линейных непрерывных функционалов *слабо сходится к линейному непрерывному функционалу x_0^*.

$\sigma(A)$ — спектр линейного оператора A.

В заключение автор выражает свою огромную благодарность М. И. Гомоюнову, внимательно прочитавшему текст данного пособия, обнаружившему в нем многочисленные погрешности набора и высказавшему много полезных замечаний с точки зрения реального пользователя данного пособия.

Глава 1
Топологические пространства

§ 1. Основные понятия

Утверждение 1.1.1. *В множестве $C[a;b]$ нельзя ввести метрику, порождающую поточечную сходимость.* [19, Гл. 0, § 2, с. 25, Упражнение 1*]

Доказательство. 1. Пусть $\langle C, \rho \rangle$: $\big((x_n(\cdot) \underset{[a;b]}{\longrightarrow} 0$ поточечно$) \Longrightarrow x_n(\cdot) \underset{\rho}{\longrightarrow} 0 \big)$. Покажем, что

$$\begin{gathered} \forall\, t_0 \in (a;b)\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, h > 0\ \forall\, x(\cdot) \in C[a;b] \\ (\forall\, t \notin [t_0; t_0 + h] \quad x(t) = 0) \quad \Longrightarrow \rho(x(\cdot), 0) < \varepsilon. \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

Предположим противное, т. е.

$$\exists\, t_0 \in (a;b)\ \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, h > 0\ \exists\, x_h(\cdot) \in C[a;b]$$

$$(\forall\, t \notin [t_0; t_0 + h] \quad x_h(t) = 0) \wedge \rho(x_h(\cdot), 0) \geqslant \varepsilon_0.$$

Так как $x_h(\cdot)$ непрерывна на $[a;b]$, то $x_h(t_0) = 0$. Пусть $h(n) = 1/n$ и $x_n(\cdot) = x_{h(n)}(\cdot)$, тогда $\forall\, t \in [a;b]$ $x_n(t) \to 0$, но $\rho(x_n(\cdot), 0) \geqslant \varepsilon_0$.

2. Пусть ρ как в пункте 1. Покажем, что существует $\{ x_n(\cdot) \} \subset C[a;b]$: $\rho(x_n(\cdot), 0) \to 0$ и $x_n(\cdot) \not\to 0$ поточечно.

Положим $t_1 := (a + b)/2$, $\varepsilon_1 := 1$, а h_1 — удовлетворяющее (1.1.1) для заданных t_1 и ε_1, и такое, что $I_1 := [t_1; t_1 + h_1] \subset (a;b)$. Потом возьмем $t_2 := t_1 + h_1/2$, $\varepsilon_2 := 1/2$ и h_2 — удовлетворяющее (1.1.1) для заданных t_2 и ε_2, и такое, что $I_2 := [t_2; t_2 + h_2] \subset \overset{\circ}{I_1}$ и т. д.

Продолжая описанный индукционный процесс, построим последовательность вложенных и стягивающихся отрезков

$\{ I_n \}$. Рассмотрим $\{ x_n(\cdot) \} \subset C[a;b]$, определенную следующим образом:

$$x_n(t) := \begin{cases} 0, & t \notin I_n \\ 1, & t \in I_{n+1} \\ \text{линейна на } I_n \setminus I_{n+1}. \end{cases}$$

Тогда по построению $\{ x_n(\cdot) \}$ $\rho(x_n(\cdot), 0) < \varepsilon_n$ и, тем самым $x_n(\cdot) \xrightarrow[\rho]{} 0$. Но для $t_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\;x_n(t_0) = 1$. ■

Определение. $\mathcal{B}(X) \supset \tau$ — *топология на* X, если

1. $X, \varnothing \in \tau$.
2. $G_\alpha \in \tau \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha \in \tau$.
3. $G_1, \ldots, G_k \in \tau \Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{k} G_i \in \tau$.

Определение. Множества из τ называются *открытыми* множествами, их дополнения — *замкнутыми* множествами, а $\langle X, \tau \rangle$ — *топологическим пространством.*

Пример 1.1.1. Метрическое пространство является топологическим пространством с $\tau = \tau(\rho)$.

Пример 1.1.2. $\tau_d := \mathcal{B}(X) = \tau(\rho_T)$ — *дискретная топология на* X.

Пример 1.1.3. $\tau_a := \{X, \varnothing\}$ — *антидискретная топология на* X.

Пример 1.1.4. $X := \mathbb{R}$ (любое более чем счетное множество), $\tau_c := \{ G \subset X : G = \varnothing \vee X \setminus G$ — не более чем счетно$\}$.

Пример 1.1.5. $X := \mathbb{R}$ (любое бесконечное множество), $\tau_f := \{ G \subset X : G = \varnothing \vee X \setminus G$ — конечно$\}$.

Пример 1.1.6. Пусть $\langle X, \tau \rangle$ — топологическое пространство, а $M \subset X$. Тогда $\tau_M := \tau \cap M := \{G \cap M : G \in \tau\}$ — топология на M. $\langle M, \tau_M \rangle$ — *подпространство топологического пространства* X.

Отметим, что если M τ-открыто, то все τ_M-открытые подмножества M будут и τ-открыты.

Аналогично, если M τ-замкнуто, то и все τ_M-замкнутые подмножества M будут τ-замкнуты.

Замечание. Если $\langle X, \rho \rangle$ — метрическое пространство, а $M \subset X$, то $\langle M, \rho \rangle$, рассматриваемое как топологическое пространство, является подпространством топологического пространства $\langle X, \tau(\rho) \rangle$.

Определения. Пусть $\langle X, \tau \rangle$ — топологическое пространство, а $x_0 \in X$.

1. $U(x_0)$ — *окрестность точки* $x_0 := \exists\, G \in \tau$: $G \subset U(x_0)$ и $x_0 \in G$.

2. Окрестность точки, являющаяся открытым множеством, называется *открытой окрестностью точки.*

3. Понятия "предельная точка", "внутренняя точка", "внутренность", "замыкание", "предел последовательности в топологическом пространстве", "предел в точке отображения одного топологического пространства в другое", "непрерывность отображения в точке", "непрерывность отображения на множестве" определяются в топологическом пространстве дословно, как в случае метрических пространств, с заменой открытых шаров на произвольные окрестности соответствующих точек.

Например, x_0 — *предельная точка множества* M, если $\forall\, U(x_0)$ $\;M \cap (U(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$, $U(M)$ есть *окрестность множества* M, если $\exists\, G \in \tau$: $\;M \subset G \subset U(M)$, а отображение $f : X \to Y$, где X, Y — топологические пространства, называется *непрерывным в точке* $x \in X$ если $\forall\, U(f(x))$ $\;\exists\, U(x)$: $f(U(x)) \subset U(f(x))$.

5. Пусть $\langle X, \tau \rangle$ — топологическое пространство и $M \subset X$.

Внутренность множества M обозначают через $\overset{\circ}{M}$, или $int(M)$, или $int(M; \tau)$, а замыкание M — через $\overline{M}$, или $cl(M)$, или $cl(M; \tau)$.

Теорема 1.1.1. 1. *Пусть* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, X, Y, Z — *топологические пространства, f непрерывно в точке x_0, а g непрерывно в точке $f(x_0)$. Тогда $g(f(\cdot))$ непрерывно в точке x_0.*

2. *Пусть $f : X \to Y$, X, Y — топологические пространства. Тогда* $\big(f$ *непрерывно на* $X\big) \Longleftrightarrow \big(\forall G \in \tau_Y \;\; f^{-1}(G) \in \tau_X\big)$.

Следствие. *Пусть $f : X \to Y$, X, Y — топологические пространства. Тогда* $(f$ *непрерывно на* $X) \Longleftrightarrow \big(\forall F \subset Y$ $(F$ — *замкнуто* $\Longrightarrow f^{-1}(F)$ — *замкнуто*$)\big)$.

Замечания. 1. Предел в топологическом пространстве может быть не единственным, например, в топологическом пространстве $\langle X, \tau_a \rangle$ $\forall \{x_n\} \subset X$ $\forall x_0 \in X$ $x_n \to x_0$, так как $U(x_0) = X$.

2. Предел последовательности в топологическом пространстве может не характеризовать открытые и замкнутые множества (топологию), предел и непрерывность отображений.

Пример 1.1.7. В топологическом пространстве $\langle \mathbb{R}, \tau_c \rangle$ $(x_n \to x_0) \Longleftrightarrow (\exists\, n_0\, \forall\, n > n_0\ x_n = x_0)$. Поэтому свойство

$$(x_n \to x_0 \in M) \Longrightarrow (\exists\, n_0\, \forall\, n > n_0\ \ x_n \in M)$$

выполняется для любого множества M, а не только для открытого, как это было в метрических пространствах, хотя в $\langle \mathbb{R}, \tau_c \rangle$ есть не открытые множества, например, $\{1, 2\}$.

Определение. Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$.

1. Множество M называется *секвенциально открытым*, если $(x_n \to x_0 \in M) \Longrightarrow (\exists\, n_0\ \forall\, n > n_0\ \ x_n \in M)$.

2. Множество M называется *секвенциально замкнутым*, если $(M \ni x_n \to x_0) \Longrightarrow (x_0 \in M)$.

Утверждение 1.1.2. *Пусть X — топологическое пространство. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Объединение любого семейства секвенциально открытых множеств секвенциально открыто.*

2. *Пересечение любого конечного семейства секвенциально открытых множеств секвенциально открыто.*

3. *Объединение любого конечного семейства секвенциально замкнутых множеств секвенциально замкнуто.*

4. *Пересечение любого семейства секвенциально замкнутых множеств секвенциально замкнуто.*

5. *Множество секвенциально замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение до него секвенциально открыто.*

6. *Семейство всех секвенциально открытых множеств есть некоторая топология на носителе исходного топологического пространства.*

Определение. Пусть τ_1 и τ_2 — две топологии на X. Говорят, что *топология τ_1 не слабее топологии τ_2* (*топология τ_2 не сильнее топологии τ_1*), если $\tau_1 \supset \tau_2$.

Утверждение 1.1.3. *Пусть τ_1 и τ_2 — две топологии на X. Топология τ_1 не слабее топологии τ_2 тогда и только тогда, когда тождественное отображение $I : X \to X$ непрерывно на X как отображение топологического пространства $\langle X, \tau_1 \rangle$ на топологическое пространство $\langle X, \tau_2 \rangle$.*

Замечание. Отметим, что любое отображение f топологического пространства $\langle X, \tau_d \rangle$ в произвольное топологическое пространство Y непрерывно на X. При этом отображение f из произвольного топологического пространства X в топологическое пространство $\langle Y, \tau_d \rangle$ непрерывно в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда f постоянно в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Топологические пространства $\langle X, \tau_X \rangle$ и $\langle Y, \tau_Y \rangle$ называются *гомеоморфными*, если существует биекция $f : X \to Y$ такая, что f и f^{-1} непрерывны на X и Y соответственно.

Замечания. 1. Гомеоморфизм — это изоморфизм топологических структур.

2. Неизометрические метрические пространства могут быть гомеоморфными топологическими пространствами.

Утверждение 1.1.4. *Пусть ρ_1 и ρ_2 — метрики на X. Тогда $(\rho_1 \sim \rho_2) \Longleftrightarrow \big(I : X \to X$ есть гомеоморфизм $\langle X, \tau(\rho_1)\rangle$ на $\langle X, \tau(\rho_2)\rangle\big)$.*

§ 2. Аксиомы отделимости

Определения. Перечисленные ниже свойства T_1 — T_4 топологических пространств называются *аксиомами отделимости.*

$T_1 : \forall\, x, y \ \big(x \neq y \Longrightarrow \exists\, U(x) \ \ y \notin U(x)\big)$.

T_2 (аксиома Хаусдорфа):

$$\forall\, x, y \ \big(x \neq y \Longrightarrow \exists\, U(x), U(y) \ \ U(x) \cap U(y) = \varnothing\big).$$

$$T_3 : \big(x_0 \notin F\big) \wedge \big(F \text{ — замкнуто}\big) \Longrightarrow$$

$$\exists\, U(x_0), U(F) \ \ U(x_0) \cap U(F) = \varnothing.$$

$$T_4 : \big(F_1 \cap F_2 = \varnothing\big) \wedge \big(F_1,\, F_2 \text{ — замкнуты}\big) \Longrightarrow$$

$$\exists\, U(F_1), U(F_2) \ \ U(F_1) \cap U(F_2) = \varnothing.$$

Определения. 1. Топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме T_2, называется *отделимым* или *хаусдорфовым.*

2. Топологическое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_3, называется *регулярным.*

3. Топологическое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4, называется *нормальным.*

Пример 1.2.1. Топологическое пространство $\langle X, \tau_a\rangle$ не удовлетворяет аксиоме T_1.

Пример 1.2.2. Топологические пространства $\langle X, \tau_a\rangle$ и $\langle X, \tau_c\rangle$ не удовлетворяют аксиоме T_2.

Утверждение 1.2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *В T_1-пространстве $\{x_0\}$ замкнуто.*

2. $T_3 \Longleftrightarrow \forall\, U(x_0)\, \exists\, U_1(x_0) \ \ \overline{U_1(x_0)} \subset U(x_0)$.

3. *Всякое нормальное пространство регулярно, всякое регулярное пространство отделимо.*

Доказательство. $\boxed{1}$. $y \in X \setminus \{x_0\} \overset{T_1}{\Longrightarrow} \exists\, U(y)$: $x_0 \notin U(y) \Longrightarrow U(y) \subset X \setminus \{x_0\}$.

$\boxed{2. \Longrightarrow}$. $x_0 \notin F := X \setminus \overset{o}{U}(x_0) \overset{T_3}{\Longrightarrow} \exists\, U_1(x_0), U(F) \ :\ \varnothing = U_1(x_0) \cap U(F) \Longrightarrow U_1(x_0) \subset X \setminus U(F) \subset X \setminus \overset{o}{U}(F) \Longrightarrow \overline{U_1(x_0)} \subset X \setminus U(F) \subset X \setminus F = \overset{o}{U}(x_0) \subset U(x_0)$.

$\boxed{2. \Longleftarrow}$. $x_0 \notin F \Longrightarrow \exists\, U(x_0) :\ U(x_0) \cap F = \varnothing \Longrightarrow \exists\, U_1(x_0) : \overline{U_1(x_0)} \subset U(x_0) \Longrightarrow \overline{U_1(x_0)} \cap F = \varnothing \Longrightarrow F \subset X \setminus \overline{U_1(x_0)} =: U(F)$ и $U_1(x_0) \cap U(F) = \varnothing$. ■

Утверждение 1.2.2. *Метрическое пространство есть нормальное топологическое пространство.*

§ 3. Базы топологии и окрестностей точки, аксиомы счетности

Определение. Семейство $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии* τ, если $\forall\, G \in \tau$: $G \neq \varnothing$ $\exists\, \{W_\alpha\} \subset \beta$ $G = \bigcup\limits_\alpha W_\alpha$.

Пример 1.3.1. В метрическом пространстве X семейство $\{\, B(a, r) :\ a \in X,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\,\}$ есть база топологии.

Пример 1.3.2. В метрических пространствах l_p^k и c^k ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) семейство $\{ B(a,r) \colon a \in \mathbb{Q}^k,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0 \}$ есть база топологии, и она счетна.

Теорема 1.3.1. *Пусть $\beta \subset \mathcal{B}(X)$. Семейство β есть база некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*
1. $\forall\, x \in X\, \exists\, W \in \beta\ \ x \in W$;
2. $\forall\, W_1, W_2 \in \beta\, \forall\, x \in W_1 \cap W_2\, \exists\, W_3 \in \beta\ \ x \in W_3 \subset W_1 \cap W_2$.

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. $\tau := \left\{ \bigcup\limits_{\alpha} W_\alpha \,:\, W_\alpha \in \beta \right\} \bigcup \{\varnothing\}$, поскольку в силу второго условия $W_1 \cap W_2 = \bigcup\limits_{W_\gamma \subset W_1 \cap W_2} W_\gamma$. ■

Пример 1.3.3. Пусть $X = \mathbb{P}^M$ и $W(f, t_1, \ldots, t_k, \varepsilon) := \{ g(\cdot) \in \mathbb{P}^M \,:\, \forall\, i \in \overline{1,k}\quad |g(t_i) - f(t_i)| < \varepsilon \}$. Тогда $\beta := \{ W(f, t_1, \ldots, t_k, \varepsilon) \,:\, f \in \mathbb{P}^M, k \in \mathbb{N}, t_i \in M, \varepsilon > 0 \}$ — база топологии "поточечной сходимости" отображений из M в $\mathbb{P}$.

Пример 1.3.4. Семейство $\beta := \{ [a; b) \,:\, a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b \}$ — база топологии "стрелки" на $\mathbb{R}$.

Определение. Пусть $\omega(x_0) \subset \mathcal{B}(X)$. Семейство $\omega(x_0)$ называется *базой окрестностей точки* x_0 (или *определяющей системой окрестностей точки* x_0) в топологическом пространстве $\langle X, \tau \rangle$, если выполнены следующие условия:
1. $W \in \omega(x_0) \Longrightarrow W$ — окрестность точки x_0;
2. $\forall\, U(x_0)\, \exists\, W \in \omega(x_0)\ \ W \subset U(x_0)$.

Пример 1.3.5. В метрическом пространстве X семейство $\{ B(x_0, r) \,:\, r \in \mathbb{Q}, r > 0 \}$ есть база окрестностей точки x_0, и эта база не более чем счетна.

Пример 1.3.6. Если $\omega(x_0)$ — база окрестностей точки x_0, то и $\overset{\circ}{\omega}(x_0) := \{ \overset{\circ}{W} \,:\, W \in \omega(x_0) \}$ — база окрестностей точки x_0, причем состоящая из открытых окрестностей (*открытая база окрестностей точки* $\omega(x_0)$).

Утверждение 1.3.1. 1. *Если β — база топологии τ, то $\omega(x_0) := \{ W \in \beta \,:\, x_0 \in W \}$ — открытая база окрестностей точки x_0.*

2. *Если $\forall\, x \in X\quad \omega(x)$ — база открытых окрестностей точки x в топологическом пространстве $\langle X, \tau \rangle$, то $\beta := \bigcup\limits_{x \in X} \omega(x)$ — база топологии τ.*

Теорема 1.3.2. *Семейство $\{ \omega(x) \subset \mathcal{B}(X) \,:\, x \in X \}$ есть семейство баз окрестностей точек в некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*
1. $\forall\, V \in \omega(x)\ \ x \in V$;
2. $\forall\, V_1, V_2 \in \omega(x)\ \ \exists\, V_3 \in \omega(x) \,:\, V_3 \subset V_1 \cap V_2$;
3. $\forall\, V \in \omega(x)\ \ \exists\, \widetilde{V} \in \omega(x) \,:$
$(\widetilde{V} \subset V) \wedge (\forall\, y \in \widetilde{V}\ \ \exists\, U \in \omega(y) : U \subset \widetilde{V})$.

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. Определим топологию τ на X следующим образом: $\varnothing \neq G \in \tau := \forall\, x \in G\ \ \exists\, V \in \omega(x) \colon V \subset G$. Свойства 1-2 показывают, что это действительно топология на X. Покажем, что $\omega(x) \ni V$ есть окрестность точки x в этой топологии. Действительно пусть $\widetilde{V}$ — множество из свойства 3, тогда $\widetilde{V} \in \tau$ и $x \in \widetilde{V} \subset V$. ■

Утверждение 1.3.2. *Пусть X — отделимое топологическое пространство, $x_0 \in X$ и $\omega(x_0)$ — база окрестностей точки x_0. Тогда $\bigcap\limits_{W \in \omega(x_0)} \overline{W} = \{x_0\}$.*

Доказательство. $y \neq x_0 \Longrightarrow \exists\, U(y) \in \tau, W \in \omega(x_0)$: $U(y) \cap W = \varnothing \Longrightarrow W \subset X \setminus U(y) \Longrightarrow \overline{W} \subset X \setminus U(y) \Longrightarrow U(y) \cap \overline{W} = \varnothing \Longrightarrow y \notin \overline{W}$. ■

Определения. 1. Говорят, что *топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности*, если каждая точка этого пространства имеет не более чем счетную базу окрестностей.

2. Говорят, что *топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности*, если топология этого пространства имеет не более чем счетную базу.

Пример 1.3.7. Метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Пример 1.3.8. Метрические пространства l_p^k и c^k удовлетворяют второй аксиоме счетности.

Замечания. 1. В топологическом пространстве с первой аксиомой счетности сходящиеся последовательности полностью характеризуют топологию, т. е. в этих пространствах справедливы характеристические свойства открытых и замкнутых множеств.

2. Если $f : X \to Y$, X и Y — топологические пространства, причем X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то понятия "предел функции по Коши" и "предел функции по Гейне" эквивалентны.

Утверждение 1.3.3. 1. *Если топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно удовлетворяет и первой аксиоме счетности.*

2. *Если топологическое пространство удовлетворяет первой (второй) аксиоме счетности, то и любое его подпространство удовлетворяет этой же аксиоме счетности.*

§ 4. Сепарабельность

Определения. 1. Множество M в топологическом пространстве X называется *всюду плотным*, если $\overline{M} = X$, т. е. если $\forall\, x \in X\, \forall\, U(x) \quad U(x) \cap M \neq \varnothing$.

2. Множество M в топологическом пространстве X называется *нигде не плотным*, если в $\overline{M}$ нет внутренних точек ($\overset{\circ}{\overline{M}} = \varnothing$).

Утверждение 1.4.1. *Пусть $\langle X, \tau \rangle$ — топологическое пространство. Тогда (M всюду плотно) $\Longleftrightarrow$ ($\forall\ G \in \tau \setminus \{\varnothing\}$ $M \cap G \neq \varnothing$).*

Пример 1.4.1. В $\langle X, \tau_a \rangle$ любое непустое множество всюду плотно.

Пример 1.4.2. В l_p^k и c^k над $\mathbb{R}$ множество $\mathbb{Q}^k$ всюду плотно. В l_p^k и c^k над $\mathbb{C}$ множество $\mathbb{Q}^k + i\mathbb{Q}^k$ всюду плотно.

Пример 1.4.3. Конечное множество предельных точек топологического пространства, удовлетворяющего аксиоме T_1, — нигде не плотное множество.

Определение. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем есть не более чем счетное всюду плотное множество.

Замечание. В топологии часто сепарабельным называют топологическое пространство со второй аксиомой счетности.

Пример 1.4.4. Метрические пространства $C[a;b]$, l_p, c, c_0, l_p^k и c^k сепарабельны.

Пример 1.4.5. Метрическое пространство m не сепарабельно, так как $M := \Big\{ \{\, x_n \,\} \ :\ x_n \in \{0, 1\} \Big\}$ континуально и $\forall\, x, y \in M \ \ (x \neq y \Longrightarrow ||x - y|| = 1)$.

Утверждение 1.4.2. *Если топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно сепарабельно.*

Утверждение 1.4.3. *Сепарабельное метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Пусть $\{\, a_n \,\}$ — счетное всюду плотное множество в $\langle X, \rho \rangle$. Покажем, что $\{\, B(a_n, 1/m) \,:\, n, m \in \mathbb{N} \,\}$ — база топологии.

1. Пусть $x \in X$ и $r > 0$. Тогда

$$\exists\, m(r)\colon 2/m(r) < r\ \exists\, n(x,r)\colon a_{n(x,r)} \in B(x, 1/m(r)) \Longrightarrow$$
$$x \in B(a_{n(x,r)}, 1/m(r)) \subset B(x, 2/m(r)) \subset B(x, r).$$

2. $\forall\, x \in G \in \tau(\rho)\ \exists\, r(x) > 0$: $B(x, r(x)) \subset G \stackrel{1}{\Longrightarrow}$

$$\exists\, m(x), n(x)\colon x \in B(a_{n(x)}, 1/m(x)) \subset B(x, r(x)) \subset G \Longrightarrow$$
$$G = \bigcup_{x\in G} B(a_{n(x)}, 1/m(x)). \ \blacksquare$$

Следствие. *Подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно.*

Замечание. В общем случае, "сепарабельность" не является наследуемым свойством.

Задание 1.4.1. Постройте сепарабельное топологическое пространство с несепарабельным подпространством.

Задание 1.4.2. Постройте сепарабельное топологическое пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности.

§ 5. Компактные множества

Определения. 1. Топологическое пространство X называется *компактным* (*счетно компактным*), если из любого (счетного) открытого покрытия X можно выделить конечное подпокрытие.

2. Множество в топологическом пространстве называется *компактным* (*счетно компактным*), если компактно (счетно компактно) подпространство, им порожденное.

Утверждение 1.5.1. *Пусть $\langle X, \tau\rangle$ — топологическое пространство и $M \subset X$. Тогда (M компактно) $\Longleftrightarrow$*

$$\Big(G_\alpha \in \tau \wedge \bigcup_\alpha G_\alpha \supset M \Longrightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \ \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i} \supset M\Big).$$

Утверждение 1.5.2. *Пусть $\langle X, \tau\rangle$ — топологическое пространство, $\langle M, \tau_M\rangle$ — его подпространство и $K \subset M$. Множество K компактно в $\langle M, \tau_M\rangle$ тогда и только тогда, когда K компактно в $\langle X, \tau\rangle$.*

Замечание. Если топологическое пространство X компактно, то оно и счетно компактно.

Утверждение 1.5.3. *Если X — счетно компактное топологическое пространство со второй аксиомой счетности, то X компактно.* $\blacksquare$

Общетопологическими являются и теорема об образе компакта и обобщенная теорема Вейерштрасса.

Теорема 1.5.1. *Пусть $f : X \to Y$, X, Y — топологические пространства, f непрерывно на X и $X \supset M$ компактно. Тогда $f(M)$ компактно.*

Теорема 1.5.2 (обобщенная теорема Вейерштрасса). *Пусть X — топологическое пространство, $f : X \to \mathbb{R}$, f непрерывно на X и $X \supset M$ — компактно. Тогда f ограничено на M и достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.*

Определение. Семейство множеств $\{F_\alpha\}$ называется *центрированным в множестве M*, если

$$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \ \bigcap_{i=1}^{k} (F_{\alpha_i} \cap M) \neq \varnothing.$$

Теорема 1.5.3 (критерий компактности в топологическом пространстве). *Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$. Тогда M компактно (счетно компактно) тогда и только тогда, когда любое (любое счетное) центрированное в M семейство замкнутых множеств имеет непустое пересечение с M.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $\{F_\alpha\}$ — центрированное в M семейство замкнутых множеств $\Longrightarrow G_\alpha := X \setminus F_\alpha$ открыты. В силу центрируемости семейства $\{F_\alpha\}$

$$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \ \ M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (F_{\alpha_i} \cap M) \neq \varnothing \Longrightarrow$$

$\{G_\alpha\}$ — не покрытие $M \Longrightarrow \varnothing \neq M \setminus \bigcup\limits_\alpha G_\alpha = \Big(\bigcap\limits_\alpha F_\alpha\Big) \cap M$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $G_\alpha \in \tau$ и $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha \supset M$. Тогда $F_\alpha := X \setminus G_\alpha$ замкнуты. Так как $\varnothing = M \setminus \bigcup\limits_\alpha G_\alpha = \Big(\bigcap\limits_\alpha F_\alpha\Big) \cap M$, то $\{F_\alpha\}$ не центрированное в M семейство $\Longrightarrow$

$$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \ \ \varnothing = \Big(\bigcap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i}\Big) \cap M = M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i}. \ \blacksquare$$

Следствие. *Замкнутое подмножество компакта есть компакт.*

Определение. Подмножество топологического пространства называется *предкомпактным*, если его замыкание компактно.

Замечание. В отличие от метрических пространств компактное множество может не быть замкнутым (постройте соответствующий пример). Но в отделимых топологических пространствах это свойство сохраняется.

Утверждение 1.5.4. *Если X — отделимое топологическое пространство, а $X \supset M$ компактно, то M замкнуто.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется x_0 — предельная точка множества M такая, что $x_0 \notin M$. Пусть $\omega(x_0)$ — некоторая база окрестностей точки x_0. Тогда в силу утверждения 1.3.2 $\bigcup\limits_{W \in \omega(x_0)} X \setminus \overline{W} = X \setminus \{x_0\} \supset M$, т. е. $\{X \setminus \overline{W}\}_{W \in \omega(x_0)}$ есть открытое покрытие компакта M. Однако $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X \setminus \overline{W_i} = X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{W_i} \not\supset M$, так как $M \cap \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{W_i}\Big) \neq \varnothing$. $\blacksquare$

Следствие. *В отделимом топологическом пространстве любое подмножество компакта есть предкомпактное множество.*

Теорема 1.5.4. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывная биекция отделимого компактного пространства X на отделимое компактное пространство Y. Тогда отображение $f^{-1} : Y \to X$ напрерывно на Y.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое множество в X, тогда по следствию из теоремы 1.5.3 F компактно и по теореме 1.5.1 $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ компактно, поэтому по утверждению 1.5.4 $f(F)$ замкнуто. $\blacksquare$

Утверждение 1.5.5. *Пусть $\langle K, \tau\rangle$ — отделимое компактное пространство. Тогда τ есть минимальный элемент в частично упрорядоченном множестве отделимых топологий на K.*

Доказательство. Пусть τ_1 отделимая топология на K, $\tau_1 \subset \tau$ и $I : K \to K$ тождественное отображение. Тогда I — непрерывная биекция компактного пространства $\langle K, \tau\rangle$ на $\langle K, \tau_1\rangle$. Поэтому $\langle K, \tau_1\rangle$ компактно и по утверждению 1.5.4 отображение I непрерывно на $K \Longrightarrow \tau \subset \tau_1 \Longrightarrow \tau = \tau_1$. $\blacksquare$

§ 6. Направленности и поднаправленности

Определения. 1. Частично упорядоченное множество $\langle \mathcal{A}, \succ\rangle$ называется *направленным*, если $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}\ \exists\, \alpha_3 \in \mathcal{A}$: $(\alpha_3 \succ \alpha_1) \wedge (\alpha_3 \succ \alpha_2)$.

2. *Направленностью в X* называется отображение любого направленного множества в X.

3. Пусть X — топологическое пространство, а $\{x_\alpha\}$ — направленность в X. Тогда $x_\alpha \to x_0 \in X := \forall U(x_0)\ \exists \alpha_U\ \forall \alpha \succ \alpha_U$ $x_\alpha \in U(x_0)$.

Пример 1.6.1. Линейно упорядоченное множество $\langle \mathbb{N}, \geqslant \rangle$ — направленное множество, поэтому любая последовательность в X есть направленность.

Пример 1.6.2. Линейно упорядоченное множество $\langle \mathbb{R}, \geqslant \rangle$ — направленное множество, поэтому любое отображение $\mathbb{R}$ в X есть направленность в X.

Пример 1.6.3. База окрестностей $\omega(x)$ есть направленное множество относительно следующего отношения частичного порядка: $V_1 \succ V_2 := V_1 \subset V_2$. В дальнейшем на $\omega(x)$ мы будем рассматривать только это отношение частичного порядка.

Пример 1.6.4. $\mathcal{B}(X)$ есть направленное множество относительно следующего отношения частичного порядка: $M_1 \succ M_2 := M_1 \supset M_2$.

Утверждение 1.6.1. *Если $\langle \mathcal{A}_i, \overset{i}{\succ} \rangle$ $(i = 1, 2)$ — направленные множества, то $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ есть направленное множество относительно следующего отношения частичного порядка:*

$$(\alpha_1, \alpha_2) \succ (\alpha_1', \alpha_2') := (\alpha_1 \overset{1}{\succ} \alpha_1') \wedge (\alpha_2 \overset{2}{\succ} \alpha_2').$$

Теорема 1.6.1. *Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$. Справедливы следующие утверждения:*

1. *X — отделимое топологическое пространство тогда и только тогда, когда любая направленность в X имеет не более одного предела.*
2. $(x_0 \in X$ — *внутренняя точка множества* $M) \Longleftrightarrow$ $\big((x_\alpha \to x_0) \Longrightarrow (\exists \alpha_0\ \forall \alpha \succ \alpha_0\ \ x_\alpha \in M)\big)$.
3. $(x_0 \in X$ — *точка прикосновения множества* $M) \Longleftrightarrow$ $\big(\exists \{x_\alpha\} \subset M :\quad x_\alpha \to x_0\big)$.
4. $(M$ — *открыто* $) \Longleftrightarrow \big((x_\alpha \to x_0 \in M) \Longrightarrow$ $(\exists \alpha_0\ \forall \alpha \succ \alpha_0\ \ x_\alpha \in M)\big)$.
5. $(M$ — *замкнуто* $) \Longleftrightarrow \big((M \ni x_\alpha \to x_0) \Longrightarrow (x_0 \in M)\big)$.

Доказательство. $\boxed{1, \Longleftarrow}$. Пусть X не является отделимым топологическим пространством. Тогда найдутся такие $\widehat{x}$ и $\widetilde{x}$, что $\widehat{x} \neq \widetilde{x}$ и $\forall U(\widehat{x}), U(\widetilde{x})\ \ U(\widehat{x}) \cap U(\widetilde{x}) \neq \varnothing$.

Рассмотрим направленное множество $\mathcal{A} := \omega(\widetilde{x}) \times \omega(\widehat{x})$ и определим $\{x_\alpha\}$ следующим образом:

$$x_{(U(\widehat{x}), U(\widetilde{x}))} \in U(\widehat{x}) \cap U(\widetilde{x}).$$

Тогда $x_\alpha \to \widehat{x}$ и $x_\alpha \to \widetilde{x}$. ∎

Теорема 1.6.2. *Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ непрерыно в $x \in X$ тогда и только тогда, когда* $\big((x_\alpha \to x) \Longrightarrow (f(x_\alpha) \to f(x))\big)$.

Определения 1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — направленные множества, $\{x_\alpha\} \subset X$, а отображение $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ удовлетворяет условию

$$\forall \alpha_0 \in \mathcal{A}\ \exists \beta_0 \in \mathcal{B}\ (\beta \succ \beta_0 \Longrightarrow \varphi(\beta) \succ \alpha_0).$$

Тогда направленность $\{x_{\varphi(\beta)}\}$ называется *поднаправленностью направленности* $\{x_\alpha\}$.

2. Если $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, а φ — вложение $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$, то поднаправленность $\{x_{\varphi(\beta)}\}$ будем называть *тривиальной поднаправленностью направленности* $\{x_\alpha\}$.

Пример 1.6.5. Всякая подпоследовательность является поднаправленностью исходной последовательности.

Пример 1.6.6. У любой последовательности есть поднаправленности, не являющиеся подпоследовательностями.

Например, взяв $\mathcal{B} := [1; \infty)$ и $\varphi(\beta) := [\beta]$, получим поднаправленность $\{x_{[\beta]}\}$ последовательности $\{x_n\}$ не являющуюся подпоследовательностью исходной последовательности $\{x_n\}$.

Утверждение 1.6.2. *Пусть X — топологическое пространство, $\{x_\alpha\} \subset X$ и $x_0 \in X$. Соотношение $x_\alpha \to x_0$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой поднаправленности $\{x_{\varphi(\beta)}\}$ направленности $\{x_\alpha\}$ имеет место соотношение $x_{\varphi(\beta)} \to x_0$.*

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $x_\alpha \not\to x_0$, тогда $\exists\, U(x_0)\ \forall\,\alpha$ $\exists\,\alpha' \succ \alpha : x_{\alpha'} \notin U(x_0)$. Тогда $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}' := \{\alpha' \in \mathcal{A} : x_{\alpha'} \notin U(x_0)\}$ есть направленное множество, но тривиальная поднаправленность $\{x_{\alpha'}\}$ не сходится к x_0. ■

Теорема 1.6.3. *Пусть X — топологическое пространство и $K \subset X$. K компактно тогда и только тогда, когда у любой направленности элементов множества K существует поднаправленность, сходящаяся к точке из K.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть K — компакт и $\{x_\alpha\} \subset K$. Рассмотрим центрированное в K семейство замкнутых множеств $F_\alpha := \overline{\{x_{\alpha'} : \alpha' \succ \alpha\}}$. В силу компактности множества K по теореме 1.5.3 существует $x_0 \in \left(\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha\right) \cap K$. Построим поднаправленность направленности $\{x_\alpha\}$, сходящуюся к x_0.

Определим $\mathcal{B} := \mathcal{A} \times \omega(x_0)$. Пусть $\beta = (\alpha, U) \in \mathcal{B}$. Поскольку x_0 — точка прикосновения для множества $\{x_{\alpha'} : \alpha' \succ \alpha\}$, то найдется α' такое, что $\alpha' \succ \alpha$ и $x_{\alpha'} \in U$.

Положим $\varphi(\beta) = \varphi(\alpha, U) := \alpha'$, тем самым,

$$x_{\varphi(\alpha,U)} \in U \text{ и } \varphi(\alpha, U) \succ \alpha.$$

Поскольку в силу определения $\varphi(\beta)$ из соотношения $\beta = (\alpha, U) \succ \beta_0 =: (\alpha_0, U_0)$ (U_0 — любая из $\omega(x_0)$) следует, что $\varphi(\alpha, U) \succ \alpha \succ \alpha_0$, то $\{x_{\varphi(\beta)}\}$ — поднаправленность $\{x_\alpha\}$. При этом, для любой $U_0 \in \omega(x_0)$ взяв $\beta_0 := (\alpha_0, U_0)$ (α_0 — любое из $\mathcal{A}$) получим, что

$$\text{если } \beta = (\alpha, U) \succ \beta_0 = (\alpha_0, U_0), \text{ то } x_{\varphi(\alpha,U)} \in U \subset U_0.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$. Рассмотрим теперь произвольное центрированное в K семейство замкнутых множеств $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — направленное (относительно вложения) множество всех конечных подмножеств множества Γ. Тогда для любого $\alpha = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$ в силу центрированности в K семейства $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, найдется

$$x_\alpha = x_{\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}} \in \left(\bigcap_{i=1}^{k} F_{\gamma_i}\right) \cap K. \tag{1.6.1}$$

Тем самым построена направленность $\{x_\alpha\}$ элементов из K. По условию у этой направленности существует поднаправленность $\{x_{\varphi(\beta)}\}$, сходящаяся к некоторому элементу $x_0 \in K$. Покажем, что $x_0 \in \bigcap\limits_{\gamma} F_\gamma$.

Для произвольного $\gamma_0 \in \Gamma$ возьмем $\alpha_0 := \{\gamma_0\}$. Тогда из определения поднаправленности следует, что

$$\exists\, \beta_0\, \forall\, \beta \succ \beta_0\ \ \varphi(\beta) \succ \alpha_0,$$

что в силу (1.6.1) дает: $x_{\varphi(\beta)} \in F_{\gamma_0}$. Тем самым тривиальная поднаправленность $\{x_{\varphi(\beta)}\}_{\beta \succ \beta_0}$ направленности $\{x_{\varphi(\beta)}\}$ лежит в F_{γ_0}.

Но F_{γ_0} — замкнуто, а $x_{\varphi(\beta)} \underset{\beta \succ \beta_0}{\longrightarrow} x_0$, поэтому $x_0 \in F_{\gamma_0}$. Теперь осталось снова применить теорему 1.5.3. ■

Г л а в а 2

Локально выпуклые пространства

§ 1. Линейные топологические пространства

Напомним определение алгебраических операций над множествами.

Определения. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $M_1, M_2 \subset X$, $\Lambda \subset \mathbb{P}$, $a \in X$, $\mu \in \mathbb{P}$.

1. $M_1 + M_2 := \{ x_1 + x_2 : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2 \}$.
2. $M_1 - M_2 := \{ x_1 - x_2 : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2 \}$.
3. $\Lambda \cdot M_1 := \{ \lambda x : \lambda \in \Lambda, x \in M_1 \}$.
4. $M_1 + a := M_1 + \{a\}$. 5. $\mu M_1 := \{\mu\} \cdot M_1$.

Утверждение 2.1.1. *Пусть X — нормированное пространство, $a_1, a_2, b \in X$, $\lambda \in \mathbb{P}$, $r > 0$, $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $B(a,r) + b = B(a+b,r)$, $B[a,r] + b = B[a+b,r]$.
2. $B(a_1,r_1) + B(a_2,r_2) = B(a_1,r_1) + B[a_2,r_2]$;
   $B(a_1,r_1) + B[a_2,r_2] = B(a_1+a_2, r_1+r_2)$;
   $B[a_1,r_1] + B[a_2,r_2] = B[a_1+a_2, r_1+r_2]$.
3. $\lambda B(a,r) = B(\lambda a, |\lambda| r)$, $\lambda B[a,r] = B[\lambda a, |\lambda| r]$.
4. $M + B[0,r_1] \subset B[0,r_2] \Longrightarrow M \subset B[0, r_2 - r_1]$.
5. $B(a,r) - B(a,r) = B(0,2r)$.

Утверждение 2.1.2. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $A, B \subset X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $(\lambda + \mu)A \subset \lambda A + \mu A$. 2. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
3. $A + B = \bigcup\limits_{x \in B} (A + x)$.

Определение. Линейное пространство X над полем $\mathbb{P}$ с заданной на X топологией τ называется *линейным топологическим пространством*, если операции сложения и умножения на скаляр непрерывны в этой топологии, т. е.

1. $\forall\, x_1, x_2 \in X\ \forall\, U(x_1 + x_2)\ \exists\, U(x_1), U(x_2)$:
$$U(x_1) + U(x_2) \subset U(x_1 + x_2).$$
2. $\forall\, x \in X\ \forall\, \lambda \in \mathbb{P}\ \forall\, U(\lambda x)\ \exists\, U(x), U(\lambda)$:
$$U(\lambda) \cdot U(x) \subset U(\lambda x).$$

Определение. *Подпространством линейного топологического пространства* называется замкнутое линейное многообразие.

Пример 2.1.1. Всякое нормированное пространство есть линейное топологическое пространство.

Пример 2.1.2. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $X \neq \{0\}$. Тогда $\langle X, \tau_a \rangle$ — линейное топологическое пространство, а $\langle X, \tau_d \rangle$ не является линейным топологическим пространством.

Утверждение 2.1.3. *Пусть $\langle X, \tau \rangle$ — линейное топологическое пространство, $a \in X$ и $0 \neq \lambda \in \mathbb{P}$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $G \in \tau \Longleftrightarrow G + a \in \tau$. 2. $G \in \tau \Longleftrightarrow \lambda G \in \tau$.

Действительно, отображения $f_a(x) := x + a$ и $g_\lambda(x) := \lambda x$ являются непрерывными биекциями X на X, причем обратные к ним отображения $f_a^{-1}(y) = y - a$ и $g_\lambda^{-1}(y) = \lambda^{-1} y$ тоже непрерывны. ∎

Следствие. 1. *Топология линейного топологического пространства полностью определяется окрестностями нуля.*

2. *Если X — линейное топологическое пространство, а $X \supset A$ — открытое множество, то для любого $B \subset X$ множество $A + B$ — открыто.*

Определения. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $M \subset X$.

1. Множество M называется *поглощающим*, если

$$\forall\, x \in X\, \exists\, \lambda \geqslant 0\, \forall\, \mu \in \mathbb{P}\ (|\mu| \geqslant \lambda \Longrightarrow x \in \mu M).$$

2. Множество M называется *уравновешенным*, если

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{P}\ (|\lambda| \leqslant 1 \Longrightarrow \lambda M \subset M).$$

Пример 2.1.3. В нормированном пространсте любой шар с центром в нуле есть уравновешенное и поглощающее множество.

Утверждение 2.1.4 (свойства уравновешенных множеств). *Пусть M — уравновешенное множество в линейном пространстве X и $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $|\lambda| \leqslant |\mu| \Longrightarrow \lambda M \subset \mu M$. 2. $|\lambda| = |\mu| \Longrightarrow \lambda M = \mu M$.
3. $0 \in M$. 4. $|\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda M = M$. 5. $-M = M$.

Определения. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $M \subset X$.

1. Точка x_0 называется *псевдовнутренней точкой множества* M, если $\forall\, y \in X\ \exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \lambda \in \mathbb{P}\ (|\lambda| < \varepsilon \Longrightarrow x_0 + \lambda y \in M)$.

2. Множество всех псевдовнутренних точек множества M называется *ядром множества* M и обозначается: $\overset{\bullet}{M}$.

2. Если $\overset{\bullet}{M} \neq \varnothing$, то множество M называется *телом*.

Утверждение 2.1.5. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $M \subset X$. Тогда $\big((M$ — поглощающее множество$) \Longleftrightarrow (0 \in \overset{\bullet}{M})\big)$.*

Утверждение 2.1.6. *В линейном пространстве над полем $\mathbb{P}$ справедливы следующие соотношения:*

1. $\overset{\bullet}{M} \subset M$. 2. $(M \overset{\bullet}{+} x) = \overset{\bullet}{M} + x$. 3. $\left(\bigcup\limits_{\alpha} M_\alpha\right)^{\bullet} \supset \bigcup\limits_{\alpha} \overset{\bullet}{M}_\alpha$.

Задание 2.1.1. Приведите пример множества, для которого $\left(\overset{\bullet}{M}\right)^{\bullet} \neq \overset{\bullet}{M}$.

Утверждение 2.1.7 (свойства окрестностей нуля в линейном топологическом пространстве).

1. $\forall\, U(0)\, \exists\, U_1(0)\quad U_1(0) + U_1(0) \subset U(0)$.
2. *Всякая окрестность нуля — поглощающее множество.*
3. *Существует база окрестностей нуля, состоящая из уравновешенных множеств.*

Доказательство. $\boxed{3}$. Так как $0 \cdot 0 = 0$, то

$$\forall\, U(0)\, \exists\, U_1(0), \delta > 0\, \forall\, \lambda \in \mathbb{P}\quad (|\lambda| < \delta \Longrightarrow \lambda \cdot U_1(0) \subset U(0)).$$

Тогда $U_2(0) := \bigcup\limits_{|\lambda| < \delta} (\lambda \cdot U_1(0))$ — уравновешенное множество и $U_2(0) \subset U(0)$. ■

Следствие. 1. *Любое линейное топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_3.*

2. *Любое отделимое линейное топологическое пространство регулярно.*

3. *В линейном топологическом пространстве $\overset{\circ}{M} \subset \overset{\bullet}{M}$.*

Доказательство. $\boxed{1}$. Если U — окрестность нуля, то по утверждению 2.1.7.1 найдется такая окрестность нуля U_1, что $U_1 + U_1 \subset U$. Но $\overline{U_1} \subset U_1 + U_1$ и осталось применить утверждение 1.2.1. ■

Пример 2.1.4. В любом нормированном пространстве $\{\, B(0, r) : r > 0 \,\}$ — база окрестностей нуля из уравновешенных множеств.

Теорема 2.1.1. *Пусть в линейном пространстве X задана система подмножеств $\omega \subset \mathcal{B}(X)$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

1. $\omega \ni V$ *— поглощающее и уравновешенное множество;*
2. $\forall\, V_1, V_2 \in \omega\ \ \exists\, V_3 \in \omega : V_3 \subset V_1 \cap V_2$;

3. $\forall V_1 \in \omega \;\; \exists V_2 \in \omega : V_2 + V_2 \subset V_1$.

Тогда в X существует топология τ, относительно которой X является линейным топологическим пространством, а ω — база окрестностей нуля в этой топологии.

Доказательство. Топологию τ в X определим так же, как в теореме 1.3.2: $\varnothing \neq G \in \tau := \forall x \in G \;\; \exists V \in \omega : x + V \subset G$. Свойство 2. показывает, что это действительно топология.

Покажем, что ω это база окрестностей нуля в топологии τ.

В силу определения τ, для этого достаточно показать, что любое $V \in \omega$ есть окрестность нуля, т. е. содержит в себе открытое множество, которому принадлежит точка 0. Пусть $V \in \omega$, по свойству 2 найдется $V_1 \in \omega$: $V_1 + V_1 \subset V$. Тогда $\forall y \in V_1$ $y + V_1 \subset V_1 + V_1 \subset V$ и, тем самым $0 \in V_1 \subset \overset{o}{V}$.

Покажем, что $\langle X, \tau \rangle$ — линейное топологическое пространство. Непрерывность сложения почти очевидна. В силу свойства 3 получим $(x + V_2) + (y + V_2) \subset (x + y + V_1)$.

Покажем непрерывность произведения. В силу свойства 3 $\forall V \in \omega \;\; \exists V_1 \in \omega : 2V_1 \subset V_1 + V_1 \subset V$. Продолжая это процесс получим, что $\forall V \in \omega \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists \widehat{V} \in \omega : 2^n \widehat{V} \subset V$.

Пусть $x \in X$ и $0 \neq \lambda \in \mathbb{P}$. Для $V \in \omega$ в силу свойства 3 найдем $V_1 \in \omega$: $V_1 + V_1 + V_1 + V_1 \subset V$. Потом для V_1 и n: $2^n \geqslant |\lambda|$ найдем $V_2 \in \omega$: $2^n V_2 \subset V_1$. Тогда, в силу уравновешенности множества V_2 по утверждению 2.1.4.1 $\lambda V_2 \subset 2^n V_2 \subset V_1$. Далее в силу того, что V_2 — поглощающее множество, найдется $\delta < 1$ такое, что $|\mu| \geqslant 1/\delta$: $x \in \mu V_2$ или $|\nu| \leqslant \delta$: $\nu x \in V_2$.

Отметим, что $|\nu| \leqslant \delta$ и $\nu V_2 \subset V_2$ в силу уравновешенности множества V_2. Тогда $\forall |\nu| < \delta$

$$(\lambda + \nu) \cdot (x + V_2) \subset \lambda x + \lambda V_2 + \nu x + \nu V_2 \subset \lambda x + V_1 + V_2 + V_2 \subset$$
$$\subset \lambda x + V_1 + V_1 + V_1 \subset \lambda x + V_1 + V_1 + V_1 + V_1 \subset \lambda x + V. \quad \blacksquare$$

Определение. Множество M в линейном топологическом пространстве называется *ограниченным*, если оно поглощается любой окрестностью нуля, т. е.

$$\forall U(0) \; \exists \lambda > 0 \; \forall \mu \; (|\mu| \geqslant \lambda \Longrightarrow M \subset \mu U(0)).$$

Утверждение 2.1.8. *Пусть X — линейное топологическое пространство и $M \subset X$. Тогда (M ограничено) $\Longleftrightarrow$ $\big(\forall \{ x_n \} \subset M \;\; \forall \{ \lambda_n \} \subset \mathbb{P} \;\; (\lambda_n \to 0 \Longrightarrow \lambda_n x_n \to 0)\big)$.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть M ограничено. Тогда $\forall V \in \omega(0) \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall |\mu| \geqslant 1/\delta \;\; M \subset \mu V$, или, что то же самое, $\forall V \in \omega(0) \;\; \exists \delta > 0 \; \forall |\nu| \leqslant \delta \;\; \nu M \subset V$. Поэтому при всех n: $|\lambda_n| < \delta \;\; \lambda_n x_n \in V$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть M неограничено Тогда $\exists V_0 \in \omega(0) \;\; \forall \delta > 0$ $\exists |\nu| \leqslant \delta$: $\nu M \not\subset V$. Взяв $\delta := 1/n$, найдем ν_n: $|\nu_n| \leqslant 1/n$ и $x_n \in M$: $\nu_n x_n \notin V$, т. е. $\nu_n x_n \not\to 0$. $\blacksquare$

§ 2. Выпуклые и абсолютно выпуклые множества в линейных топологических пространствах

Определения. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $M \subset X$.

1. Множество M называется *выпуклым*, если

$$\forall a, b \in M \quad [a;b] := \{ (1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b : \; \lambda \in [0;1] \} \subset M.$$

2. Множество M называется *абсолютно выпуклым*, если

$$\forall a, b \in M \, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{P} \;\; (|\lambda| + |\mu| \leqslant 1 \Longrightarrow \lambda a + \mu b \in M).$$

Утверждение 2.2.1. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $M \subset X$. Тогда (M — выпуклое множество) $\Longleftrightarrow$ $\big(\forall \lambda \in [0;1] \;\; (1 - \lambda)M + \lambda M = M\big)$.*

Утверждение 2.2.2. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Тогда $\big(M$ абсолютно выпукло$\big) \Longleftrightarrow \big(M$ выпукло и уравновешенно$\big)$.*

Утверждение 2.2.3. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Тогда $\big(M$ абсолютно выпукло$\big) \Longleftrightarrow \big(M$ выпукло и симметрично относительно нуля$\big)$.*

Утверждение 2.2.4 (свойства выпуклых и абсолютно выпуклых множеств). *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Пересечение любого семейства выпуклых (абсолютно выпуклых) множеств есть выпуклое (абсолютно выпуклое) множество.*

2. *Если M — выпуклое (абсолютно выпуклое) множество, то $\lambda \cdot M$ — выпуклое (абсолютно выпуклое) множество.*

3. *Сумма двух выпуклых (абсолютно выпуклых) множеств есть выпуклое (абсолютно выпуклое) множество.*

4. *Если M — выпуклое множество, $0 \in M$ и $\alpha \in [0;1]$, то $\alpha M \subset M$.*

5. *Если M — абсолютно выпуклое множество, то*

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{P} \quad \lambda M + \mu M = (|\lambda| + |\mu|)M.$$

Доказательство. $\boxed{5}$. Если $(\lambda = 0) \vee (\mu = 0)$, то справедливость утверждения следует из свойств уравновешенных множеств.

Если $(\lambda \neq 0) \wedge (\mu \neq 0)$, то

$$(|\lambda| + |\mu|)^{-1}(\lambda + \mu)M = \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|}\frac{\lambda}{|\lambda|}M + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|}\frac{\mu}{|\mu|}M \overset{\text{утв. } 2.1.4.4}{=}$$

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|}M + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|}M \overset{\text{утв. } 2.2.1}{=} M. \quad \blacksquare$$

Утверждение 2.2.5. *Пусть X — линейное топологическое пространство и $M \subset X$. Если M — выпуклое (абсолютно выпуклое) множество, то $\overset{\circ}{M}$ и $\overline{M}$ — выпуклые (абсолютно выпуклые) множества.*

Доказательство. 1. Пусть $\overset{\circ}{M} \neq \varnothing$ и $x, y \in \overset{\circ}{M}$. Тогда $\exists\, V \in \omega(0)\colon (x + V \subset M) \wedge (y + V \subset M)$. Поэтому $\forall\, \lambda \in [0;1]$

$$\begin{aligned}(1-\lambda)x + \lambda y + V &\subset (1-\lambda)x + \lambda y + (1-\lambda)V + \lambda V = \\ &= (1-\lambda)(x + V) + \lambda(y + V) \subset (1-\lambda)M + \lambda M = M.\end{aligned}$$

2. Пусть $x, y \in \overline{M}$. Тогда $\exists\, \{\, x_\alpha \,\}, \{\, y_\alpha \,\} \subset M : x_\alpha \to x,\ y_\alpha \to x$ $(\mathcal{A} = \omega(0))$. Тогда $\forall\, \lambda \in [0;1]$

$$M \ni \big((1-\lambda)x_\alpha + \lambda y_\alpha\big) \to ((1-\lambda)x + \lambda y) \in \overline{M}. \quad \blacksquare$$

Пример 2.2.1. В нормированном пространстве $B(a,r)$, $B[a,r]$ — выпуклые множества, а $B(0,r)$, $B[0,r]$ — абсолютно выпуклые множества.

Определения. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $M \subset X$.

1. Множество $conv(M) := \bigcap\limits_{\substack{M \subset V \text{ — } \\ \text{выпуклое}}} V$ называется *выпуклой оболочкой множества M*.

2. Множество $absconv(M) := \bigcap\limits_{\substack{M \subset V \text{ — } \\ \text{абс. выпуклое}}} V$ называется *абсолютно выпуклой оболочкой множества M*.

Утверждение 2.2.6. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $M \subset X$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $conv(M) = \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i :\ k \in \mathbb{N}, x_i \in M, \lambda_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \Big\}$.

2. $absconv(M) = \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i :\ k \in \mathbb{N}, x_i \in M, \sum\limits_{i=1}^{k} |\lambda_i| \leqslant 1 \Big\}$.

Утверждение 2.2.7. 1. *Если M — выпуклое множество в линейном пространстве над полем $\mathbb{P}$, $x_0 \in \overset{\bullet}{M}$, а $x_1 \in M$, то $[x_0, x_1) := [x_0; x_1] \setminus \{x_1\} \subset \overset{\bullet}{M}$.*

2. *Если M — выпуклое множество в линейном топологическом пространстве, $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, а $x_1 \in M$, то $[x_0; x_1) \subset \overset{\circ}{M}$.*

Доказательство. $\boxed{1}$. Так как $x_0 \in \overset{\bullet}{M}$, то $\forall\, e \in X\ \exists\, \varepsilon_0 > 0$ $\forall\, |\lambda| \leqslant \varepsilon_0\ \ x_0 + \lambda e \in M$. Пусть $x_\alpha := (1-\alpha)x_0 + \alpha x_1 \in [x_0; x_1)$. Тогда $M \ni (1-\alpha)\cdot(x_0 + \lambda e) + \alpha x_1 = (1-\alpha)x_0 + \alpha x_1 + (1-\alpha)\lambda e = x_\alpha + \big((1-\alpha)\lambda\big)e$. $\blacksquare$

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если M — выпуклое множество в линейном пространстве над полем $\mathbb{P}$, то $\overset{\bullet}{M}$ — выпуклое множество и $\left(\overset{\bullet}{M}\right)^{\bullet} = \overset{\bullet}{M}$.*

2. *Если M — выпуклое множество в линейном топологическом пространстве и $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$, то $\overset{\circ}{M} = \overset{\bullet}{M}$.*

Доказательство. $\boxed{1}$. Поскольку $\left(\overset{\bullet}{M}\right)^{\bullet} \subset \overset{\bullet}{M}$, то осталось показать справедливость обратного включения. Пусть $x_0 \in \overset{\bullet}{M}$ и $e \in X$, тогда $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \lambda \in \mathbb{P}\ (|\lambda| < \varepsilon_0 \Longrightarrow x_0 + \lambda e \in M)$. В силу утверждения 2.2.7.1 $\ [x_0, x_0 + \lambda e) \subset \overset{\bullet}{M}$. Поэтому $x_0/2 + (x_0 + \lambda e)/2 = x_0 + (\lambda/2)e \in \overset{\bullet}{M}$, т. е. $x_0 \in \left(\overset{\bullet}{M}\right)^{\bullet}$.

$\boxed{2}$. Поскольку $\overset{\circ}{M} \subset \overset{\bullet}{M}$, то осталось показать справедливость обратного включения. Пусть $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, а $x_1 \in \overset{\bullet}{M}$, тогда найдется $\lambda > 0$ такое, что $x_1 + \lambda(x_1 - x_0) \in M$. В силу утверждения 2.2.7.2 $\ [x_0, (1+\lambda)x_1 - \lambda x_0) \subset \overset{\circ}{M}$. Возьмем $\alpha := 1/(1+\lambda)$. Поскольку $\alpha \in (0;1)$, то $(1-\alpha)x_0 + \alpha((1+\lambda)x_1 - \lambda x_0) = x_1 \in \overset{\circ}{M}$ ∎

Утверждение 2.2.8. *Если U — выпуклая окрестность нуля в линейном топологическом пространстве, то существует U_{ac} — абсолютно выпуклая окрестность нуля такая, что $U_{ac} \subset U$.*

Доказательство. По утверждению 2.1.7.3 существует уравновешенная окрестность нуля $U_0 \subset U$. В силу утверждения 2.1.4.4 при $|\lambda| = 1$ будем иметь $U_0 = \lambda U_0 \subset \lambda U$, поэтому $U_0 \subset \bigcap\limits_{|\lambda|=1} (\lambda U) =: U_{ac}$ — выпуклая окрестность нуля и $U_{ac} \subset U$. Покажем, что U_{ac} — уравновешенное множество.

Пусть $0 < |\mu| \leq 1$. Тогда

$$\mu U_{ac} = |\mu| \left(\frac{\mu}{|\mu|} U_{ac}\right) = |\mu| \bigcap_{|\lambda|=1} \left(\frac{\mu\lambda}{|\mu|} U\right) = \left[\beta := \frac{\mu\lambda}{|\mu|}\right] =$$

$$= |\mu| \bigcap_{|\beta|=1} (\beta U) = |\mu| U_{ac} \overset{\text{утв.2.2.4.4}}{\subset} U_{ac}. \blacksquare$$

Определение. Линейное топологическое пространство называется *локально выпуклым пространством*, если в нем существует база окрестностей нуля, состояшая из выпуклых множеств.

Замечание. В силу утверждения 2.2.8 в локально выпуклом пространстве существует база окрестностей нуля, состоящая из абсолютно выпуклых множеств.

Пример 2.2.2. Всякое нормированное пространство есть отделимое локально выпуклое пространство.

§ 3. Полунормы и функционал Минковского

Определения. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, а $p : X \to \mathbb{R}$.

1. Отображение $p(\cdot)$ называется *полуаддитивным*, если

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \qquad p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2).$$

2. Отображение $p(\cdot)$ называется *положительно однородным функционалом*, если

$$\forall\, \lambda > 0 \qquad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

3. Отображение $p(\cdot)$ называется *выпуклым функционалом*, если $\forall\, \alpha \in [0;1]\ \ \forall\, x_1, x_2 \in X$

$$p((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leqslant (1-\alpha)p(x_1) + \alpha p(x_2).$$

4. Отображение $p(\cdot)$ называется *полунормой* (или *преднормой*), если оно полуаддитивно и

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{P}\ \forall\, x \in X \qquad p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x).$$

Утверждение 2.3.1. *Пусть $p : X \to \mathbb{R}$ — полунорма на линейном пространстве X. Справедливы следующие утверждения:*

1. $p(0) = 0$; 2. $p(x) \geqslant 0$; 3. $p(-x) = p(x)$.
4. $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y)$.
5. *$p(\cdot)$ — положительно однородный функционал.*

Следствие. *Если $p(\cdot)$ — полунорма на линейном пространстве, то $p(\cdot)$ — выпуклый функционал.*

Утверждение 2.3.2. *Если $p(\cdot)$ — полунорма на линейном пространстве X, то $V := \{\, x \in X : p(x) \leqslant 1 \,\}$ — абсолютно выпуклое и поглощающее множество.*

Определение. Пусть V — поглощающее множество в линейном пространстве X. Отображение $p_V : X \to \mathbb{R}$, определенное формулой

$$p_V(x) := \inf\{\, \mu > 0 : x \in \mu \cdot V \,\},$$

называется *функционалом Минковского, порожденным множеством V (соответствующим множеству V).*

Замечание. Функционал Минковского можно определить и для не поглощающих множеств V, тогда при некоторых аргументах (не поглощаемых множеством V) значения функционала будут равны $+\infty$.

Теорема 2.3.1 *Пусть $V \subset X$ — линейное пространство. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Функционал Минковского $p_V(\cdot)$ — положительно однородный функционал.*
2. *Если V уравновешенно, то $p_V(\lambda x) = |\lambda| p_V(x)$.*
3. *Если V выпукло, то $p_V(\cdot)$ — выпуклый функционал.*
4. *Если V поглощающее множество, то $\forall\, x \in X\ p_V(x) \in \mathbb{R}$.*
5. *Если V абсолютно выпуклое поглощающее множество, $p_V(\cdot)$ — то полунорма на X и*

$$\{\, x : p_V(x) < 1 \,\} \subset V \subset \{\, x : p_V(x) \leqslant 1 \,\}.$$

6. *Если $p(\cdot)$ — полунорма на линейном пространстве X, то найдется такое абсолютно выпуклое поглощающее множество $V \subset X$, что $p(\cdot) = p_V(\cdot)$*

Доказательство. $\boxed{2}$. Если $\lambda \neq 0$, то $p_V(\lambda x) = \inf \Big\{ \mu > 0 \colon x \in \frac{\mu}{|\lambda|} \cdot \frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot V \Big\} = [\nu := \mu/|\lambda|, V - \text{уравн.}] = \inf\{ |\lambda| \nu : x \in \nu \cdot V \} = |\lambda| p_V(x)$.

$\boxed{3}$. Пусть $\mu_i := p_V(x_i)$ $(i = 1, 2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\overset{\varepsilon}{\mu}_i$, что $\mu_i \leqslant \overset{\varepsilon}{\mu}_i \leqslant \mu_i + \varepsilon$ и $x_i \in \overset{\varepsilon}{\mu} V$. Тогда

$$\frac{x_1 + x_2}{\overset{\varepsilon}{\mu}_1 + \overset{\varepsilon}{\mu}_2} = \left(\frac{\overset{\varepsilon}{\mu}_1}{\overset{\varepsilon}{\mu}_1 + \overset{\varepsilon}{\mu}_2} \right) \frac{x_1}{\overset{\varepsilon}{\mu}_1} + \left(\frac{\overset{\varepsilon}{\mu}_2}{\overset{\varepsilon}{\mu}_1 + \overset{\varepsilon}{\mu}_2} \right) \frac{x_2}{\overset{\varepsilon}{\mu}_2} \in [V \text{выпуклое}] \in V.$$

Поэтому $p_V(x_1 + x_2) \leqslant \overset{\varepsilon}{\mu}_1 + \overset{\varepsilon}{\mu}_2 \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} p_V(x_1) + p_V(x_2)$.

$\boxed{5}$. То, что $p_V(\cdot)$ — полунорма, следует из утвердений 2 и 3 этой теоремы. Если $p_V(x) < 1$, то $\exists\, \mu \in (0; 1) \colon x \in \mu \cdot V \subset V$. Наконец, если $x \in V = 1 \cdot V$, то $p_V(x) \leqslant 1$.

$\boxed{6}$. По утверждению 2.3.2 $V := \{\, x \in X : p(x) \leqslant 1 \,\}$ — абсолютно выпуклое поглощающее множество. При этом $p_V(x) = \inf\{\, \mu > 0 : x \in \mu \cdot V \,\} = \inf\{\, \mu > 0 : p(x) \leqslant \mu \,\} = p(x)$. ■

Утверждение 2.3.3. *Пусть $p : X \to \mathbb{R}$ — полунорма на на линейном топологическом пространстве X. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$p(\cdot)$ непрерывна на X.* 2. *$p(\cdot)$ непрерывна в нуле.*
3. *$p(\cdot)$ ограничена на некоторой окрестности нуля.*

Утверждение 2.3.4. *Если V — абсолютно выпуклое поглощающее множество в линейном пространстве X, то*

$$(p_V(\cdot) \text{ норма }) \Longleftrightarrow (\forall\, x \neq 0\ \ \mathbb{R} \cdot x \not\subset V).$$

Теорема 2.3.2 (Колмогоров) (критерий нормируемости). *Отделимое линейное топологическое пространство $\langle X, \tau \rangle$ нормируемо (его топология τ порождается некоторой нормой на X) тогда и только тогда, когда в нем существует выпуклая ограниченная окрестность нуля.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. $B(0,1)$ — выпуклая и ограниченная окрестность нуля.

$\boxed{\Longleftarrow}$. 1. Пусть U_0 — выпуклая ограниченная окрестность нуля. По утверждению 2.2.8 существует абсолютно выпуклая окрестность нуля V такая, что $V \subset U_0$. Покажем, что $p_V(\cdot)$ — норма. Если $p_V(\cdot)$ — не норма, то $\exists\, x_0 \neq 0 \colon \mathbb{R} \cdot x_0 \subset V$. Но V ограничено, поэтому $\forall\, U(0)\, \exists\, \lambda > 0 \ : \ V \subset \lambda \cdot U(0) \Longrightarrow \mathbb{R} \cdot x_0 \subset \lambda \cdot U(0) \Longrightarrow \mathbb{R} \cdot x_0 \subset U(0)$ и тем самым X — не отделимое пространство.

2. Покажем, что эта норма порождает исходную топологию. Пусть $U(0)$ — произвольная окрестность нуля.

2.1. Поскольку $p_V(\cdot)$ ограничена на окрестности нуля V, то по утверждению 2.3.3.3 она непрерывна и, тем самым, $B(0,1) = \{\, x \in X : p_V(x) < 1 \,\}$ есть открытое множество.

2.2. В силу ограниченности V $\forall\, U(0)\, \exists\, n \in \mathbb{N} \colon V \subset n \cdot U(0)$.

Но $B(0;1) \subset V \subset n \cdot U(0)$, поэтому $B(0;1/n) \subset U(0)$, т. е. $\{\, B(0;1/n);\ n \in \mathbb{N} \,\}$ — база окрестностей нуля исходной топологии τ. ∎

§ 4. Способы задания локально выпуклой топологии

Теорема 2.4.1. *Пусть в линейном пространстве X задана система подмножеств $\omega \subset \mathcal{B}(X)$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

1. *$\omega \ni V$ — поглощающее и абсолютно выпуклое множество;*
2. *$\forall\, V_1, V_2 \in \omega \ \ \exists\, V_3 \in \omega \colon V_3 \subset V_1 \cap V_2$;*
3. *$\forall\, V \in \omega \ \ \forall\, \lambda > 0 \quad \lambda V \in \omega$.*

Тогда в X существует топология τ, относительно которой X является локально выпуклым топологическим пространством, а ω — база окрестностей нуля в этой топологии.

Действительно, свойство 3 из теоремы 2.1.1 в данном случае следует из последнего свойства системы, поскольку в силу выпуклости множеств из ω имеем $0.5V + 0.5V = V$. ∎

Определение. Пусть $\{\, V_\alpha \,\}$ — произвольная система абсолютно выпуклых и поглощающих множеств в линейном пространстве X. *Локально выпуклой топологией, порожденной системой* $\{\, V_\alpha \,\}$, называется слабейшая из всех локально выпуклых топологий, в которой все V_α являются окрестностями нуля.

Утверждение 2.4.1. *Если $\{\, V_\alpha \,\}$ — система абсолютно выпуклых и поглощающих множеств в линейном пространстве X, то $\left\{ \varepsilon \cdot \bigcap\limits_{i=1}^{k} V_{\alpha_i} \ : \ k \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0 \right\}$ — база окрестностей нуля локально выпуклой топологии, порожденной этой системой.*

Замечание. В силу утверждений 5 и 6 теоремы 2.3.1 локально выпуклую топологию на линейном пространстве X можно задавать с и помощью системы полунорм.

Определение. Пусть $\{\, p_\alpha(\cdot) \,\}$ — произвольная система полунорм, определенных в линейном пространстве X. *Локально выпуклой топологией, порожденной системой* $\{\, p_\alpha(\cdot) \,\}$, называется слабейшая из всех локально выпуклых топологий, в которой все $p_\alpha(\cdot)$ непрерывны.

Утверждение 2.4.2. *Если система полунорм $\{\, p_\alpha(\cdot) \,\}$ в линейном пространстве X, то $\left\{ x \ : \ \max\limits_{i \in \overline{1,k}} p_{\alpha_i}(x) \leqslant \varepsilon,\ k \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0 \right\}$ — база замкнутых окрестностей нуля локально выпуклой топологии, порожденной этой системой полунорм.*

Замечание. Если мы от системы абсолютно выпуклых и поглощающих множеств $\{\, V_\alpha \,\}$ перейдем к системе их функционалов Минковского $\{\, p_{V_\alpha}(\cdot) \,\}$, то локально выпуклая топология, порожденная системой этих полунорм, совпадет с локально выпуклой топологией, порожденной системой $\{\, V_\alpha \,\}$.

И наоборот, если мы от системы полунорм $\{ p_\alpha(\cdot) \}$ перейдем к системе $\{ V_\alpha \}$, где $V_\alpha := \{ x : p_\alpha(x) \leqslant 1 \}$, то локально выпуклая топология, порожденная системой $\{ V_\alpha \}$, совпадет с локально выпуклой топологией, порожденной системой полунорм $\{ p_\alpha(\cdot) \}$.

Утверждение 2.4.3. *Пусть $\{ p_\alpha(\cdot) \}$ — система полунорм, порождающая на линейном пространстве X локально выпуклую топологию τ. Справедливы следующие утверждения:*

1. $(\tau$ *отделимая* $) \Longleftrightarrow \Big(\big(\forall \alpha \ p_\alpha(x) = 0\big) \Longrightarrow (x = 0) \Big)$.
2. $(X \supset M$ *ограничено* $) \Longleftrightarrow (\forall \alpha \ p_\alpha(M)$ *ограничено*$)$.
3. $(X \ni x_\beta \to x_0) \Longleftrightarrow \big(\forall \alpha \ p_\alpha(x_\beta) \to p_\alpha(x_0)\big)$.

Теорема 2.4.2. *Отделимое локально выпуклое пространство со счетной базой окрестностей нуля метризуемо.*

Доказательство. Пусть $\{ V_n \}$ — открытая база абсолютно выпуклых вложенных окрестностей нуля, а $p_n(\cdot)$ — функционал Минковского множества V_n. Отметим, что

$$\begin{gathered} V_n = \{ x \in X : p_n(x) < 1 \} \text{ и} \\ \forall x \in X,\ n \in \mathbb{N} \qquad p_{n+1}(x) \geqslant p_n(x). \end{gathered} \tag{2.4.1}$$

1. Определим $f : X \to \mathbb{R}$ формулой $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \dfrac{p_n(x)}{1 + p_n(x)}$. Эта функция полуаддитивна, неотрицательна и симметрична относительно нуля $(f(-x) = f(x))$. Кроме этого, в силу отделимости τ $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

2. Определим метрику на X следующей формулой: $\rho(x, y) := f(x - y)$. Покажем, что $\tau(\rho) = \tau$.

Прежде всего покажем, что точка $x = 0$ есть внутренняя точка в смысле топологии τ любого шара $B(0, r)$. В силу (2.4.1) и того, что $\frac{t}{1+t} \uparrow$ при $t \geqslant 0$ из неравенства $p_{\widehat{n}}(x) < \varepsilon$ следует, что $f(x) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\widehat{n}} 2^{-n} \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + 2^{-\widehat{n}} < \varepsilon + 2^{-\widehat{n}}$. Поэтому, взяв ε и $\widehat{n}$ из условий $\varepsilon < r/2$ и $2^{-\widehat{n}} < r/2$, получим, что $\varepsilon V_{\widehat{n}} \subset B(0, r)$.

3. Теперь покажем, что $\{ B(0, r) \}$ есть база окрестностей нуля топологии τ. Если $p_n(x) \geqslant \varepsilon > 0$, то

$$f(x) \geqslant 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)} \geqslant \left[\frac{t}{1+t} \uparrow, t \geqslant 0 \right] \geqslant 2^{-n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Поэтому, если $f(x) < 2^{-n} \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, то $p_n(x) < \varepsilon$, т. е. $B\Big(0, 2^{-n} \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big) \subset \{ x \in X : p_n(x) < \varepsilon \}$. Таким образом (при $\varepsilon = 1$) $B\big(0, 2^{-n-1}\big) \subset V_n$. ■

Пример 2.4.1. $\langle C[a;b], \{ p(x; t_1, \cdots, t_k) := \max\limits_{i \in \overline{1,k}} |x(t_i)| \}$, $k \in \mathbb{N}$, $t_i \in [a;b] \rangle$ — локально выпуклое пространство непрерывных на $[a;b]$ функций с поточечной сходимостью. Это пространство не метризуемо (в базе континуум элементов и меньше взять нельзя).

Пример 2.4.2. $\langle C^m(\mathbb{R}), \{ p_{k,n}(x) := \max\limits_{|t| \leqslant n} |x^{(k)}(t)|,\ k \leqslant m$, $k, m \in \mathbb{Z}_+, \} \rangle$ — метризуемо.

Пример 2.4.3. $\mathcal{E}(\mathbb{R}) := \langle C^\infty(\mathbb{R}), \{ p_{k,n}(x) := \max\limits_{|t| \leqslant n} |x^{(k)}(t)|$, $k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N} \} \rangle$ — метризуемо.

Пример 2.4.4. $\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \langle \{ x(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}) : p_{k,n}(x) \in \mathbb{R} \}$, $\{ p_{k,n}(x) := \max\limits_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|^n) |x^{(k)}(t)|, k, n \in \mathbb{Z}_+ \} \rangle$ — локально выпуклое пространство быстро убывающих функций. Это пространство метризуемо.

Пример 2.4.5. Пусть S — отделимое топологическое пространство, $C(S)$ — множество непрерывных отображений S в $\mathbb{P}$ и *comp* (S) — множество всех компактных подмножеств из S. Тогда $\langle C(S), \{ p_K(x) := \max\limits_{t \in K} |x(t)|, K \in comp\,(S) \} \rangle$ есть локально выпуклое пространство непрерывных функций из S в $\mathbb{P}$ с топологией равномерной сходимости на компактах K из S. Если существует последовательность $\{ K_n \}$ компактов такая, что $K_{n+1} \supset K_n$ и $\bigcup\limits_n K_n = S$, то это пространство метризуемо.

Пример 2.4.6. Пусть $\mathcal{K}(S)$ — множество непрерывных на S функций со значениями в $\mathbb{P}$ и с компактными носителями. На этом множестве можно ввести следующие локально выпуклые топологии:

1. Топологию равномерной сходимости на конечных множествах (это топология поточечной сходимости).
2. Топологию равномерной сходимости на компактных множествах.
3. Топологию равномерной сходимости на всем S.

Пример 2.4.7. Пусть X — нормированное пространство, а X^* — множество всех непрерывных на X линейных функционалов. Слабая топология $\sigma(X, X^*)$ на X, определяемая X^*, задается следующим семейством полунорм: $p_\varphi(x) := |\varphi(x)|$, $\varphi \in X^*$.

Отметим, что слабая сходимость в X есть не что иное, как сходимость относительно этой топологии $\sigma(X, X^*)$.

§ 5. Полные линейные топологические пространства

Определение. Направленность $\{ x_\alpha \}$ в линейном топологическом пространстве X называется *фундаментальной направленностью* или *направленностью Коши*, если

$$\forall U(0)\ \exists \alpha_0\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \succ \alpha_0 \quad x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in U(0).$$

Утверждение 2.5.1. *Пусть X — линейное топологическое пространство и $\{ x_\alpha \} \subset X$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $(\{ x_\alpha \}$ *— фундаментальная* $) \Longleftrightarrow \Big((x_\alpha - x_{\alpha'}) \underset{(\alpha,\alpha')\in\mathcal{A}^2}{\longrightarrow} 0 \Big)$.
2. $(x_\alpha \to x_0) \Longrightarrow (\{ x_\alpha \}$ *— фундаментальная*$)$.
3. $(\{ x_\alpha \}$ *— фундаментальная*$) \Longrightarrow (\{ x_{\varphi(\beta)} \}$ *— фундаментальная*$)$.
4. $(\{ x_\alpha \}$ *— фундаментальная*$) \wedge (x_{\varphi(\beta)} \to x_0) \Longrightarrow (x_\alpha \to x_0)$.

Замечание. В общем случае фундаментальная направленность может быть неограниченной, например $\{ 2^{-m} \}_{m\in\mathbb{Z}}$ фундаментальная неограниченная направленность.

Утверждение 2.5.2. *Фундаментальная последовательность в линейном топологическом пространстве ограничена.*

Доказательство. Пусть $\{ x_n \}$ — фундаментальная последовательность и $V \in \omega(0) \Longrightarrow \exists n_V \in \mathbb{N}\ \forall n_1, n_2 \geqslant n_V$ $x_{n_1} - x_{n_2} \in V \Longrightarrow \forall n \geqslant n_V\ \ x_n \in x_{n_V} + V$.

Но V — поглощающее множество $\Longrightarrow \exists \lambda_0 > 0\ \ \forall n \in \overline{1, n_V}$ $x_n \in \lambda_0 V \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \in \lambda_0 V + V \subset (1+\lambda_0)V$. ■

Определения. Пусть X — линейное топологическое пространство.

1. X называется *полным*, если в нем сходится любая фундаментальная направленность.
2. X называется *квазиполным*, если в нем сходится любая ограниченная фундаментальная направленность.
3. X называется *секвенциально полным*, если в нем сходится любая фундаментальная последовательность.
4. Множество $M \subset X$ называется *полным* (*квазиполным*, *секвенциально полным*), если соответствующие направленности элементов из M сходятся к некоторому элементу из M.

Утверждение 2.5.3. 1. *Если X — полное линейное топологическое пространство, а $X \supset M$ — замкнутое, то M — полное.*

2. *Если X отделимое линейное топологическое пространство, а $X \supset M$ — полное, то M — замкнутое.*

Следствие. *Пусть X — полное отделимое линейное топологическое пространство и $M \subset X$. Тогда $(M$ — полное $) \Longleftrightarrow$ $(M$ — замкнутое$)$.*

Замечание. В линейном топологическом пространстве $\langle X, \tau_a \rangle$ любое подмножество является полным.

Теорема 2.5.1. *Секвенциально полное линейное топологическое пространство со счетной базой окрестностей нуля является полным.*

Доказательство. 1. Пусть V_n — счетная база окрестностей нуля, а $\{x_\alpha\}$ — фундаментальная направленность. Тогда

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\; \exists\, \alpha_n\; \forall\, \alpha', \alpha'' \succ \alpha_n \quad x_{\alpha'} - x_{\alpha''} \in V_n.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\forall\, n\;\; \alpha_{n+1} \succ \alpha_n$.

2. Рассмотрим последовательность $\{x_{\alpha_n}\}$. Поскольку $\forall\, n_1, n_2 : n_i \geqslant m\;\; \alpha_{n_i} \succ \alpha_m$, то $x_{\alpha_{n_1}} - x_{\alpha_{n_2}} \in V_m$, т. е. $\{x_{\alpha_n}\}$ — фундаментальная $\Longrightarrow \exists\, x_0 \in X : x_{\alpha_n} \to x_0$. Отметим, что $\{x_{\alpha_n}\}$ не обязана быть поднаправленностью направленности $\{x_\alpha\}$, поэтому воспользоваться утверждением 2.5.1.4 нельзя.

3. Покажем, что $x_\alpha \to x_0$. Возьмем произвольное V_m и найдем $V_{m'}$: $V_{m'} + V_{m'} \subset V_m$. В силу того, что $x_{\alpha_n} \to x_0$, $\exists\, n_0$ $\forall\, n \geqslant n_0\;\; x_{\alpha_n} \in x_0 + V_{m'}$, а в силу фудаментальности $\{x_\alpha\}$ $\exists\, \alpha_0$ $\forall\, \alpha, \alpha' \succ \alpha_0\;\; x_\alpha - x_{\alpha'} \in V_{m'}$. Возьмем $\widetilde{\alpha}_0$: $\widetilde{\alpha}_0 \succ \alpha_{n_0}$ и $\widetilde{\alpha}_0 \succ \alpha_0$. Тогда $\forall\, \alpha \succ \widetilde{\alpha}_0$

$$x_\alpha - x_0 = (x_\alpha - x_{\widetilde{\alpha}_0}) + (x_{\widetilde{\alpha}_0} - x_0) \in V_{m'} + V_{m'} \subset V_m. \;\blacksquare$$

Следствие. *В банаховом пространстве сходится любая фундаментальная направленность.*

Теорема 2.5.2. *Для любого отделимого локально выпуклого топологического пространства X существует полное отделимое локально выпуклое топологическое пространство $\langle \widetilde{X}, \widetilde{\tau} \rangle$ и его всюду плотное линейное многообразие $\widetilde{X}_1$ такое, что $X \cong \langle \widetilde{X}_1, \widetilde{\tau} \cap \widetilde{X}_1 \rangle$.*

Доказательство. Пусть X — локально выпуклое отделимое топологическое пространство, топология в котором определяется системой полунорм $\{p_\gamma(\cdot)\}$.

1. Определим на множестве всех фундаментальных направленностей в X следующее отношение эквивалентности:

$$\{x_\alpha\} \sim \{x'_\beta\} := (x_\alpha - x'_\beta) \underset{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}{\longrightarrow} 0.$$

Отметим, что если $\{x_\alpha\} \sim \{x'_\beta\}$ и $x_\alpha \underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow} x_0$, то $x'_\beta \underset{\mathcal{B}}{\longrightarrow} x_0$.

2. Положим $\widetilde{X} := \{\widetilde{\{x_\alpha\}} : \{x_\alpha\}$ — фундаментальная в $X\}$ и $\widetilde{X}_1 := \{\widetilde{\{x\}}_c : x \in X\}$, где $\{x\}_c$ — тривиальная одноэлементная направленность. Поскольку топология отделима, то $x \neq x'$ $\Longrightarrow \widetilde{\{x\}}_c \neq \widetilde{\{x'\}}_c$, тем самым отображение $x \mapsto \widetilde{\{x\}}_c$ есть биекция X на $\widetilde{X}_1$.

3. Полунормы $\{\widetilde{p}_\gamma(\cdot)\}$ на $\widetilde{X}$ определяются следующим образом $\widetilde{p}_\gamma(\{x_\alpha\}) := \lim\limits_{\alpha} p_\gamma(x_\alpha)$.

4. В силу свойств двойных и повторных пределов получим, что

$$0 = \lim_{\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}} p_\gamma(x_\alpha - x_{\alpha'}) = \lim_{\alpha \in \mathcal{A}} \lim_{\alpha' \in \mathcal{A}} p_\gamma(x_\alpha - x_{\alpha'}) =$$

$$= \lim_{\alpha \in \mathcal{A}} \widetilde{p}_\gamma(\widetilde{\{x_\alpha - x_{\alpha'}\}}) = \lim_{\alpha \in \mathcal{A}} \widetilde{p}_\gamma(\widetilde{\{x_\alpha\}}_c - \widetilde{\{x_{\alpha'}\}}),$$

т. е. $\widetilde{\{x_\alpha\}}_c \underset{\alpha \in \mathcal{A}}{\longrightarrow} \widetilde{\{x_\alpha\}}$.

5. Из п. 4 следует соотношение $\overline{\widetilde{X}_1} = \widetilde{X}$.

6. Покажем, что $\widetilde{X}$ — отделимое топологическое пространство. Если $\forall\, \gamma\;\; \widetilde{p}_\gamma(\widetilde{\{x_\alpha\}}) = 0$, то $\lim\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\gamma(x_\alpha) = 0 \Longrightarrow x_\alpha \to 0 \Longrightarrow$ $\{x_\alpha\} \sim \{0\}_c$.

7. Покажем, что $\widetilde{X}$ — полное локально выпуклое топологическое пространство. Пусть $\{\widetilde{x}_\alpha\}$ — фундаментальная направленность в $\widetilde{X}$. Рассмотрим стандартно направленное множество $\mathcal{B} := \mathcal{A} \times \omega(0)$. Тогда в силу п. 5 $\forall\, \beta = (\alpha, \widetilde{V})\;\; \exists\, x'_\beta = x'_{(\alpha, \widetilde{V})}$: $\widetilde{\{x'_\beta\}}_c \in x_\alpha + \widetilde{V}$ и $\{x'_\beta\}$ — фундаментальная направленность в X, при этом $\left(\widetilde{x}_\alpha - \widetilde{\{x'_\beta\}}_c\right) \underset{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}{\longrightarrow} 0$. Поскольку

$$\widetilde{x}_\alpha = \left(\widetilde{x}_\alpha - \widetilde{\{x'_\beta\}}_c\right) + \left(\widetilde{\{x'_\beta\}}_c - \widetilde{\{x'_\beta\}}\right) + \widetilde{\{x'_\beta\}},$$

то в силу п. 4 $\widetilde{x}_\alpha \to \widetilde{\{x'_\beta\}}$. $\blacksquare$

§ 6. Компактные множества в линейных топологических пространствах

Определение. Пусть X — линейное топологическое пространство и $M \subset X$. Множество M называется *вполне ограниченным*, если

$$\forall U(0)\ \exists x_1, \ldots, x_k : \quad M \subset \bigcup_{i=1}^{k} \big(x_i + U(0)\big).$$

Утверждение 2.6.1. *В любом линейном топологическом пространстве справедливы следующие утверждения:*

1. *Любое конечное множество вполне ограничено.*
2. *Любое вполне ограниченное множество ограничено.*
3. *Замыкание вполне ограниченного множества вполне ограничено.*

Доказательство. $\boxed{2}$. Пусть U — произвольная окрестность нуля. Тогда $M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} \big(x_i + U\big)$. Но в силу того, что U поглощающее $\exists\,\lambda_0\ \forall\,|\mu| \geqslant \lambda_0\ x_i \in \mu U \Longrightarrow M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} \big((\mu+1)U\big) = (\mu+1)U$. ∎

Утверждение 2.6.2. *Если K — компактное множество в линейном топологическом пространстве, то K вполне ограничено и полно.*

Доказательство. 1. Пусть U — произвольная окрестность нуля. Тогда $M \subset \bigcup\limits_{x\in K} \big(x + \overset{\circ}{U}\big) \overset{K-\text{комп]}}{\Longrightarrow} \exists\,x_1, \ldots, x_k \colon M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} \big(x_i + \overset{\circ}{U}\big)$.

2. Пусть $K \supset \{\,x_\alpha\,\}$ — фундаментальная $\overset{\text{теор. 1.6.3}}{\Longrightarrow} \exists\,\{\,x_{\varphi(\beta)}\,\}, x_0 \in K : x_{\varphi(\beta)} \to x_0 \overset{\text{утв. 2.5.1.4}}{\Longrightarrow} x_\alpha \to x_0$. ∎

Теорема 2.6.1 (Обобщенный критерий Хаусдорфа). *Пусть X — линейное топологическое пространство и $K \subset X$. Тогда (K компактно) $\Longleftrightarrow$ (K вполне ограничено и полно).*

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $\{\,x_\alpha\,\} \subset K$.

1. Рассмотрим $\mathcal{M}$ — множество всех семейств $\mathcal{F} = \{\,F_\gamma\,\}$ подмножеств из X ($\forall\,\gamma\ \ F_\gamma \subset X$), удовлетворяющих следующему свойству:

$$\mathcal{F} = \{\,F_\gamma\,\} \in \mathcal{M} := \forall\,\gamma_1, \ldots, \gamma_k\ \forall\,\alpha\ \exists\,\alpha' \succ \alpha : \quad x_{\alpha'} \in \bigcap_{i=1}^{k} F_{\gamma_i}. \tag{2.6.1}$$

Отметим, что такие семейства есть, например, $\mathcal{M} = \{\,X\,\}$ или $\mathcal{M} = \{\,K\,\}$.

$\mathcal{M}$ есть частично упорядоченное по включению множество, и оно удовлетворяет условиям леммы Цорна. Действительно, если $\{\,\mathcal{F}_\eta\,\}$ цепь таких семейств, то и $\bigcup\limits_{\eta} \mathcal{F}_\eta$ тоже такое семейство, поскольку любой конечный набор подмножеств из этого объединения всегда содержится в одном из $\mathcal{F}_\eta$.

2. Пусть $\widehat{\mathcal{F}}$ — максимальный элемент этого частично упорядоченного множества. Тогда $F \in \widehat{\mathcal{F}} \Longrightarrow F \neq \varnothing$, $K \in \widehat{\mathcal{F}}$, $X \in \widehat{\mathcal{F}}$,

$$F_1, F_2 \in \widehat{\mathcal{F}} \Longrightarrow F_1 \cap F_2 \in \widehat{\mathcal{F}}, \tag{2.6.2}$$

$$F_1 \supset F_2 \in \widehat{\mathcal{F}} \Longrightarrow F_1 \in \widehat{\mathcal{F}}, \tag{2.6.3}$$

поскольку при добавлении F_1 в семейство $\widehat{\mathcal{F}}$, условие (2.6.1) не испортится. Покажем, что

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \widehat{\mathcal{F}} \Longrightarrow \exists\,\widehat{i} \in \overline{1,k} : A_{\widehat{i}} \in \widehat{\mathcal{F}}. \tag{2.6.4}$$

Предположим, что это не так, т. е. ни одно из A_i нельзя добавить в $\widehat{\mathcal{F}}$ с сохранением свойства (2.6.1), что в силу (2.6.2) означает: $\forall\, i\ \exists\, F_i \in \widehat{\mathcal{F}}\ \exists\, \alpha_i\ \forall\, \alpha \succ \alpha_i \quad x_\alpha \notin A_i \cap F_i$. Взяв $\widehat{\alpha}$: $\forall\, i$ $\widehat{\alpha} \succ \alpha_i$, получим что $\forall\, \alpha \succ \widehat{\alpha}\ \ x_\alpha \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k} \big(A_i \cap F_i\big)$, тем самым

$$\bigcup_{i=1}^{k} \big(A_i \cap F_i\big) \notin \widehat{\mathcal{F}}. \tag{2.6.5}$$

С другой стороны $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \big(A_i \cap F_i\big) \supset \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_i\Big) \overset{(2.6.2)}{\in} \widehat{\mathcal{F}}$, что в силу (2.6.3) противоречит (2.6.5).

Теперь с помощью семейства $\widehat{\mathcal{F}}$ построим поднаправленность направленности $\{\, x_\alpha \,\}$, сходящуюся к элементу из K.

3. Пусть $\mathcal{B} := \{\, (F,\alpha) \in \widehat{\mathcal{F}} \times \mathcal{A} : x_\alpha \in F \,\}$ с отношением $(F,\alpha) \succ (F',\alpha') := (F \subset F') \wedge (\alpha \succ \alpha')$. Это частично упорядоченное множество является направленным. Действительно, для любых $(F_1,\alpha_1), (F_2,\alpha_2) \in \mathcal{B}$ положим $F_3 := F_1 \cap F_2$. Так как в силу (2.6.2) $F_3 \in \widehat{\mathcal{F}}$, то по (2.6.1) найдется α_3 такое, что $\alpha_3 \succ \alpha_1$, $\alpha_3 \succ \alpha_2$ и $x_{\alpha_3} \in F_3$. Поэтому $(F_3,\alpha_3) \succ (F_1,\alpha_1)$ и $(F_3,\alpha_3) \succ (F_2,\alpha_2)$.

4. Определим $\varphi(\beta) = \varphi(F,\alpha) := \alpha$, тем самым, в частности, $x_{\varphi(F,\alpha)} \in F$. Покажем, что $\{\, x_{\varphi(\beta)} \,\}$ — фундаментальная направленность. Возьмем $U \in \omega(0)$ и найдем по ней U_1 из $\omega(0)$: $U_1 + U_1 \subset U$. В силу вполне ограниченности множества K найдутся $x_1, \cdots, x_k$ такие, что $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} \big(x_i + U_1\big) \overset{(2.6.3)}{\Longrightarrow}$

$\bigcup\limits_{i=1}^{k} \big(x_i + U_1\big) \in \widehat{\mathcal{F}} \overset{(2.6.4)}{\Longrightarrow} \exists\, \widehat{i} : x_{\widehat{i}} + U_1 \in \widehat{\mathcal{F}}$.

Пусть $\widehat{\alpha}$: $x_{\widehat{\alpha}} \in x_{\widehat{i}} + U_1 =: \widehat{F} \in \widehat{\mathcal{F}}$. Тогда $\forall\, (F_j,\alpha_j) \succ (\widehat{F},\alpha_{\widehat{\alpha}})$ $(j = 1,2)$ получим, что

$$x_{\varphi(F_1,\alpha_1)} - x_{\varphi(F_2,\alpha_2)} = x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in F_1 - F_2 \subset \widehat{F} - \widehat{F} = U_1 + U_1 \subset U.$$

5. Поскольку K полно, то $\exists\, x_0 \in K : x_{\varphi(\beta)} \to x_0 \overset{\text{утв. 2.5.1.4}}{\Longrightarrow}$ $x_\alpha \to x_0$. ■

Следствие. *В полном отделимом линейном топологическом пространстве справедливы следующие утверждения:*

1. *Множество компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и замкнуто.*

2. *Множество предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

Утверждение 2.6.3 *В отделимом локально выпуклом пространстве абсолютно выпуклая (выпуклая) оболочка конечного множества компактна.*

Действительно, она лежит в конечномерном подпространстве при этом ограничена и замкнута. ■

Утверждение 2.6.4 *В отделимом локально выпуклом пространстве абсолютно выпуклая (выпуклая) оболочка вполне ограниченного множества вполне ограничена.*

Доказательство. Пусть M — вполне ограничено В силу того, что $conv(M) \subset absconv(M)$, то достаточно установить вполне ограниченность множества $absconv(M)$.

Пусть U — абсолютно выпуклая окрестность нуля. Тогда найдутся $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (x_i + U) \Longrightarrow$ $absconv(M) \subset absconv(\{\, x_i \,\}) + U$. Но $absconv(\{\, x_i \,\})$ — компактно $\Longrightarrow$ оно вполне ограничено $\Longrightarrow$ найдутся $y_1, \ldots, y_m$ такие что $absconv(\{\, x_i \,\}) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} (y_i + U) \Longrightarrow absconv(M) \subset$ $\subset absconv(\{\, x_i \,\}) + U \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} (y_i + U) + U \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} (y_i + 2U)$. ■

Пример 2.6.1 Выпуклая оболочка компактного множества может быть не компактным множеством.

Пусть X — банахово пространство с нормированным базисом $\{\, e_n \,\}$. Тогда $K := \{\, e_n/n \,\} \cup \{0\}$ — компактно. Рассмотрим $x_m := \sum\limits_{n=1}^{m} (2^n n)^{-1} e_n + (2^m m)^{-1} e_{m+1} \in conv(K)$. Тогда $x_m \to x_0 := \sum\limits_{n=1}^{\infty} (2^n n)^{-1} \notin conv(K)$. ■

§ 7. Конечномерные подпространства линейных топологических пространств

Теорема 2.7.1. *Пусть* $e_1, \ldots, e_m$ *линейно независимы в отделимом линейном топологическом пространстве* X. *Тогда*

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,\alpha} e_k \underset{\alpha}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\Big) \Longleftrightarrow \big(\forall\, k \in \overline{1,m} \quad \lambda_{k,\alpha} \underset{\alpha}{\longrightarrow} \lambda_k\big).$$

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. Это утверждение справедливо в силу определения линейного топологического пространства (в нем алгебраические операции непрерывны).

$\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $z_\alpha := \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_{k,\alpha} e_k \underset{\alpha}{\longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k e_k$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k e_k = 0$.

Предположим противное. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что $\mu_\alpha := \sum\limits_{k=1}^{m} |\lambda_{k,\alpha}| \geqslant \varepsilon > 0$. В силу ограниченности множества $\{\, \gamma_{k,\alpha} \,\} := \{\, \lambda_{k,\alpha}/\mu_\alpha \,\}$ оно предкомпактно в $\mathbb{P}$, поэтому опять можно считать, что $\gamma_{k,\alpha} \underset{\alpha}{\longrightarrow} \gamma_k \Longrightarrow \dfrac{z_\alpha}{\mu_\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_{k,\alpha} e_k \underset{\alpha}{\longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_k e_k$. В силу отделимости получим, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_k e_k = 0$, что в силу линейной независимости векторов $\{\, e_k \,\}$ дает: $\forall\, k \in \overline{1,m}\ \ \gamma_k = 0$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{m} |\gamma_{k,\alpha}| = 1$, то и $\sum\limits_{k=1}^{m} |\gamma_k| = 1$. Но это противоречит равенствам $\gamma_k = 0$ $(k \in \overline{1,m})$. ■

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Все отделимые конечномерные линейные топологические пространства одинаковой размерности и над одним полем изоморфны.*

2. *Все отделимые конечномерные линейные топологические пространства полны.*

3. *В конечномерном отделимом линейном топологическом пространстве множество компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Утверждение 2.7.1. *В отделимом линейном топологическом пространстве* X *справедливы следующие утверждения:*

1. *Любое конечномерное многообразие в* X *замкнуто, т. е. является подпространством* X.

2. *Любой линейный функционал и любая полунорма на конечномерном подпространстве пространства* X *непрерывны.*

Утверждение 2.7.2. *Пусть* X *— отделимое линейное топологическое пространство,* X_1, X_2 *— его подпространства, причем* X_2 *конечномерно. Тогда* $X_1 + X_2$ *— подпространство.*

Доказательство. Требуется доказать только замкнутость $X_1 + X_2$ и лишь в случае, когда $X_2 = \langle e \rangle$ и $e \notin X_1$.

Пусть $x_\alpha + \lambda_\alpha e \underset{\alpha}{\longrightarrow} x_0$, $\{\, x_\alpha \,\} \subset X_1$.

1. Если у направленности $\{\, \lambda_\alpha \,\}$ есть ограниченная поднаправленность, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_\alpha \underset{\alpha}{\longrightarrow} \lambda \Longrightarrow x_\alpha = -\lambda_\alpha e + (x_\alpha + \lambda_\alpha e) \underset{\alpha}{\longrightarrow} -\lambda e + x_0 \in X_1 \Longrightarrow x_0 = (x_0 - \lambda e) + \lambda e \in X_1 + \langle e \rangle$.

2. Если у направленности $\{\, \lambda_\alpha \,\}$ нет ограниченных поднаправленностей, то у нее есть поднапрвленность $\{\, \lambda_{\varphi(\beta)} \,\}$: $|\lambda_{\varphi(\beta)}| \underset{\beta}{\longrightarrow} +\infty$.

Действительно, рассмотрим направленное множество $\mathcal{B} := \mathcal{A} \times \mathbb{N}$. Тогда $\forall\, \beta = (\alpha, n)\ \ \exists\, \alpha' \colon (\alpha' \succ \alpha) \wedge (|\lambda_{\alpha'}| > n)$, ибо в противном случае $\exists\, \widehat{\beta} = (\widehat{\alpha}, \widehat{n})\ \ \forall\, \alpha \colon \alpha \succ \widehat{\alpha}\ |\lambda_\alpha| \leqslant \widehat{n})$, т. е. тривиальная поднаправленность $\{\, \lambda_\alpha \,\}_{\alpha \succ \widehat{\alpha}}$ ограничена.

Определим $\varphi(\beta) = \varphi(\alpha, n) := \alpha' \colon (\alpha' \succ \alpha) \wedge (|\lambda_{\alpha'}| > n)$, тогда $|\lambda_{\varphi(\beta)}| \underset{\beta}{\longrightarrow} +\infty$. Тем самым, не ограничивая общности (переходя к этой поднаправленности), можно считать, что $|\lambda_\alpha| \underset{\alpha}{\longrightarrow} +\infty$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda_\alpha}(x_\alpha + \lambda_\alpha e) = \frac{1}{\lambda_\alpha} x_\alpha + e \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \frac{1}{\lambda_\alpha} x_\alpha \underset{\alpha}{\longrightarrow} -e \in X_1,$$

что противоречит условию $e \notin X_1$. ■

Г л а в а 3

Линейные операторы в локально выпуклых пространствах

§ 1. Условия непрерывности линейных операторов в линейных топологических пространствах и борнологические пространства

Утверждение 3.1.1. *Пусть X, Y — линейные топологические пространства, а $A: X \to Y$ — линейный оператор. Следующие условия эквивалентны:*

1. *A непрерывен на X.* 2. *A непрерывен в нуле.*
3. *A равномерно непрерывен на X, т. е.*

$$\begin{gathered} \forall\, U_Y(0)\ \exists\, U_X(0)\ \forall\, x, x' \in X \\ x - x' \in U_X(0) \Longrightarrow Ax - Ax' \in U_Y(0). \end{gathered} \tag{3.1.1}$$

Утверждение 3.1.2. *Пусть X, Y — линейные топологические пространства, а $A: X \to Y$ — линейный оператор. Если A ограничен на некоторой окрестности нуля, то A непрерывен на X.*

Следствие. *Пусть X — линейное топологическое пространство. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если Y — нормированное пространство, а $A: X \to Y$ — линейный оператор, то A непрерывен на X тогда и только тогда, когда A ограничен на некоторой окрестности нуля.*
2. *Линейный функционал на X непрерывен на X тогда и только тогда, когда он ограничен на некоторой окрестности нуля.*

Определение. Пусть X, Y — линейные топологические пространства. Множество всех линейных непрерывных на X операторов $A: X \to Y$ будем обозначать $\mathcal{L}(X, Y)$.

Утверждение 3.1.3. *Пусть X, Y — линейные топологические пространства. Если $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то A ограничен, т. е. переводит любое ограниченное множество в ограниченное.*

Замечание. В общем случае утверждение обратное к утверждению 3.1.3 неверно. Пусть X — банахово пространство. Покажем, что любое слабо ограниченное множество является и сильно ограниченным.

Предположим противное. Пусть $\forall\, \varphi \in X^*$ $\varphi(M)$ — ограничено, а само M не является ограниченным. Тогда $\exists \{ x_n \} \subset M: ||x_n|| \to +\infty \Longrightarrow \forall\, \varphi \in X^*$ $\varphi\big(x_n/\sqrt{||x_n||}\big) \to 0$ $\Longrightarrow x_n/\sqrt{||x_n||} \xrightarrow{сл} 0$ и $x_n/\sqrt{||x_n||} \to +\infty$. Но всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена — пришли к противоречию.

Рассмотрим теперь пространство l_p и $e_n := \{ \delta_{nm} \} \in l_p$. Поскольку $e_n \xrightarrow{сл} 0$ и $e_n \not\to 0$, то тождественный оператор $I: \langle l_p, \sigma(l_p, (l_p)^*) \rangle \to \langle l_p, ||\cdot||_p \rangle$ является ограниченным, но даже не секвенциально непрерывен.

Определение. Локально выпуклое пространство X называется *борнологическим* (или *пространством Макки*), если в нем любое абсолютно выпуклое множество, поглощающее любое ограниченное множество, есть окрестность нуля.

Теорема 3.1.1. *Локально выпуклое пространство X — борнологическое тогда и только тогда, когда для любого локально выпуклого пространства Y множество всех ограниченных линейных операторов из X в Y совпадает с $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $A: X \to Y$ — линейный ограниченный оператор и $\omega_Y(0) \ni U$ — абсолютно выпуклое, тогда и $A^{-1}(U)$ — абсолютно выпуклое. Пусть M — ограниченное в X множество, тогда $A(M)$ — ограниченное в Y множество $\Longrightarrow \exists\, \lambda > 0: A(M) \subset \lambda U \Longrightarrow \lambda^{-1} M \subset A^{-1}(U) \Longrightarrow A^{-1}(U)$ — окрестность нуля в силу борнологичности пространства X.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией τ. Рассмотрим на X еще одну локально выпуклую топологию τ', порожденную семейством $\omega_\tau(0)\cup\beta$, где β — все абсолютно выпуклые множества из X, поглощающие любое ограниченное множество в X. Тогда $\langle X,\tau'\rangle$ — борнологическое и $\tau\subset\tau'$. При этом, если M τ-ограничено, то оно и τ'-ограничено, поскольку каждое $V\in\beta$ поглощает M. Таким образом, тождественное отображение $I:\langle X,\tau\rangle\to\langle X,\tau'\rangle$ есть ограниченное линейное отображение $\Longrightarrow$ I непрерывно $\Longrightarrow \tau'\subset\tau \Longrightarrow \tau=\tau'$. ∎

Утверждение 3.1.4. *Пусть X — борнологическое пространство, Y — локально выпуклое пространство, а $A : X\to Y$ — линейный оператор. Тогда (A непрерывен на X) $\Longleftrightarrow$ (A секвенциально непрерывен на X).*

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. В силу предыдущей теоремы достаточно показать, что A — ограниченный.

Пусть $X\supset M$ — ограничено, $\{\,y_n\,\}\subset A(M)$, и $\mathbb{P}\ni\lambda_n\to 0$. Тогда $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, x_n\in M\colon y_n=Ax_n \Longrightarrow \lambda_n y_n=\lambda_n Ax_n = A(\lambda_n x_n)$. Но в силу утверждения 2.1.8 $\lambda_n x_n\to 0 \Longrightarrow A(\lambda_n x_n)\to 0$, и осталось снова применить утверждение 2.1.8. ∎

Теорема 3.1.2. *X — борнологическое тогда и только тогда, когда любая полунорма $p(\cdot)$, ограниченная на любом ограниченном множестве, непрерывна на X.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $p(\cdot)$ ограничена на любом ограниченном множестве и $V:=\{\,x\in X : p(x)\leqslant 1\,\}$ — абсолютно выпуклое множество. Если $X\supset M$ — ограничено, то $\exists\, K>0\colon p(M)\leqslant K \Longrightarrow M\subset K\cdot V \Longrightarrow V$ — окрестность нуля, а $p(\cdot)$ ограничена на ней $\overset{\text{утв.2.3.3.3}}{\Longrightarrow}$ $p(\cdot)$ непрерывна на X.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть V — абсолютно выпуклое множество, поглощающее любое ограниченное множество. Тогда по теореме 2.3.1.5 $p_V(\cdot)$ — полунорма, при этом она ограничена на любом ограниченном множестве. Поэтому $p_V(\cdot)$ — непрерывна на $X \Longrightarrow V\supset\{\,x\in X : p_V(x)<1\,\}$ — окрестность нуля. ∎

Утверждение 3.1.5. *Если X — метризуемое локально выпуклое пространство, то X — борнологическое.*

Доказательство. Пусть Y — локально выпуклое пространство, $\omega_X(0)=\{\,U_n\,\}$, $U_{n+1}\subset U_n$ и $A:X\to Y$ — линейный. Если $A\notin\mathcal{L}(X,Y)$, то $\exists\, V\in\omega_Y(0)\colon A^{-1}(V)$ — не окрестность нуля в $X \Longrightarrow \forall\, n\in\mathbb{N}\ nA^{-1}(V)$ — не окрестность нуля в $X \Longrightarrow \exists\, x_n\in U_n : x_n\notin nA^{-1}(V) \Longrightarrow Ax_n\notin nV \Longrightarrow \{\,x_n\,\}$ — ограничена, а $\{\,Ax_n\,\}$ — нет. ∎

§ 2. Линейные функционалы

Определения 1. Множество всех линейных функционалов, определенных на всем линейном пространстве X, обозначается $X^{\#}$ (отметим, что оно само есть линейное пространство над полем $\mathbb{P}$).

2. Пусть X — линейное топологическое пространство над полем $\mathbb{P}$. Линейное пространство $X^*:=\mathcal{L}(X,\mathbb{P})$ называется *сопряженным к линейному топологическому пространству X*.

Утверждение 3.2.1. *Пусть X — линейное пространство. Справедливы следующие утверждения:*

1. $\forall\, x_0\in X\ \ \exists\,\varphi_0\in X^{\#} : \varphi_0(x_0)=1$.

2. *Если $0\neq\varphi\in X^{\#}$, то $Ker\,\varphi=\varphi^{-1}(0)$ — линейное гипермногообразие пространства X, т. е. существует $e\in X$: $Ker\,\varphi\oplus\langle e\rangle = X$.*

Доказательство. $\boxed{2}$. Пусть $e\in X\colon\varphi(e)=1$, тогда $\forall\, x\in X$ $x-\varphi(x)e\in Ker\,\varphi$. ∎

Утверждение 3.2.2. *Пусть X — линейное пространство, $\varphi\in X^{\#}$, а $p(\cdot)$ — полунорма на X. Тогда*

$$\Bigl(\sup_{p(x)\leqslant 1}|\varphi(x)|\leqslant 1\Bigr) \Longrightarrow \Bigl(\forall\, x\in X\ \ |\varphi(x)|\leqslant p(x)\Bigr). \tag{3.2.1}$$

Доказательство. 1. Пусть $p(x_0) = 0$, тогда $\forall\,\lambda \in \mathbb{P}$ $p(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) = 0 \Longrightarrow |\varphi(\lambda x_0)| = \lambda|\varphi(x_0)| \leqslant 1 \Longrightarrow \varphi(x_0) = 0$.

2. Пусть $p(x_0) \neq 0$, тогда $p\big(x_0/p(x_0)\big) = 1 \Longrightarrow$ $\Big|\varphi\big(x_0/p(x_0)\big)\Big| \leqslant 1 \Longrightarrow |\varphi(x_0)| \leqslant p(x_0)$. ∎

Утверждение 3.2.3. *В линейном топологическом пространстве линейное гипермногообразие либо замкнуто, либо всюду плотно.*

Теорема 3.2.1. *Пусть X — линейное пространство. Тогда* ($X^{\#} \supset \{\,\varphi_1,\ldots,\varphi_n\,\}$ *линейно независимы*) $\Longleftrightarrow$ $\big(\exists\,\{\,e_1,\ldots,e_n\,\} \subset X\,:\,\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}\big)$.

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. 1. Индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно справедливо. Сделаем шаг индукции. Пусть $\{\,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n+1}\,\}$ линейно независимы, тогда по предположению индукции $\exists\,\{\,e_1,\ldots,e_n\,\}\colon \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$.

2. Рассмотрим множество $X_0 := \{\,x - \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(x)e_i\,:\,x \in X\,\}$. Очевидно, что $X_0 \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} Ker\,\varphi_i$. Пусть $x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} Ker\,\varphi_i$, тогда $x_0 - \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(x_0)e_i = x_0, \Longrightarrow x_0 \in X_0$, тем самым

$$\Big\{x - \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)e_i\,:\,x \in X\Big\} = \bigcap_{i=1}^{n} Ker\,\varphi_i. \tag{3.2.2}$$

3. Если $Ker\,\varphi_{n+1} \supset X_0$, то $\forall\,x \in X$

$$0 = \varphi_{n+1}\Big(x - \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)e_i\Big) = \varphi_{n+1}(x) - \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\varphi_{n+1}(e_i),$$

тем самым $\varphi_{n+1}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(x)$, $\lambda_i := \varphi_{n+1}(e_i)$, что противоречит предположению.

4. В противном случае найдется $\widetilde{e}_{n+1}$: $\varphi_{n+1}(\widetilde{e}_{n+1}) = 1$, а $\varphi_i(\widetilde{e}_{n+1}) = 0$, $i \in \overline{1,n}$. Определим новые вектора $\widetilde{e}_i$, $i \in \overline{1,n}$

по формуле $\widetilde{e}_i := e_i - \varphi_{n+1}(e_i)\widetilde{e}_{n+1}$. Тогда $\varphi_i(\widetilde{e}_j) = \delta_{ij}$ при $i,j \in \overline{1,n+1}$. ∎

Следствие. *Пусть X — линейное пространство и $\{\,\varphi_0,\ldots,\varphi_n\,\} \subset X^{\#}$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $\varphi_0 \in <\varphi_1,\ldots,\varphi_n> \subset X^{\#} \Longleftrightarrow Ker\,\varphi_0 \supset \bigcap\limits_{i=1}^{n} Ker\,\varphi_i$.
2. $Ker\,\varphi_1 = Ker\,\varphi_2 \Longleftrightarrow \exists\,0 \neq \lambda \in \mathbb{P}\;\; \varphi_1 = \lambda\varphi_2$.

Лемма 3.2.1. *Пусть X — линейное пространство, $\varphi \in X^{\#}$, $e \in X$: $\varphi(e) = 1$, $H = Ker\,\varphi$, $X \supset U$ — уравновешенное, $V = \{\,x \in X\,:\,|\varphi(x)| < 1\,\}$. Тогда* $\Big(\big(e+U\big)\cap H = \varnothing\Big)$ $\Longleftrightarrow$ $(U \subset V)$, *т. е. V — самое большое уравновешенное множество, удовлетворяющее соотношению $\big(e+V\big)\cap H = \varnothing$.*

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. $\varphi(e+V) = 1 + \varphi(V) \not\ni 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $U \not\subset V$. Тогда $\exists\,x_0 \in U : |\varphi(x_0)| \geqslant 1. \Longrightarrow$

$$-\frac{x_0}{\varphi(x_0)} \in U \text{ и } \varphi\Big(e - \frac{x_0}{\varphi(x_0)}\Big) = 0 \Longrightarrow \big(e+U\big)\cap H \neq \varnothing. \;\blacksquare$$

Утверждение 3.2.4. *Пусть X — линейное топологическое пространство, $0 \neq \varphi \in X^{\#}$. Тогда φ — открытое отображение, т. е. $\forall\,G \in \tau_X\;\; \varphi(G) \in \tau_{\mathbb{P}}$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in G \in \tau_X$, $\lambda_0 := \varphi(x_0)$. Так как $G \in \tau_X$, то $\exists\,U \in \omega_X(0) : x_0 + U \subset G \Longrightarrow \varphi(G) \supset \lambda_0 + \varphi(U)$.

Покажем, что $\varphi(U)$ — окрестность нуля в $\mathbb{P}$. Так как $0 \neq \varphi$, то $\exists\,e \in X\colon \varphi(e) = 1$. В силу того, что U — поглощающее $\exists\,\mu_0 > 0\;\;\forall\,|\mu| > \mu_0\;\; e \in \mu U \Longrightarrow B(0, 1/\mu_0; \mathbb{P}) \subset \varphi(U)$. ∎

Утверждение 3.2.5. *Пусть X — линейное топологическое пространство и $\varphi \in X^{\#}$. Тогда* ($\varphi \in X^{*}$) $\Longleftrightarrow$ ($Ker\,\varphi$ — *замкнуто*).

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. Положим $H := Ker\,\varphi$. Если $H = X$, то $\varphi = 0$. Пусть $H \neq X$ и $e \in X$: $\varphi(e) = 1$. Тогда

$e \notin H$ — замкнутое множество $\Longrightarrow$ найдется U — уравновешенная окрестность нуля такая, что $(e+U)\cap H = \varnothing \overset{\text{лемма 3.2.1}}{\Longrightarrow}$ $U \subset \{\, x \in X : |\varphi(x)| < 1 \}$, т. е. φ ограничен на $U \overset{\text{утв. 3.1.2}}{\Longrightarrow}$ $\varphi \in X^*$. ■

§ 3. Теорема Хана – Банаха и ее следствия

Теорема 3.3.1 (Хан — Банах). *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $p : X \to \mathbb{R}$ — полуаддитивный и положительно однородный функционал, L_0 — линейное многообразие в X, $\varphi_0 \in L_0^{\#}$ и*

$$\forall\, x \in L_0 \quad \varphi_0(x) \le p(x). \tag{3.3.1}$$

Тогда существует $\varphi \in X^{\#}$, продолжающий φ_0 с сохранением неравенства (3.3.1)*, т. е.*

$$(\forall\, x \in L_0 \quad \varphi(x) = \varphi_0(x)) \;\wedge\; (\forall\, x \in X \quad \varphi(x) \le p(x)).$$

Теорема 3.3.2 (комплексный вариант теоремы Хана — Банаха). *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $p(\cdot)$ — полунорма на X, L_0 — линейное многообразие в X, $\varphi_0 \in L_0^{\#}$ и $\forall\, x \in L_0$ $|\varphi_0(x)| \le p(x)$. Тогда существует такой $\varphi \in X^{\#}$, что $\forall\, x \in L_0$ $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ и $\forall\, x \in X$ $|\varphi(x)| \le p(x)$.*

Теорема 3.3.3 (Об отделимости выпуклых множеств). *Если M, N — выпуклые множества в линейном вещественном пространстве X, $\overset{\bullet}{M} \ne \varnothing$ и $\overset{\bullet}{M} \cap N = \varnothing$, то существует $\varphi \in X^{\#}$, разделяющий M и N, т. е. $\sup\limits_{x\in M} \varphi(x) \leqslant \inf\limits_{x \in N} \varphi(x)$.*

Теорема 3.3.4 (Геометрическая форма теоремы Хана — Банаха). *Пусть X — линейное топологическое пространство, $X \supset A$ — открытое выпуклое множество, $X \supset X_0$ — линейное многообразие в X и $X_0 \cap A = \varnothing$. Тогда существует гиперподпространство H пространства X такое, что $X_0 \subset H$ и $H \cap A = \varnothing$.*

Доказательство. 1. Сначала докажем теорему в случае $\mathbb{P} = \mathbb{R}$. В силу следствия 2 из утверждения 2.2.7 применима теорема об отделимости выпуклых множеств: $\exists\, \varphi \in X^{\#}$: $\sup \varphi(X_0) \leqslant \inf \varphi(A)$.

2. Так как X_0 — линейное многообразие, то $\varphi(X_0)$ — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}$, причем ограниченное сверху. Поэтому $\varphi(X_0) = \{0\}$, т. е. $X_0 \subset Ker\,\varphi$, и $\forall\, x \in A$ $\varphi(x) \geqslant 0$.

3. Но по утверждению 3.2.4 $\varphi(A)$ — открытое множество в $\mathbb{R} \Longrightarrow 0 \notin \varphi(A) \Longrightarrow A \cap Ker\,\varphi = \varnothing$.

4. Пусть $e \in A$, тогда найдется U — уравновешенная окрестность нуля такая, что $e + U \subset A \Longrightarrow (e+U) \cap Ker\,\varphi = \varnothing$ $\overset{\text{лемма 3.2.1}}{\Longrightarrow}$ $U \subset \{\, x \in X : |\varphi(x)| < 1 \} \Longrightarrow \{\, x \in X : |\varphi(x)| < 1 \}$ — окрестность нуля $\overset{\text{утв. 3.1.2}}{\Longrightarrow}$ $\varphi \in X^* \Longrightarrow H := Ker\,\varphi$ — гиперподпространство.

5. Пусть теперь $\mathbb{P} = \mathbb{C}$. Тогда, рассматривая X только над полем $\mathbb{R}$, мы получим линейное топологическое пространство над полем $\mathbb{R}$, к которому применимо только что доказанное утверждение. Поэтому на X существует вещественно линейный непрерывный функционал $\varphi_{\mathbb{R}}(\cdot)$, такой, что $X_0 \subset H_1$ и $H_1 \cap A = \varnothing$, где $H_1 := Ker\,\varphi_{\mathbb{R}}$. Но тогда $\varphi(x) := \varphi_{\mathbb{R}}(x) - i\varphi_{\mathbb{R}}(ix)$ есть линейный непрерывный функционал на исходном пространстве X и $Ker\,\varphi = H_1 \cap (iH_1) := H$, поэтому $H \cap A = \varnothing$ и $X_0 \subset H$ поскольку $X_0 = iX_0 \subset iH_1$. ■

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. (*Продолжение непрерывного функционала*). *Пусть $\langle X, \{\, p_\gamma(\cdot)\,\}\rangle$ — локально выпуклое пространство, $X \supset X_0$ — линейное многообразие. Тогда $\forall\, \varphi_0 \in \langle X_0, \{\, p_\gamma(\cdot)\,\}\rangle^*$ $\exists\, \varphi \in X^*$ $\forall\, x \in X_0$ $\varphi_0(x) = \varphi(x)$.*

2. *Пусть X — линейное пространство. Тогда $\forall\, x_0 \in X$ $\forall\, p(\cdot) : p(\cdot)$ —полунорма в X $\exists\, \varphi_0 \in X^{\#} : \varphi_0(x_0) = p(x_0)$ и $\forall\, x \in X$ $|\varphi_0(x)| \leqslant p(x)$.*

3. *Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство. Тогда $\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 \ne x_2$ $\exists\, \varphi \in X^* : \varphi(x_1) \ne \varphi(x_2)$.*

4. *Любое конечномерное подпространство в отделимом ло-*

кально выпуклом пространстве дополняемо.

5. *Пусть X — локально выпуклое пространство и $X \supset X_0$ — собственное подпространство. Тогда $\forall\, x_0 \notin X_0$ $\exists\, \varphi_0 \in X^* : X_0 \subset Ker\,\varphi_0$ и $\varphi_0(x_0) = 1$.*

6. *Пусть X — линейное топологическое пространство, $X \supset A$ — открытое выпуклое множество, $X \supset M$ — выпуклое множество и $A \cap M = \varnothing$. Тогда существует $\varphi \in X^*$ такой, что $\varphi(A) \cap \varphi(M) = \varnothing$.*

Доказательство. $\boxed{1}$. Так как $\varphi_0 \in \langle X_0, \{ p_\gamma(\cdot) \}\rangle^*$, то $U_0 := \{ x \in X_0 : |\varphi_0(x)| \leqslant 1 \}$ окрестность нуля в $\langle X_0, \{ p_\gamma(\cdot) \}\rangle$ $\Longrightarrow \exists\, \gamma_1, \ldots, \gamma_k, \varepsilon > 0$: $\{ x \in X_0 : p_0(x) \leqslant \varepsilon \} \subset U_0$, где $p_0(x) := \max\limits_{i \in \overline{1,k}} p_{\gamma_i}(x)$ — непрерывная на X полунорма $\overset{\text{утв. 3.2.2}}{\Longrightarrow}$ $\forall\, x \in X_0$ $|\varphi_0(x)| \leqslant p_0(x)/\varepsilon \overset{\text{теор. 3.3.1}}{\Longrightarrow} \exists\, \varphi \in X^{\#} : \forall\, x \in X_0$ $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ и $\forall\, x \in X$ $|\varphi(x)| \leqslant p_0(x)/\varepsilon \Longrightarrow \varphi \in X^*$.

$\boxed{2}$. На $X_0 := \langle x_0 \rangle$ положим $\varphi_0(\lambda x_0) := \lambda p(x_0)$.

$\boxed{3}$. Так как X — отделимое пространство, то $\exists\, p_{\gamma_0}$: $p_{\gamma_0}(x_1 - x_2) \neq 0 \overset{2}{\Longrightarrow} \exists\, \varphi_0 \in X^{\#} : \varphi_0(x_1 - x_2) = p_{\gamma_0}(x_1 - x_2) \neq 0$ и $\forall\, x \in X$ $|\varphi_0(x)| \leqslant p_{\gamma_0}(x) \Longrightarrow \varphi_0 \in X^*$.

$\boxed{4}$. Пусть $X_1 = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, а $\overset{o}{\varphi}_j \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \Big) =: \lambda_j$, тогда $\overset{o}{\varphi}_j(\cdot) \in X_1^*$, $j \in \overline{1,n}$. Пусть $\varphi_j(\cdot)$ — продолжение $\overset{o}{\varphi}_j(\cdot)$ на X с сохранением непрерывности.

Тогда $X_2 := \Big\{ x - \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(x) e_j \;:\; x \in X \Big\} \overset{(3.2.2)}{=} \bigcap\limits_{j=1}^{n} Ker\,\varphi_j$ — подпространство и $\forall\, x \in X$ $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(x) e_j + \Big(x - \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(x) e_j \Big)$.

$\boxed{5}$. $x_0 \in X \setminus X_0$ — открытое множество $\Longrightarrow \exists\, U$ — открытая и выпуклая окрестность нуля такая, что $\big(x_0 + U\big) \cap X_0 = \varnothing$. По теореме 3.3.4 найдется такое гиперподпространство $H \supset X_0$, что $\big(x_0 + U\big) \cap H = \varnothing$. Положим $\varphi_0(\lambda x_0 + H) := \lambda$.

$\boxed{6}$. $A \cap M = \varnothing \Longrightarrow 0 \notin A - M$ — выпуклое и открытое $\overset{\text{теор. reft-GFTHB}}{\Longrightarrow}$ существует $\varphi \in X^*$ такой, что $(A - M) \cap Ker\,\varphi = \varnothing \Longrightarrow 0 \notin \varphi(A) - \varphi(M)$. ■

§ 4. Двойственность и слабая топология

Определение. Говорят, что пара $(X, \widehat{X})$ линейных пространств над полем $\mathbb{P}$ есть *дуальная пара*, или *пространства X и $\widehat{X}$ находятся в двойственности*, если существует такая билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times \widehat{X} \to \mathbb{P}$, что справедливы следующие условия:

1. $\forall\, x \in X : x \neq 0$ $\exists\, \widehat{x} \in \widehat{X}$: $\langle x, \widehat{x} \rangle \neq 0$.
2. $\forall\, \widehat{x} \in \widehat{X} : \widehat{x} \neq 0$ $\exists\, x \in X$: $\langle x, \widehat{x} \rangle \neq 0$.

Пример 3.4.1. Пусть X — линейное пространство, а $\widehat{X}$ — тотальное подпространство пространства $X^{\#}$, т. е.

$$\big(\forall\, \widehat{x} \in \widehat{X} \;\; \langle x, \widehat{x} \rangle \neq 0\big) \Longrightarrow (x = 0).$$

Тогда $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара относительно следующей *канонической* билинейной формы: $\langle x, \widehat{x} \rangle := \widehat{x}(x)$.

Замечания. 1. Рассмотренный пример в каком-то смысле является универсальным. Поскольку, если $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, то каждый элемент $\widehat{x} \in \widehat{X}$ порождает линейный функционал $\varphi_{\widehat{x}}$ на X: $\varphi_{\widehat{x}}(x) := \langle x, \widehat{x} \rangle$ и $\{ \varphi_{\widehat{x}}(\cdot) : \widehat{x} \in \widehat{X} \}$ есть тотальное подпространство пространства $X^{\#}$.

В дальнейшем мы всегда будем считать, что если $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, то $\widehat{X} \subset X^{\#}$ и билинейная форма, задающая двойственность, — каноническая, т. е. $\langle x, \widehat{x} \rangle := \widehat{x}(x)$.

2. Разумеется, если $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, то и $(\widehat{X}, X)$ дуальная пара относительно билинейной формы $\langle \widehat{x}, x \rangle := \langle x, \widehat{x} \rangle$.

Отметим, что при нашей интерпретации дуальной пары, этот переход от пары $(X, \widehat{X})$ к паре $(\widehat{X}, X)$ осуществляется с помощью *канонического* отображения $[\cdot] : X \to X^{\#\#}$, определенного формулой $\forall\, \widehat{x} \in X^{\#}$ $\quad [x](\widehat{x}) := \widehat{x}(x)$. Тем самым $\langle x, \widehat{x} \rangle = \langle \widehat{x}, [x] \rangle$.

Пример 3.4.2. Если X — отделимое локально выпуклое пространство, то, в силу третьего следствия из теоремы Хана — Банаха, (X, X^*) — дуальная пара.

Определение. Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара. *Слабой топологией на X, порожденной двойственностью*, называется локально выпуклая топология, определяемая следующим семейством полунорм $\{ p_{\widehat{x}}(x) := |\langle x, \widehat{x} \rangle| : \widehat{x} \in \widehat{X} \}$.

Эта топология обозначается $\sigma(X, \widehat{X})$.

Утверждение 3.4.1. *Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара. Тогда $\sigma(X, \widehat{X})$ — слабейшая топология на X, в которой все $\widehat{x}$ непрерывны. При этом $\sigma(X, \widehat{X})$ — отделимая локально выпуклая топология на X.*

Следствие. *Пусть X — линейное пространство. Тогда любой линейный функционал $x^{\#} \in X^{\#}$ непрерывен в топологии $\sigma(X, X^{\#})$.*

Замечание. Если $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, то, в силу симметричности понятия "дуальность", можно рассматривать $\sigma(\widehat{X}, X)$ — слабую топологию в $\widehat{X}$, порожденную двойственностью. Эта топология определяется следующей системой полунорм $\{ p_x(\widehat{x}) := |\langle x, \widehat{x} \rangle| : x \in X \}$.

Определение. Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство. Тогда *слабой топологией на X* называется топология $\sigma(X, X^*)$, а *слабой топологией на X^* называется топология $\sigma(X^*, X)$.

Теорема 3.4.1. *Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара. Тогда $\widehat{X} = \langle X, \sigma(X, \widehat{X}) \rangle^*$.*

Доказательство. 1. В силу утверждения 3.4.1.2 справедливо включение $\widehat{X} \subset \langle X, \sigma(X, \widehat{X}) \rangle^*$. Поэтому осталось доказать обратое включение. Пусть $x^* \in \langle X, \sigma(X, \widehat{X}) \rangle^* \subset X^{\#}$. Тогда x^* ограничен на некоторой $\sigma(X, \widehat{X})$-окрестности нуля

$$U = \{ x \in X : \max_{i \in \overline{1,n}} |\langle x, \widehat{x}_i \rangle| \leqslant 1 \} \quad \Longrightarrow$$

$$\sup_{x : |\langle x, \widehat{x}_i \rangle| \leqslant 1} |\langle x, x^* \rangle| =: \alpha < \infty. \tag{3.4.1}$$

2. Если $x^* \notin \langle \widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n \rangle$, то по следствию 1 из теоремы 3.2.1 найдется $e \in X$ такой, что $\langle e, x^* \rangle = 1$ и $\forall\, i \in \overline{1,n}$ $\langle e, \widehat{x}_i \rangle = 0$ $\Longrightarrow \forall\, \lambda \in \mathbb{P}$ $\lambda e \in U \Longrightarrow \forall\, \lambda \in \mathbb{P}$ $|\langle \lambda e, x^* \rangle| = |\lambda| \overset{(3.4.1)}{\leqslant} \alpha$ — противоречие. Тем самым $x^* \in \langle \widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n \rangle \subset \widehat{X}$. ■

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть X — линейное пространство. Тогда*

$$X^{\#} = \langle X, \sigma(X, X^{\#}) \rangle^*, \quad X = \langle X^{\#}, \sigma(X^{\#}, X) \rangle^*;$$

2. *Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство. Тогда $X^* = \langle X, \sigma(X, X^*) \rangle^*, \quad X = \langle X^*, \sigma(X^*, X) \rangle^*$.*

Замечание. Отметим, что последние два равенства говорят о том, что в локально выпуклом пространстве X линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда он слабо непрерывен, а линейный функционал на X^* *слабо непрерывен тогда и только тогда, когда он имеет вид $[x]$.

§ 5. Топологии, согласующиеся с двойственностью

Определение. Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, и τ — локально выпуклая топология на X. Топология τ называется *согласованной с двойственностью* $(X, \widehat{X})$, если $\langle X, \tau \rangle^* = \widehat{X}$.

Замечание. Теорема 3.4.1 показывает, что $\sigma(X, \widehat{X})$ — топология, согласованная с двойственностью $(X, \widehat{X})$.

Утверждение 3.5.1. *Все топологии на X, согласованные с двойственностью $(X, \widehat{X})$, отделимы.*

Теорема 3.5.1. *Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, τ — топология на X, согласованная с двойственностью $(X, \widehat{X})$, а $X \supset A$ — выпуклое и τ-замкнутое множество. Тогда A — $\sigma(X, \widehat{X})$-замкнуто.*

Доказательство. Пусть $A \ni x_\alpha \underset{\sigma(X,\widehat{X})}{\longrightarrow} x_0$. Если $x_0 \notin A$, то $\exists\, U \in \omega_\tau(0) : U$ — выпукло, открыто и $\big(x_0+U\big)\cap A = \varnothing$. Тогда по шестому следствию из теоремы Хана – Банаха $\exists\, \varphi \in X^* = \widehat{X}$: $\varphi\big(x_0+U\big) \cap \varphi(A) = \varnothing$.

По утверждению 3.2.4 $\varphi\big(x_0+U\big)$ — открыто и в силу того, что $\varphi \in X^* = \widehat{X} = \langle X, \sigma(X,\widehat{X})\rangle^*$ имеем

$$\varphi\big(x_0+U\big) \not\ni \varphi(x_\alpha) \to \varphi(x_0) \in \varphi\big(x_0+U\big),$$

что противоречит характеристическому свойству открытых множеств — теорема 1.6.1.4. Тем самым $x_0 \in A$ и, следовательно, A — $\sigma(X,\widehat{X})$-замкнуто. ■

Следствие. *Пусть $(X,\widehat{X})$ — дуальная пара, τ и τ' — топологии на X, согласующиеся с двойственностью $(X,\widehat{X})$, и $X \supset A$ — выпуклое множество. Тогда $cl(A;\tau) = cl(A;\tau')$.*

§ 6. Поляры

Определения. Пусть $(X,\widehat{X})$ — дуальная пара.

1. Пусть $A \subset X$. Множество $A^\circ := \Big\{\widehat{x} \in \widehat{X} : \sup\limits_{x\in A} |\langle x,\widehat{x}\rangle| \leqslant 1\Big\}$ называется *полярой множества A относительно двойственности* $(X,\widehat{X})$.

2. Пусть $\widehat{A} \subset \widehat{X}$. Множество ${}^\circ\widehat{A} := \Big\{x \in X : \sup\limits_{\widehat{x}\in \widehat{A}} |\langle x,\widehat{x}\rangle| \leqslant 1\Big\}$ называется *полярой множества $\widehat{A}$ относительно двойственности* $(X,\widehat{X})$.

Замечание. Если $(X,\widehat{X}_1)$ и $(X,\widehat{X}_2)$ — дуальные пары и $A \subset X$, то будем писать $A^\circ_{\widehat{X}_i}$, чтобы подчеркнуть относительно какой двойственности построена поляра.

Отметим также, что если $\widehat{X}_1 \subset \widehat{X}_2$, то $A^\circ_{\widehat{X}_1} \subset A^\circ_{\widehat{X}_2}$

Утверждение 3.6.1. *Пусть $(X,\widehat{X})$ — дуальная пара, $A, B \subset X$, а $\lambda \in \mathbb{P}$ и $\lambda \neq 0$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $A \subset B \Longrightarrow B^\circ \subset A^\circ$. 2. $0 \neq \lambda \in \mathbb{P} \Longrightarrow (\lambda A)^\circ = \lambda^{-1} A^\circ$.
3. *Если A — линейное многообразие в X, то*

$$A^\circ = A^\perp := \{\, \widehat{x} \in \widehat{X} : \forall\, x \in A\ \langle x,\widehat{x}\rangle = 0 \,\}.$$

4. $\Big(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha\Big)^\circ = \bigcap\limits_\alpha A^\circ_\alpha$.

Доказательство. $\boxed{4}$. $\widehat{x} \in \Big(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha\Big)^\circ \Longleftrightarrow \forall\,\alpha\ \ \forall\, x \in A_\alpha$ $|\langle x,\widehat{x}\rangle| \leqslant 1 \Longleftrightarrow \forall\,\alpha\ \ \widehat{x} \in A^\circ_\alpha$. ■

Утверждение 3.6.2. *Пусть $(X,\widehat{X})$ — дуальная пара, а $A \subset X$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $A^\circ = \big(cl(absconv(A);\sigma(X,\widehat{X}))\big)^\circ$.
2. *A° — абсолютно выпукло и $\sigma(\widehat{X},X)$-замкнуто.*

Доказательство. $\boxed{1}$. 1. Определим множество B следующим образом: $B := cl(absconv(A);\sigma(X,\widehat{X})) \supset A \Longrightarrow B^\circ \subset A^\circ$.

2. Покажем, что справедливо и обратное включение. Пусть $\widehat{x} \in A^\circ$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in A$ и $\lambda,\mu \in \mathbb{P}$: $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$

$$|\langle \lambda x_1 + \mu x_2, \widehat{x}\rangle| \leqslant |\lambda| + |\mu| \leqslant 1 \Longrightarrow \widehat{x} \in (absconv(A))^\circ.$$

3. Пусть $absconv(A) \ni x_\alpha \underset{\sigma(X,\widehat{X})}{\longrightarrow} x_0 \overset{2}{\Longrightarrow} |\langle x_\alpha,\widehat{x}\rangle| \leqslant 1$. Тогда $\langle x_\alpha,\widehat{x}\rangle \to \langle x_0,\widehat{x}\rangle \Longrightarrow \widehat{x} \in B^\circ$. ■

Теорема 3.6.1 (О биполяре). *Пусть $(X,\widehat{X})$ — дуальная пара, $X \supset A$ — абсолютно выпукло и $\sigma(X,\widehat{X})$-замкнуто. Тогда ${}^\circ(A^\circ) = A$.*

Доказательство. 1. $\forall\, x \in A\ \ \forall\, \widehat{x} \in A^\circ\ \ |\langle x,\widehat{x}\rangle| \leqslant 1 \Longrightarrow A \subset {}^\circ(A^\circ)$.

2. Пусть $x_0 \notin A$. Так как A $\sigma(X, \widehat{X})$-замкнуто, то найдется U — абсолютно выпуклая $\sigma(X, \widehat{X})$-открытая окрестность нуля такая, что $\big(x_0 + U\big) \cap A = \emptyset$. Но $x_0 + U$ выпуклое открытое множество, поэтому по шестому следствию из теоремы Хана — Банаха $\exists\, \varphi \in \langle X, \sigma(X, \widehat{X})\rangle^* : \varphi\big(x_0 + U\big) \cap \varphi(A) = \emptyset$. Поскольку $0 \in U$ и $0 \in A$, то $\varphi(x_0) \neq 0$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi(x_0) = 1$.

3. Так как $(U - A)$ — уравновешенное множество и

$$\big(x_0 + U - A\big) \cap Ker\, \varphi = \emptyset,$$

то по лемме 3.2.1 $\varphi(U - A) \subset B(0, 1) \subset \mathbb{P}$. Поскольку U — абсолютно выпукло и открыто, то $\varphi(U)$ — абсолютно выпукло и (по утверждению 3.2.4) открыто в $\mathbb{P}$. Поэтому $\exists\, \delta > 0$: $\varphi(U) = B(0, \delta)$ и, тем самым, $\varphi(A) + B[0, \delta/2] \subset B[0, 1]$. Тогда по утверждению 2.1.1.4 $\varphi(A) \subset B[0, 1 - \delta/2]$, т. е. $\sup\limits_{x \in A} |\varphi(x)| \leqslant$ $\leqslant \beta := 1 - \delta/2 < 1$.

4. Поскольку $\langle X, \sigma(X, \widehat{X})\rangle^* \overset{\text{теор. 3.4.1}}{=} \widehat{X}$, то $\exists\, \widehat{x} \in \widehat{X}$: $\varphi(x) \equiv \langle x, \widehat{x}\rangle$. Таким образом $\widehat{x}/\beta \in A^\circ$, а $|\langle x_0, \widehat{x}/\beta\rangle| =$ $= \varphi(x_0)/\beta = 1/\beta > 1 \Longrightarrow x_0 \notin {}^\circ(A^\circ)$. ■

Утверждение 3.6.3. *Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара и $A \subset X$. Тогда $\big(A^\circ$ — $\sigma(\widehat{X}, X)$-ограниченное$\big) \iff \big(cl(absconv(A); \sigma(X, \widehat{X}))$ — поглощающее$\big)$.*

Доказательство. В силу утверждения 3.6.2.1 можно считать, что A —абсолютно выпуклое и $\sigma(X, \widehat{X})$-замкнутое множество. Тогда A° — $\sigma(\widehat{X}, X)$-ограниченное $\iff \forall\, x \in X\ \exists\, K_x > 0$: $|\langle x, A^\circ\rangle| \leqslant K_x \iff (K_x)^{-1} x \in {}^\circ(A^\circ) \overset{\text{теор. 3.6.1}}{=} A \iff x \in K_x A$. ■

Утверждение 3.6.4. *Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара и $A \subset X$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *A — $\sigma(X, \widehat{X})$-ограниченное множество.*
2. *$\widehat{p}_A(\widehat{x}) := \sup\limits_{x \in A} |\langle x, \widehat{x}\rangle|$ — полунорма на $\widehat{X}$.*
3. *A° — поглощающее множество.*

Доказательство. $\boxed{3 \Longrightarrow 1}$. $\forall\, \widehat{x}_0 \in \widehat{X}\ \ \exists\, \lambda > 0$: $\widehat{x}_0 \in \lambda A^\circ$ $\Longrightarrow \lambda^{-1} \widehat{x}_0 \in A^\circ \Longrightarrow \sup\limits_{x \in A} |\langle x, \lambda^{-1} \widehat{x}_0\rangle| \leqslant 1 \Longrightarrow \sup\limits_{x \in A} |\langle x, \widehat{x}_0\rangle| \leqslant \lambda$. ■

Утверждение 3.6.5. *Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство, а $\omega(0)$ — база окрестностей нуля. Справедливы следующие утверждения:*

1. $X^* = \bigcup\limits_{U \in \omega(0)} U^\circ_{X^\#}$. 2. $\forall\, U \in \omega(0)\quad U^\circ_{X^\#} = U^\circ_{X^*}$.

Доказательство. $\boxed{1}$. 1. $x^\# \in U^\circ_\# \Longrightarrow x^\#$ — ограничена на $U \Longrightarrow x^\# \in X^*$.

2. $x^* \in X^* \Longrightarrow \exists\, U \in \omega(0)$: x^* — ограничена на $U \Longrightarrow$ $\exists\, K > 0 : \sup\limits_{x \in U} |\langle x, x^*\rangle| \leqslant K \Longrightarrow K^{-1} x^* \in U^\circ_{X^\#} \Longrightarrow$ $x^* \in (K^{-1} U)^\circ_{X^\#}$. ■

Определение. Пусть X — линейное топологическое пространство, а $M_\# \subset X^\#$. Семейство линейных функционалов $M_\#$ называется *равностепенно непрерывным семейством* на X, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U \in \omega(0)\ \forall\, x^\# \in M_\#\ \forall\, x \in U \quad |\langle x, x^\#\rangle| \leqslant \varepsilon$.

Утверждение 3.6.6. *Пусть X — линейное топологическое пространство, а $M_\# \subset X^\#$. Если $M_\#$ — равностепенно непрерывное семейство, то $M_\# \subset X^*$.*

Утверждение 3.6.7. *Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство, а $M_\# \subset X^\#$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *$M_\#$ — равностепенно непрерывное семейство.*
2. *$M_\#$ — равномерно ограничено на некоторой окрестности нуля U, т. е. $\exists\, K > 0\ \ \forall\, x^\# \in M_\#\ \ \forall\, x \in U\ \ |\langle x, x^\#\rangle| \leqslant K$.*
3. *Существует такая окрестность нуля U, что $M_\# \subset U^\circ_{X^\#}$.*

§ 7. Теорема Банаха — Алаоглу — Бурбаки

Теорема 3.7.1. *Пусть* $(X, \widehat{X})$ *— дуальная пара и* $M \subset X$. *Если* M *— ограничено в топологии* $\sigma(X, \widehat{X})$, *то* M *— вполне ограничено в этой топологии.*

Доказательство. 1. Пусть

$$U = \{\, x \in X : \max_{i \in \overline{1,n}} |\langle x, \widehat{x}_i \rangle| \leqslant \varepsilon \,\} = \bigcap_{i=1}^{n} \widehat{x}_i^{-1}(B[0, \varepsilon])$$

произвольная замкнутая окрестность нуля (здесь и далее в доказательстве шары $B[\pi, r] \subset \mathbb{P}$). Тогда по условию $\alpha := \sup\limits_{i \in \overline{1,n}, x \in M} |\langle x, \widehat{x}_i \rangle| < +\infty$, тем самым $M \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{x}_i^{-1}(B[0, \alpha])$. Поскольку в $\mathbb{P}$ всякое ограниченное множество является вполне ограниченным, то найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $\{\pi_1, \ldots, \pi_m\} \subset \mathbb{P}$ такие, что $B[0, \alpha] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B[\pi_j, \varepsilon/2]$. Тогда

$$M \subset \bigcap_{i=1}^{n} \widehat{x}_i^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{m} B[\pi_j, \varepsilon/2]\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} \Big(\bigcup_{j=1}^{m} \widehat{x}_i^{-1}\big(B[\pi_j, \varepsilon/2]\big)\Big) =$$

$$= \bigcup_{j=1}^{m} \Big(\bigcap_{i=1}^{n} \widehat{x}_i^{-1}\big(B[\pi_j, \varepsilon/2]\big)\Big) = \bigcup_{j \in J} \Big(\bigcap_{i=1}^{n} \widehat{x}_i^{-1}\big(B[\pi_j, \varepsilon/2]\big)\Big),$$

где через J обозначено множество таких j, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{x}_i^{-1}\big(B[\pi_j, \varepsilon/2]\big) \neq \varnothing$.

3. Для $j \in J$ возьмем $x_j \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{x}_i^{-1}(B[\pi_j, \varepsilon/2])$. Тогда для любых $i \in \overline{1,n}$ и $j \in J$

$$0 \in \widehat{x}_i\big(\widehat{x}_i^{-1}\big(B[\pi_j, \varepsilon/2]\big) - x_j\big) \subset B[\pi_j, \varepsilon/2] - \langle x_j, \widehat{x}_i \rangle \subset$$

$$\subset B[\pi_j, \varepsilon/2] - B[\pi_j, \varepsilon/2] = B[0, \varepsilon].$$

Поэтому для любого $j \in J$ $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{x}_i^{-1}(B[\pi_j, \varepsilon/2]) - x_j \subset U \Longrightarrow$ $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{x}_i^{-1}(B[\pi_j, \varepsilon/2]) \subset x_j + U \Longrightarrow M \subset \bigcup\limits_{j \in J} \big(x_j + U\big)$. ∎

Теорема 3.7.2. *Пусть* X *— отделимое локально выпуклое пространство. Тогда* $\langle X^{\#}, \sigma(X^{\#}, X) \rangle$ *— полное локально выпуклое пространство.*

Доказательство. Пусть $\{\, x_\alpha^{\#} \,\}$ — фундаментальная направленность в $\langle X^{\#}, \sigma(X^{\#}, X) \rangle$. Тогда $\forall\, x \in X$ $\{\, \langle x, x_\alpha^{\#} \rangle \,\}$ — фундаментальная направленность в полном пространстве $\mathbb{P}$ $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{\alpha} \langle x, x_\alpha^{\#} \rangle =: \langle x, x_0^{\#} \rangle$. Тогда $x_0^{\#} \in X^{\#}$ и по построению $x_\alpha^{\#} \to x_0^{\#}$ поточечно, т. е. в топологии $\sigma(X^{\#}, X)$. ∎

Теорема 3.7.3 (Банах — Алаоглу — Бурбаки). *Если* X *— отделимое локально выпуклое пространство, а* U *— окрестность нуля, то* $U^{\circ}_{X^*}$ *—* $\sigma(X^*, X)$*-компактно.*

Доказательство. 1. Так как U — поглощающее то по утверждению 3.6.3 $U^{\circ}_{X^{\#}}$ — $\sigma(X^{\#}, X)$-ограничено $\overset{\text{теор. 3.7.1}}{\Longrightarrow}$ $U^{\circ}_{X^{\#}}$ — вполне ограничено в топологии $\sigma(X^{\#}, X)$.

2. По теореме 3.7.2 $\langle X^{\#}, \sigma(X^{\#}, X) \rangle$ — полное локально выпуклое пространство. а $U^{\circ}_{X^{\#}}$ — $\sigma(X^{\#}, X)$-замкнутое (утверждение 3.6.2.2) $\overset{\text{утв. 2.5.3.1}}{\Longrightarrow}$ $U^{\circ}_{X^{\#}}$ — $\sigma(X^{\#}, X)$-полно $\overset{\text{теор. 2.6.1}}{\Longrightarrow}$ $U^{\circ}_{X^{\#}}$ — $\sigma(X^{\#}, X)$-компактно.

3. Поскольку в силу утверждения 3.6.5.2 $U^{\circ}_{X^{\#}} = U^{\circ}_{X^*} \subset X^*$, а $\sigma(X^*, X) = X^* \cap \sigma(X^{\#}, X)$, то $U^{\circ}_{X^*}$ — $\sigma(X^*, X)$-компактно. ∎

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если* X *— нормированное пространство, то* $X^* \supset B[0, 1; X^*]$ *—* **слабо компактен.*

2. *Если* X *— отделимое локально выпуклое пространство, а* $X^* \supset M_*$ *— равностепенно непрерывное семейство, то* **слабое замыкание множества* M_* **слабо компактно.*

Доказательство. . $\boxed{1}$. $\big(B[0, 1; X]\big)^{\circ} = B[0, 1; X^*]$.

$\boxed{2}$. По утверждению 3.6.7 существует такая окрестность нуля U, что $M_* \subset U^{\circ}_{X\#}$. ■

§ 8. Топологии $\mathcal{M}$-сходимости

Утверждение 3.8.1. *Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, а $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(X)$ — семейство $\sigma(X, \widehat{X})$-ограниченных множеств, удовлетворяющее следующим свойствам:*

$M1$. $M_1, M_2 \in \mathcal{M} \Longrightarrow \exists\, M_3 \in \mathcal{M} : M_1 \cup M_2 \subset M_3$;

$M2$. $M \in \mathcal{M} \Longrightarrow \forall\, \lambda \in \mathbb{P} : \lambda M \in \mathcal{M}$;

$M3$. $\bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}} M = X$.

Тогда $\{\, M^{\circ} \subset \widehat{X} : M \in \mathcal{M}\,\}$ есть база окрестностей нуля некоторой локально выпуклой топологии на $\widehat{X}$.

Определение. Топологию из утверждения 3.8.1 называют *топологией $\mathcal{M}$-сходимости* и обозначают $\widehat{\tau}(\mathcal{M})$.

Замечания. 1. Отметим, что в силу утверждения 3.6.2.1, не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{M}$ — семейство абсолютно выпуклых и $\sigma(X, \widehat{X})$-замкнутых множеств (а значит по теореме 3.5.1 и замкнутых относительно любой топологии, согласованной с двойственностью).

2. В силу двойственности между X и $\widehat{X}$ можно и на X рассматривать топологию $\widehat{\mathcal{M}}$-сходимости, где $\widehat{\mathcal{M}}$ — семейство абсолютно выпуклых $\sigma(\widehat{X}, X)$-замкнутых и $\sigma(\widehat{X}, X)$-ограниченных множеств из X, удовлетворяющее свойствам, аналогичным свойствам $M1$ — $M3$. Эту топологию будем обозначать $\tau(\widehat{\mathcal{M}})$. База окрестностей нуля топологии $\tau(\widehat{\mathcal{M}})$ имеет вид $\{\, {}^{\circ}\widehat{M} \subset X : \widehat{M} \in \widehat{\mathcal{M}}\,\}$.

Утверждение 3.8.2. *Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, $\mathcal{M}$ и $\widehat{\mathcal{M}}$ — семейства, порождающие топологии $\widehat{\tau}(\mathcal{M})$ и $\tau(\widehat{\mathcal{M}})$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $\widehat{X} \ni \widehat{x}_{\alpha} \xrightarrow[\widehat{\tau}(\mathcal{M})]{} \widehat{x}_0$ *тогда и только тогда, когда $\widehat{x}_{\alpha} \to \widehat{x}_0$ равномерно на каждом $M \in \mathcal{M}$, т. е. $\forall\, M \in \mathcal{M}$ $\sup\limits_{x \in M} |\langle x, \widehat{x}_{\alpha} - \widehat{x}_0\rangle| \to 0$.*

2. *Топология $\widehat{\tau}(\mathcal{M})$ порождена следующим семейством преднорм $\Big\{\widehat{p}_M(\widehat{x}) := \sup\limits_{x \in M} |\langle x, \widehat{x}\rangle| : M \in \mathcal{M}\Big\}$.*

3. $X \ni x_{\alpha} \xrightarrow[\tau(\widehat{\mathcal{M}})]{} x_0$ *тогда и только тогда, когда $[x_{\alpha}] \to [x_0]$ равномерно на каждом $\widehat{M} \in \widehat{\mathcal{M}}$, т. е. $\forall\, \widehat{M} \in \widehat{\mathcal{M}}$ $\sup\limits_{\widehat{x} \in \widehat{M}} |\langle x_{\alpha} - x_0, \widehat{x}\rangle| \to 0$.*

4. *Топология $\tau(\widehat{\mathcal{M}})$ порождена следующим семейством преднорм $\Big\{p_{\widehat{M}}(x) := \sup\limits_{\widehat{x} \in \widehat{M}} |\langle x, \widehat{x}\rangle| : \widehat{M} \in \widehat{\mathcal{M}}\Big\}$.*

Утверждение 3.8.3. *Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, $\mathcal{M}$ и $\widehat{\mathcal{M}}$ — семейства, порождающие топологии $\widehat{\tau}(\mathcal{M})$ и $\tau(\widehat{\mathcal{M}})$. Тогда $\sigma(\widehat{X}, X) \subset \widehat{\tau}(\mathcal{M})$ и $\sigma(X, \widehat{X}) \subset \tau(\widehat{\mathcal{M}})$.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathcal{M}_0$ семейство всех конечных подмножеств их X. Тогда $\widehat{\tau}(\mathcal{M}_0) = \sigma(\widehat{X}, X)$.

2. Покажем, что $\forall\, M_0 \in \mathcal{M}_0\ \exists\, M \in \mathcal{M}\colon M_0 \subset M$. Пусть $M_0 = \{\, x_1, \ldots, x_n\,\}$. В силу свойства $M3$ $\exists\, M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{M}$: $x_i \in M_i$. В силу свойства $M1$ $\exists\, M \in \mathcal{M}$: $M \supset \bigcup\limits_{i=1}^{n} M_1 \supset M_0$.

3. Поскольку $M \supset M_0$, то в силу утверждения 3.6.1.1 $M^{\circ} \subset (M_0)^{\circ}$, т. е. $(M_0)^{\circ}$ — окрестность нуля в топологии $\widehat{\tau}(\mathcal{M})$. ■

Определения. Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара.

1. Если $\mathcal{M}_b \subset \mathcal{B}(M)$ — семейство всех $\sigma(X, \widehat{X})$-ограниченных множеств из X, то $\beta(\widehat{X}, X) := \widehat{\tau}(\mathcal{M}_b)$.

2. Если $\mathcal{M}_{comp} \subset \mathcal{B}(M)$ — семейство всех $\sigma(X, \widehat{X})$-компактных множеств из X, то $\tau(\widehat{X}, X) := \widehat{\tau}(\mathcal{M}_{comp})$.

3. Дуально определяются топологии $\beta(X, \widehat{X})$ и $\tau(X, \widehat{X})$

4. Топологии $\tau(\widehat{X}, X)$ и $\tau(X, \widehat{X})$ называются *топологиями Макки.*

Утверждение 3.8.4. *Пусть* $(X, \widehat{X})$ — *дуальная пара,* $\mathcal{M}$ *и* $\widehat{\mathcal{M}}$ — *семейства, порождающие топологии* $\widehat{\tau}(\mathcal{M})$ *и* $\tau(\widehat{\mathcal{M}})$.

Справедливы следующие утверждения:

1. $\sigma(\widehat{X}, X) \subset \widehat{\tau}(\mathcal{M}) \subset \beta(\widehat{X}, X)$.
2. $\sigma(X, \widehat{X}) \subset \tau(\widehat{\mathcal{M}}) \subset \beta(\widehat{X}, X)$.

Теорема 3.8.1. *Пусть* $\langle X, \tau\rangle$ — *отделимое локально выпуклое пространство. Тогда* $\tau = \tau(\mathcal{M}_c^*) \subset \tau(X, X^*)$, *где* $\mathcal{M}_c^*$ — *множество всех равностепенно непрерывных семейств из* X^*.

Доказательство. Рассмотрим дуальную пару (X, X^*). Пусть ω — база абсолютно выпуклых и замкнутых окрестностей нуля в топологии τ.

1. По теореме о биполяре (теорема 3.6.1) $\forall\, U \in \omega\ U = {}^\circ(U^\circ)$. Тем самым $\tau = \tau(\mathcal{M}_0^*)$, где $\mathcal{M}_0^* = \{\, U^\circ : U \in \omega \,\}$. Но по утверждению 3.6.7 $U^\circ \in \mathcal{M}_c^* \Longrightarrow \tau(\mathcal{M}_0^*) \subset \tau(\mathcal{M}_c^*)$.

2. Пусть $M^* \in \mathcal{M}_c^*$. Тогда по утверждению 3.6.7 найдется $U \in \omega$: $M^* \subset U^\circ \Longrightarrow {}^\circ(M^*) \supset U \Longrightarrow \tau(\mathcal{M}_c^*) \subset \tau(\mathcal{M}_0^*)$.

3. В силу теоремы Банаха — Алаоглу — Бурбаки (теорема 3.7.3) U° — $\sigma(X^*, X)$-компактно, поэтому $\tau = \tau(\mathcal{M}_0^*) \subset$ $\subset \tau(X, X^*)$. ■

Теорема 3.8.2 (Макки — Аренс). *Пусть* $(X, \widehat{X})$ — *дуальная пара. Топология* τ *на* X *согласуется с двойственностью тогда и только тогда, когда* $\sigma(X, \widehat{X}) \subset \tau \subset \tau(X, \widehat{X})$.

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. Поскольку топология $\sigma(X, \widehat{X})$ согласуется с двойственностью, то достаточно доказать, что топология $\tau(X, \widehat{X})$ тоже согласуется с двойственностью.

1. Пусть $X^* := \langle X, \tau(X, \widehat{X})\rangle^*$ Так как $\sigma(X, \widehat{X}) \subset \tau(X, \widehat{X})$, то в силу теоремы 3.4.1

$$\widehat{X} = \langle X, \sigma(X, \widehat{X})\rangle^* \subset X^*. \tag{3.8.1}$$

2. Пусть $x_0^* \in X^*$. Тогда $V := \{\, x \in X : |\langle x, x_0^*\rangle| \leqslant 1 \,\}$ есть $\tau(X, \widehat{X})$-окрестность нуля в X. Поэтому существует $\widehat{M}$ из $\widehat{X}$ такое, что $\widehat{M}$ — абсолютно выпукло, $\sigma(\widehat{X}, X)$-компактно и ${}^\circ\widehat{M} \subset V$. Отметим, что в силу соотношени (3.8.1) $\widehat{M} \subset X^*$, поэтому ${}^\circ\widehat{M}$ есть поляра множества $\widehat{M}$ как относительно двойственности $(X, \widehat{X})$, так и относительно двойственности (X, X^*). Тем самым в силу определения множества V и утверждения 3.6.1.1 получим, что

$$x_0^* \in V_{X^*}^\circ \subset \left({}^\circ\widehat{M}\right)_{X^*}^\circ. \tag{3.8.2}$$

3. В силу соотношения (3.8.1) $\sigma(\widehat{X}, X) = \sigma(X^*, X) \cap \widehat{X}$. Поэтому, поскольку $\widehat{M}$ — $\sigma(\widehat{X}, X)$-компактно, то $\widehat{M}$ и $\sigma(X^*, X)$-компактно $\Longrightarrow \sigma(X^*, X)$-замкнуто. Тем самым к множеству $\widehat{M}$ применима теорема о биполяре и соотношение (3.8.2) принимает вид $x_0 \in V_{X^*}^\circ \subset \left({}^\circ\widehat{M}\right)_{X^*}^\circ = \widehat{M} \subset \widehat{X}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$. Это следует из условия $X^* = \widehat{X}$, утверждения 3.4.1, теоремы 3.8.1 и того, что топология $\sigma(X, \widehat{X})$ согласуется с двойственностью. ■

§ 9. Бочки в локально выпуклых пространствах

Определение. *Бочкой* в линейном топологическом пространстве называется абсолютно выпуклое, поглощающее и замкнутое множество.

Замечания. 1. Поскольку замкнутость выпуклого множества есть инвариант локально выпуклой топологии, согласующейся с двойственностью, то свойство множества быть *бочкой* есть свойство дуальной пары.

2. В каждом локально выпуклом пространстве есть базис окрестностей нуля, состоящий из бочек.

Утверждение 3.9.1. *Пусть* X — *отделимое локально выпуклое пространство и* $B \subset X$. *Множество* B *является бочкой тогда и только тогда, когда существует* $M^* \subset X^*$ *такое, что* M^* — *абсолютно выпукло,* $\sigma(X^*, X)$-*замкнуто,* $\sigma(X^*, X)$-*ограничено и* $B = {}^\circ M^*$.

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть B — бочка. Тогда по теореме о биполяре $B = {}^\circ(B^\circ)$. Но в силу утверждений 3.6.2 и 3.6.3 $M^* := B^\circ$ — абсолютно выпукло, $\sigma(X^*, X)$-замкнуто и $\sigma(X^*, X)$-ограничено.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Если $X^* \supset M^*$ — абсолютно выпукло, $\sigma(X^*, X)$-замкнуто и $\sigma(X^*, X)$-ограничено, то в силу утверждений 3.6.2.2 и 3.6.4 ${}^\circ M^*$ — абсолютно выпуклое, $\sigma(X^*, X)$-замкнутое, поглощающее и $\sigma(X^*, X)$-ограниченное множество. ■

Теорема 3.9.1. *В линейном топологическом пространстве любое поглощающее, замкнутое и уравновешенное множество (в частности, бочка), поглощает любое выпуклое компактное множество.*

Доказательство. Пусть B — поглощающее, замкнутое и уравновешенное множество, K — выпуклое компактное множество, а ω — база уравновешенных открытых окрестностей нуля.

1. Покажем, что

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, U_0 \in \omega\ \exists\, x_0 \in K\ :\quad (x_0 + U_0) \cap K \subset n_0 B. \tag{3.9.1}$$

Предположим противное. Возьмем произвольные $x_0 \in K$ и $U_0 \in \omega$. Тогда для $n = 1$ существует $x_1 \in (x_0 + U_0) \cap K \cap (X \setminus B)$. Но $(x_0 + U_0) \cap (X \setminus B)$ — открыто, а любое линейное топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T3, поэтому существует $U_1 \in \omega$ такая, что $x_1 + \overline{U_1} \subset (x_0 + U_0) \cap (X \setminus B)$. Теперь для $n = 2$ найдем $x_2 \in K$ и $U_2 \in \omega$ такие, что $x_2 + \overline{U_2} \subset (x_1 + U_1) \cap (X \setminus 2B)$.

Описанный индукционный процесс дает последовательности $\{\, x_n \,\} \subset K$ и $\{\, U_n \,\} \subset \omega$ такие, что

$$x_{n+1} + \overline{U_{n+1}} \subset (x_n + U_n) \cap (X \setminus (n+1)B). \tag{3.9.2}$$

Тогда $\{\, (x_n + \overline{U_n}) \cap K \,\}$ — убывающая по включению (а значит и центрированная) последовательность замкнутых подмножеств компакта K, поэтому по теореме 1.5.3 $\exists\, a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \big((x_n + \overline{U_n}) \cap K\big)$ $\overset{(3.9.2)}{\Longrightarrow}$ $a \notin nB \Longrightarrow B$ не поглощает a — противоречие с условием.

2. Пусть $x_0 \in K$ и $U_0 \in \omega$ таковы, что выполняется соотношение (3.9.1). Тогда

$$(K - x_0) \cap U_0 \subset n_0 B - x_0. \tag{3.9.3}$$

Но $K - x_0$ — ограничено $\Longrightarrow$

$$\exists\, \lambda_0 \geqslant 1\ :\ (K - x_0) \subset \lambda_0 U_0. \tag{3.9.4}$$

Так как $x_0 \in K$, то $0 \in K - x_0$ — выпуклое $\Longrightarrow \lambda_0^{-1}(K - x_0) \subset$ $\subset K - x_0 \Longrightarrow K - x_0 \overset{(3.9.4)}{\subset} (\lambda_0 U_0) \cap \big(\lambda_0(K - x_0)\big) =$ $= \lambda_0\big(U_0 \cap (K - x_0)\big) \overset{(3.9.3)}{\subset} \lambda_0(n_0 B - x_0) \Longrightarrow$ $K \subset \lambda_0 n_0 B + (1 - \lambda_0)x_0 \overset{B\text{ — погл.}}{\subset} \mu_0 B$. ■

Замечание. Условие выпуклости компакта в теореме 3.9.1 существенно.

Пример 3.9.1. Пусть m_{fin} — множество финитных последовательностей элементов поля $\mathbb{P}$ с равномерной нормой, а $e_n := \{\, \delta_{kn} \,\}$. Тогда $K = \{\, e_n/\sqrt{n} \,\} \cup \{0\}$ — компактно, $B := \{\, x = \{\, x_k \,\} \in m_{fin} : |x_k| \leqslant 1/k \,\}$ — бочка, но K не поглощается бочкой B.

Следствие. *В полном отделимом локально выпуклом пространстве любое поглощающее, замкнутое и уравновешенное множество (в частности, бочка) поглощает любое компактное множество.*

Действительно, в таких пространствах выпуклая и замкнутая оболочка компакта в силу утверждения 2.6.4 и критерия компактности (теорема 2.6.1) компактна. ■

Теорема 3.9.2. *В отделимом локально выпуклом пространстве любое поглощающее, замкнутое и уравновешенное множество (в частности, бочка) поглощает любое выпуклое полное и ограниченное множество.*

Доказательство. Пусть B — поглощающее, замкнутое и уравновешенное множество, M — выпуклое, полное и ограниченное множество, а $x_0 \in M$.

1. Если $M - x_0$ поглощается множеством B, то и M поглощается B, поскольку B — поглощающее множество.

2. Предположим, что $0 \in M_0 := M - x_0$ не поглощается множеством B. Тогда найдется последовательность $\{\, x_n \,\} \subset M_0$ такая, что $x_n \notin n^2 B$. Отметим, что в этом случае последовательность $\{\, n^{-1} x_n \,\}$ тоже не поглощается множеством B. При этом в силу того, что $0 \in M_0$ и M_0 выпукло, последовательность $\{\, n^{-1} x_n \,\} \subset M_0$. Тем самым

$$M_0 \supset \{\, n^{-1} x_n \,\} \text{ не поглощается множеством } B. \tag{3.9.5}$$

3. Поскольку M_0 — ограничено, то $n^{-1} x_n \to 0$ и, как всякая сходящаяся последовательность, $\{\, n^{-1} x_n \,\}$ — вполне ограничена. Тогда $\{\, n^{-1} x_n \,\} \subset cl\big(conv(\{\, n^{-1} x_n \,\})\big) =: K$ — вполне ограниченное выпуклое и замкнутое подмножество полного множества M_0 (напомним, что полное множество в отделимом топологическом пространстве всегда замкнуто), поэтому K — компактно. Тогда по теореме 3.9.1 $\{\, n^{-1} x_n \,\} \subset K$ поглощается множеством B, что противоречит условию (3.9.5). ■

Следствие. *В полном отделимом локально выпуклом пространстве любое поглощающее, замкнутое и уравновешенное множество (в частности, бочка) поглощает любое ограниченное множество.*

Действительно, в таких пространствах выпуклая и замкнутая оболочка ограниченного множества ограничена и полна. ■

Теорема 3.9.3. *Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, τ — топология на X, согласующаяся с двойственностью и $M \subset X$. Тогда $\big(M$ τ-ограничено$\big) \Longleftrightarrow \big(M$ $\sigma(X, \widehat{X})$-ограничено$\big)$.*

Доказательство. 1. Поскольку по утверждению 3.4.1.2 $\sigma(X, \widehat{X}) \subset \tau$ то всякое τ-ограниченное множество является и $\sigma(X, \widehat{X})$-ограниченным множеством.

2. Пусть M — $\sigma(X, \widehat{X})$-ограниченное множество. Тогда $M \subset$ $\subset cl\big(conv(M); \sigma(X, \widehat{X})\big) =: B$ — выпуклое, $\sigma(X, \widehat{X})$-ограниченное и $\sigma(X, \widehat{X})$-замкнутое множество. Тогда по теореме о биполяре $B = {}^\circ(B^\circ)$, а в силу утверждений 3.6.2 и 3.6.4 B° — бочка.

3. Пусть U абсолютно выпуклая и τ-замкнутая окрестность нуля в топологии τ. Тогда по теореме 3.5.1 U и $\sigma(X, \widehat{X})$-замкнуто, поэтому опять $U = {}^\circ(U^\circ)$.

4. Поскольку U° — абсолютно выпуклое и, в силу теоремы Банаха — Алаоглу — Бурбаки, $\sigma(\widehat{X}, X)$-компактное множество, то по теореме 3.9.1 B° поглощает U°. Тем самым $\exists\, \lambda > 0$ $U^\circ \subset \lambda B^\circ \Longrightarrow U = {}^\circ(U^\circ) \supset {}^\circ(\lambda B^\circ) = \lambda^{-1} \cdot {}^\circ(B^\circ) = \lambda^{-1} B \supset$ $\supset \lambda^{-1} M$. ■

Следствие. *Если X — нормированное пространство, то $\langle X^*, \|\cdot\|\rangle \cong \langle X^*, \beta(X^*, X)\rangle$.*

Действительно, обе топологии есть топологии равномерной сходимости на ограниченных множествах в X, поскольку, в силу предыдущей теоремы, множество всех сильно ограниченных подмножеств в X совпадает с множеством всех слабо ограниченных подмножеств в X. ■

Теорема 3.9.4. *Топология метризуемого локально выпуклого пространства X совпадает с $\tau(X, X^*)$.*

Доказательство. 1. Пусть τ — метризуемая локально выпуклая топология на X. Тогда по теореме Макки — Аренса (теорема 3.8.2) $\tau \subset \tau(X, X^*)$.

2. Пусть $\{\, U_n \,\}$ убывающий по включению базис окрестностей нуля топологии τ, а V — $\tau(X, X^*)$-окрестность нуля. Если V — не окрестность нуля в τ, то для любого $n \in \mathbb{N}$ и nV — не окрестность нуля в $\tau \Longrightarrow U_n \not\subset (nV) \Longrightarrow$

$$\exists\ x_n \in U_n \setminus (nV). \tag{3.9.6}$$

3. Поскольку $\{\, U_n \,\}$ убывает по включению, то $x_n \xrightarrow[\tau]{} 0$ $\Longrightarrow \{\, x_n \,\}$ — τ-ограничена $\overset{\text{теор. 3.9.3}}{\Longrightarrow}$ $\tau(X, X^*)$-ограничена $\Longrightarrow$

$\exists\,\lambda > 0\ \forall |\mu| \geqslant \lambda\ \{x_n\} \subset (\mu V) \overset{n>\lambda}{\Longrightarrow} x_n \in (nV)$ — противоречие с (3.9.6). ■

§ 10. Рефлексивные пространства

Определения. Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство.

1. *Сильной топологией в* X^* называется топология $\beta(X^*, X)$.

2. Отделимое локально выпуклое пространство X называется *рефлексивным*, если сильная топология в X^* согласуется с двойственностью (X, X^*) т. е. $\langle X^*, \beta(X^*, X)\rangle^* = [X]$.

Утверждение 3.10.1. *Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство. Тогда (X — рефлексивно)* $\Longleftrightarrow$ $\big(\beta(X^*, X) = \tau(X^*, X)\big)$.

Действительно, это есть следствие из теоремы 3.8.2. ■

Теорема 3.10.1. *Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство. Тогда X — рефлексивно тогда и только тогда, когда всякое ограниченное, выпуклое и замкнутое множество в X слабо компактно.*

Доказательство. В силу предыдущего утверждения рефлексивность X эквивалентна равенству $\beta(X^*, X) = \tau(X^*, X)$. Поскольку абсолютно выпуклая оболочка ограниченного множества ограничена, то без ограничения общности в доказательстве будем рассматривать только абсолютно выпуклые, ограниченные и замкнутые множества.

$\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $X \supset M$ — ограниченное, абсолютно выпуклое и замкнутое в X множество. Тогда M° — окрестность нуля в $\beta(X^*, X) = \tau(X^*, X)$. Тогда найдется такое абсолютно выпуклое и слабокомпактное множество K такое, что $K^\circ \subset M^\circ$

Применяя теорему о биполяре и свойство поляр, получим, что $K = {}^\circ(K^\circ) \supset {}^\circ(M^\circ) = M$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Поскольку всегда $\beta(X^*, X) \supset \tau(X^*, X)$, то достаточно показать обратное включение. Пусть U^* — окрестность нуля в $\beta(X^*, X)$. Тогда найдется такое абсолютно выпуклое замкнутое и ограниченное множество M, что $M^\circ \subset U^*$. В силу условия M — слабо компактно $\Longrightarrow M^\circ$ — окрестность нуля в $\tau(X^*, X)$ $\Longrightarrow U^*$ — окрестность нуля в $\tau(X^*, X)$. ■

Следствие. *Отделимое локально выпуклое пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда всякое ограниченное множество в нем слабо предкомпактно.*

Утверждение 3.10.2. *Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство, X_0 — его подпространство, а $\{x_\alpha\} \subset X_0$. Тогда*

$$\big(x_\alpha \underset{\sigma(X,X^*)}{\longrightarrow} x_0 \in X_0\big) \Longleftrightarrow \big(x_\alpha \underset{\sigma(X_0,(X_0)^*)}{\longrightarrow} x_0\big).$$

Действительно, любой $x_0^* \in (X_0)^*$ можно в силу первого следствия из теоремы Хана — Банаха продолжить до $x^* \in X^*$, а сужение функционала из X^* есть функционал из $(X_0)^*$. ■

Утверждение 3.10.3. *Подпространство рефлексивного пространства само рефлексивно.*

Доказательство. Пусть X_0 — подпространство рефлексивного пространства X и $X_0 \supset M$ — ограниченное абсолютно выпуклое и замкнутое в подпространстве X_0 множество. Тогда оно является таковым и в X. Пусть $M \supset \{x_\alpha\}$, тогда в силу рефлексивности X $\exists\, x_{\varphi(\beta)} \underset{\sigma(X,X^*)}{\longrightarrow} x_0 \in M$. Но тогда в силу утверждения 3.10.2 $x_{\varphi(\beta)} \underset{\sigma(X_0,(X_0)^*)}{\longrightarrow} x_0 \in M$. ■

§ 11. Бочечные пространства и обобщенная теорема Банаха – Штейнгауза

Определение. Пусть X и Y линейные топологические пространства. Семейство $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ называется *равностепенно непрерывным*, если

$$\forall U \in \omega_Y(0)\ \exists V \in \omega_X(0)\ \forall A \in \mathcal{M} \quad A(V) \subset U.$$

Утверждение 3.11.1. *Пусть X и Y линейные топологические пространства и $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ — равностепенно непрерывно. Тогда $\mathcal{M}$ поточечно ограничено, т. е. $\forall x \in X$ $\{\, Ax : A \in \mathcal{M} \,\}$ ограничено.*

Утверждение 3.11.2. *Пусть X и Y нормированные пространства и $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда (семейство $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ равностепенно непрерывно) $\Longleftrightarrow$ ($\{\, ||A|| : A \in \mathcal{M} \,\}$ ограничено).*

Замечания. 1. В силу утверждения 3.11.2 в нормированных пространствах теорему Банаха — Штейнгауза можно сформулировать следующим образом.

Пусть X и Y банаховы пространства. Если семейство $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ поточечно ограничено, то оно равностепенно непрерывно.

2. Отметим, что если X — отделимое локально выпуклое пространство и семейство $\mathcal{M} \subset X^*$, то поточечная ограниченность $\mathcal{M}$ — это $\sigma(X^*,X)$-ограниченность семейства $\mathcal{M}$.

Теорема 3.11.1. *Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство. Для того, чтобы любое $\sigma(X^*,X)$-ограниченное в нем семейство $M^* \subset X^*$ было равностепенно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы любая бочка в X была окрестностью нуля.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $X \supset B$ — бочка $\overset{\text{утв. 3.9.1}}{\Longrightarrow}$ $B = {}^\circ M^*$, где $X^* \supset M^*$ – абсолютно выпукло, $\sigma(X^*,X)$-замкнуто и $\sigma(X^*,X)$-ограничено $\Longrightarrow$ M^* — равностепенно непрерывно. Тогда по утверждению 3.6.7 найдется такая абсолютно выпуклая и замкнутая окрестность нуля U, что $M^* \subset U^\circ \Longrightarrow B = {}^\circ M^* \supset {}^\circ(U^\circ) = U \Longrightarrow B$ — окрестность нуля.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $X^* \supset M^*$ — $\sigma(X^*,X)$-ограничено $\overset{\text{утв. 3.9.1}}{\Longrightarrow}$ ${}^\circ M^*$ — бочка $\Longrightarrow$ найдется такая абсолютно выпуклая и замкнутая окрестность нуля U, что $U \subset {}^\circ M^* \Longrightarrow M^* \subset \left({}^\circ M^*\right)^\circ \subset$ $\subset U^\circ \overset{\text{утв. 3.6.7}}{\Longrightarrow} M^*$ — равностепенно непрерывно. ∎

Определение. Локально выпуклое пространство называется *бочечным*, если в нем любая бочка является окрестностью нуля.

Утверждение 3.11.3. *Пусть $\langle X,\tau\rangle$ — отделимое бочечное пространство. Справедливы следующие утверждения:*

1. $\tau = \tau(X,X^*) = \beta(X,X^*)$.

2. *Если $X^* \supset M^*$ — $\sigma(X^*,X)$-ограничено, то $cl(conv(M^*);\tau)$ — $\sigma(X^*,X)$-компактно.*

Доказательство. $\boxed{1}$. По теореме 3.8.1 $\tau = \tau(\mathcal{M}_c^*)$, где $\mathcal{M}_c^*$ — множество всех равностепенно непрерывных семейств из X^*. Но если M^* — $\sigma(X^*,X)$-ограничено, то $M^* \in \mathcal{M}_c^*$, тем самым $\tau = \beta(X,X^*)$ и, значит, $\beta(X,X^*)$ согласуется с двойственностью (X,X^*). Поэтому в силу теоремы Макки — Аренса $\tau(X,X^*) = \beta(X,X^*)$. ∎

Теорема 3.11.2. *Если локально выпуклое пространство нельзя представить в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств, то оно бочечно.*

Доказательство. Пусть B — бочка. Так как B — поглощающее, то $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(nB) \Longrightarrow$ для некоторого n_0 $(\overset{\circ}{n_0B}) \neq \varnothing$ $\Longrightarrow \overset{\circ}{B} \neq \varnothing$ и $0 \in \overset{\circ}{B} - \overset{\circ}{B} = 2\overset{\circ}{B}$, т. е. B — окрестность нуля. ∎

Следствие. *Любое локально выпуклое пространство, являющееся полным метрическим пространством, бочечно.*

Замечания. 1. Существуют бочечные пространства, не являющиеся полными.

2. Существуют бочечные пространства, которые можно представить в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств.

Пример 3.11.1. В пространстве m_{fin} (см. пример 3.9.1) множество $B := \{ x \in m_{fin} : |x_n| \leqslant 1/n \}$ — бочка, но не окрестность нуля. Тем самым нормированное пространство m_{fin} не бочечно.

Теорема 3.11.3 (Обобщенная теорема Банаха — Штейнгауза). *Пусть X — бочечное пространство, а Y — локально выпуклое пространство. Если $\mathcal{L}(X,Y) \supset \mathcal{L}_0$ — поточечно ограничено, то $\mathcal{L}_0$ — равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}(X,Y) \supset \mathcal{L}_0$ — поточечно ограничено, а V —абсолютно выпуклая замкнутая окрестность нуля в пространстве Y. Тогда $B := \bigcap\limits_{A\in\mathcal{L}_0} A^{-1}(V)$ — абсолютно выпуклое замкнутое и поглощающее множество в X, т.е. бочка $\Longrightarrow B$ — окрестность нуля в пространстве X и $\{ A(B) : A \in \mathcal{L}_0 \} \subset V$, что в силу произвольности V и означает равностепенную непрерывность семейства $\mathcal{L}_0$. ■

Теорема 3.11.4. *Пусть X — бочечное пространство, Y — локально выпуклое пространство, $\{ A_\alpha \} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, $A_\alpha \to A_0$ поточечно и $X \ni x_\beta \to x_0$. Тогда $A_\alpha x_\beta \underset{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}{\longrightarrow} A_0 x_0$.*

Доказательство. 1. В силу теоремы 3.11.3 $\{ A_\alpha \}$ — равностепенно непрерывно.

2. $A_\alpha x_\beta - A_0 x_0 = A_\alpha(x_\beta - x_0) + A_\alpha x_0 - A_0 x_0$. ■

Глава 4
Банаховы пространства

§ 1. Двойственность в нормированных пространствах и Теорема Эберлейна — Шмульяна

Определение. Пусть X — нормированное пространство.

$$X^{**} := (X^*)^*,\ X^{***} := (X^{**})^*,\ \ldots$$

Утверждение 4.1.1. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда $[x] \in X^{**}$ и $||[x]||_{X^{**}} = ||x||_X$.*

Следствие. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда отображение $[\cdot] : X \to X^{**}$ линейно и изометрично. При этом, если X — банахово, то $[X]$ — подпространство банахова пространства X^{**}.*

Утверждение 4.1.2. *Пусть X — банахово пространство. Справедливы следующие утверждения:*

1. $cl(\big[B[0,1;X]\big];\sigma(X^{**},X^*)) = B[0,1;X^{**}]$.
2. $cl([X];\sigma(X^{**},X^*)) = X^{**}$.

Доказательство. $\boxed{1}$. Рассмотрим множество V, определенное формулой $V := cl(\big[B[0,1;X]\big];\sigma(X^{**},X^*))$. Тогда по теореме о биполяре (теорема 3.6.1) $^\circ(V^\circ) = V$ относительно дуальной пары (X^{**},X^*).

Но по утверждению 3.6.2.1 $V^\circ = ([B[0,1;X]])^\circ$. С другой стороны

$$([B[0,1;X]])^\circ = \Big\{ x^* \in X^* : \sup_{||x||\leqslant 1} |\langle x^*,[x]\rangle| \leqslant 1 \Big\} =$$
$$= \Big\{ x^* \in X^* : \sup_{||x||\leqslant 1} |\langle x,x^*\rangle| \leqslant 1 \Big\} = B[0,1;X^*], \text{ а}$$
$$^\circ\big(B[0,1;X^*]\big) = B[0,1;X^{**}]. \ ■$$

Определения. Пусть X — нормированное пространство и $M \subset X$, а $M_* \subset X^*$.

1. $M^\perp := \{ x^* \in X^* : \forall\, x \in M \ \langle x, x^* \rangle = 0 \}$.
2. ${}^\perp M_* := \{ x \in X : \forall\, x^* \in M_* \ \langle x, x^* \rangle = 0 \}$.

Утверждение 4.1.3. *Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$ и $M_* \subset X^*$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $M^\perp = \overline{\langle M \rangle}^\perp$ *— подпространство в X^*.*
2. ${}^\perp M_* = {}^\perp(\overline{\langle M_* \rangle})$ *— подпространство в X.*

Утверждение 4.1.4. *Пусть X — нормированное пространство, M — подпространство в X и M_* — подпространство в X^*. Справедливы следующие утверждения:*

1. ${}^\perp(M^\perp) = M$. 2. ${}^\perp[M] = M^\perp$. 3. ${}^{\perp\perp}[M] = M$.
4. $[{}^\perp M_*] = M_*^\perp \cap [X]$. 5. $[M] = M^{\perp\perp} \cap [X]$.
6. $({}^\perp M_*)^\perp \supset M_*$.

Если X — рефлексивное банахово пространство, то справедливы следующие равенства:

7. $M^{\perp\perp} = [M]$. 8. $[{}^\perp M_*] = M_*^\perp$. 9. $({}^\perp M_*)^\perp = M_*$.

Действительно, Это следует из утверждений 4.1.3 и 3.6.1.3, теоремы о биполяре (теорема 3.6.1), теоремы 3.5.1 и того факта, что в рефлексивных пространствах $\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, X)$. ■

Задание 4.1.1. Приведите пример банахова пространства X и подпространства M_* пространства X^* таких, что $({}^\perp M_*)^\perp \neq M_*$.

Теорема 4.1.1. *Пусть X — нормированное пространство. Если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно.*

Доказательство. 1. Поскольку подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно, то единичная сфера $S_* := \{ \varphi \in X^* : ||\varphi|| = 1 \}$ — сепарабельное метрическое пространство относительно метрики, порожденной нормой в X^*. Поэтому $\exists \{ \varphi_n \} \subset S_* : \ \overline{\{ \varphi_n \}} = S_*$.

2. В силу определения нормы $||\varphi_n||$ найдутся такие $x_n \in X$, что $||x_n|| = 1$ и $|\varphi_n(x_n)| \geqslant 1/2$. Покажем, что $\{ x_n \}$ — полная система в X. Предположим противное: $\overline{\langle \{ x_n \} \rangle} =: X_0 \neq X$. Тогда по следствию 5 из теоремы Хана — Банаха найдется такой $\varphi_0 \in S_*$, что $X_0 \subset Ker\, \varphi_0$. Поэтому $||\varphi_n - \varphi_0|| = \sup\limits_{||x||=1} |(\varphi_n - \varphi_0)(x)| \geqslant |(\varphi_n - \varphi_0)(x_n)| = |\varphi_n(x_n)| \geqslant \dfrac{1}{2}$, т. е. $\{ \varphi_n \}$ неплотна в S_*, что противоречит выбору $\{ \varphi_n \}$. ■

Теорема 4.1.2 (Банах). *Если X — сепарабельное нормированное пространство, то $X^* \supset B[a^*, r]$ *слабо секвенциально компактен.*

Доказательство. Пусть $\{ e_m \}$ — полная в X нормированная система линейно независимых векторов и $\{ x_n^* \} \subset B[a^*, r]$.

Прежде всего отметим, что

$$\forall\, m, n \ \ |\langle e_m, x_n^* \rangle| \leqslant ||e_m|| \cdot ||x_n^*|| \leqslant K =: ||a^*|| + r. \qquad (4.1.1)$$

1. В силу соотношений (4.1.1) найдутся $\alpha_1 \in \mathbb{P}$ и подпоследовательность $\{ x^*_{n_k^{(1)}} \}$ последовательности $\{ x_n^* \}$ такие, что $\langle e_1, x^*_{n_k^{(1)}} \rangle \to \alpha_1$. Теперь для e_2 в силу соотношений (4.1.1) найдутся $\alpha_2 \in \mathbb{P}$ и подпоследовательность $\{ x^*_{n_k^{(2)}} \}$ последовательности $\{ x^*_{n_k^{(1)}} \}$ такие, что $\langle e_2, x^*_{n_k^{(2)}} \rangle \to \alpha_2$.

Применяя индукционный процесс, для любого m найдем такое $\alpha_m \in \mathbb{P}$ и подпоследовательность $\{ x^*_{n_k^{(m)}} \}$ последовательности $\{ x^*_{n_k^{(m-1)}} \}$, что $\langle e_m, x^*_{n_k^{(m)}} \rangle \to \alpha_m$.

2. Рассмотрим последовательность $\{ x^*_{n_k^{(k)}} \}$. Поскольку $\forall\, m \in \mathbb{N} \ \{ x^*_{n_k^{(k)}} \}\big|_{k>m}$ — подпоследовательность последовательности $x^*_{n_k^{(m)}}$, то

$$\forall\, m \ \ \langle e_m, x^*_{n_k^{(k)}} \rangle \to \alpha_m. \qquad (4.1.2)$$

3. Определим x_0^* следующим образом: $\forall\, m \ \ \langle e_m, x_0^* \rangle := \alpha_m$ и продолжим по линейности на $X_0 := \langle \{ e_m \} \rangle$ (и оставим для

продолжения старое обозначение x_0^*). Тогда

$$\forall\, x \in X_0 \;\; K||x|| \geqslant |\langle x, x^*_{n_k^{(k)}}\rangle| = \Big|\Big\langle \sum_{m=1}^{m(x)} \lambda_m e_m, x^*_{n_k^{(k)}} \Big\rangle\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{m=1}^{m(x)} \langle \lambda_m e_m, x^*_{n_k^{(k)}}\rangle\Big| \xrightarrow[k\to\infty]{(4.1.2)} \Big|\sum_{m=1}^{m(x)} \lambda_m \alpha_m\Big| = |\langle x, x_0^*\rangle|,$$

т. е. x_0^* ограничен на X_0. Продолжим его с сохранением нормы на $\overline{X_0} = X$.

4. Покажем, что $x^*_{n_k^{(k)}} \xrightarrow{*сл} x_0^*$. Отметим, что $x^*_{n_k^{(k)}}$ — подпоследовательность последовательности x_n^* и, следовательно, ограничена, а в силу (4.1.2) $\forall\, m \;\; \langle e_m, x^*_{n_k^{(k)}}\rangle \to \alpha_m = \langle e_m, x_0^*\rangle$, т. е. на полной в X системе. В силу достаточного условия *слабой сходимости получим, что $x^*_{n_k^{(k)}} \xrightarrow{*сл} x_0^*$.

5. В силу свойств *слабой сходимости $||x_0^* - a^*|| \leqslant \leqslant \underline{\lim}\, ||x^*_{n_k^{(k)}} - a^*|| \leqslant r$. ■

Замечание. В общем случае, в отличие от метрических пространств, в которых множество компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно, если X не сепарабельно, $X^* \supset B[a^*, r]$ может оказаться не *слабо секвенциально компактным, несмотря на то, что в силу теоремы Банаха — Алаоглу — Бурбаки (теорема 3.7.3), он *слабо компактен.

Пример 4.1.1. Пусть $X = m$, а $e_n^* \in m^*$ линейные функционалы такие, что $\langle \{\,\xi_k\,\}, e_n^*\rangle := \xi_n$. Тогда $\|e_n^*\| = 1$. Покажем, что из $\{\, e_n^* \,\}$ нельзя выделить ни одной *слабо сходящейся подпоследовательности.

Возьмем произвольную подпоследовательность $\{\, e^*_{n_k} \,\}$. Поскольку *слабая сходимость это просто поточечная сходимость, то покажем, что $\{\, e^*_{n_k} \,\}$ не сходится поточечно. Рассмотрим элемент $x_0 = \{\,\xi_n\,\}$, где $\xi_{n_k} = (-1)^k$, а остальные координаты — нулевые. Тогда $|\langle x_0, e^*_{n_k} - e^*_{n_{k+1}}\rangle| = 2$ и, тем самым, последовательность $\{\,\langle x_0, e^*_{n_k}\rangle\,\}$ не является фундаментальной, а значит и сходящейся. ■

Таким образом, из "компактности" "секвенциальная компактность" не следует. Существуют и секвенциально компактные множества, не являющиеся компактными.

Пример 4.1.2. Пусть X — множество всех функций из $[0;1]$ в $[0;1]$ с топологией поточечной сходимости, а K — множество функций $\varphi \in X$ таких, что $\{\, t : \varphi(t) \neq 0 \,\}$ не более чем счетно. Покажем, что K секвенциально компактно, но не компактно.

Пусть $\{\,\varphi_n\,\} \subset K$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\, t : \varphi(t) \neq 0 \,\} = \{\, t_m \,\}$. Поскольку $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \varphi_n(t_1) \subset [0;1]$, то найдется подпоследовательность $\{\,\varphi_{n_k^{(1)}}\,\}$ последовательности $\{\,\varphi_n\,\}$ и $\beta_1 \in [0;1]$ такие, что $\varphi_{n_k^{(1)}}(t_1) \to \beta_1$. Теперь из $\{\,\varphi_{n_k^{(1)}}\,\}$ выделим подпоследовательнось $\{\,\varphi_{n_k^{(2)}}\,\}$ такую, что $\varphi_{n_k^{(2)}}(t_2) \to \beta_2 \in [0;1]$. Таким образом описан идукционный процесс выделения подпоследовательностей $\{\,\varphi_{n_k^{(m)}}\,\}$ таких, что $\varphi_{n_k^{(m)}}(t_m) \to \beta_m \in [0;1]$. Тогда подпоследовательность $\{\,\varphi_{n_k^{(k)}}\,\}$ исходной последовательности $\{\,\varphi_n\,\}$ поточечно сходится к функции φ_0: $\varphi_0(t_m) = \beta_m$ и $\varphi_0(t) = 0$ при $t \notin \{\, t_m \,\}$, тем самым $\varphi_0 \in K$.

Теперь покажем, что K не компактно. Пусть $\mathcal{A}$ — направленное по возрастанию множество всех конечных подмножеств отрезка $[0;1]$ и $\varphi_\alpha(t) = 1$ при $t \in \alpha$ и $\varphi_\alpha(t) = 0$ при $t \notin \alpha$. Тогда $\{\,\varphi_\alpha\,\} \subset K$ и $\forall\, t \in [0;1] \;\; \varphi_\alpha(t) \xrightarrow[\mathcal{A}]{} 1$ или $\varphi_\alpha \xrightarrow[\mathcal{A}]{} \varphi_0$, где $\varphi_0 \equiv 1$ и $\varphi_0 \notin K$. Тем самым K не замкнуто в отделимом топологическом пространстве X, поэтому K — не компактно. ■

Тем самым понятия "компактность" и "секвенциальная компактность" несравнимы. Но, как показали рocсcийский математик Шмульян В. Л. и американский математик Эберлейн В. Ф., в нормированных пространствах слабая компактность эквивалентна слабой секвенциальной компактности.

Теорема 4.1.3 (Эберлейн — Шмульян). *В нормированном пространстве множество слабо компактно тогда и только тогда, когда оно слабо секвенциально компактно.*

Доказательство этой теоремы разобъем на ряд вспомогательных утверждений, представляющих интерес и сами по себе.

Утверждение 4.1.5. *Пусть X — нормированное пространство. $X \supset K$ слабо компактно тогда и только тогда, когда $X^{**} \supset [K]$ $\sigma(X^{**}, X^*)$-компактно.*

Действительно, это следует из того, что $(X \ni x_\alpha \xrightarrow{сл} x_0) \Longleftrightarrow (X^{**} \ni [x_\alpha] \xrightarrow[\sigma(X^{**},X^*)]{} [x_0])$. ■

Утверждение 4.1.6. *Пусть X — сепарабельное нормированное пространство. Тогда существует $\{\, e_n^* \,\} \subset X^*$:*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \|e_n^*\| = 1, \quad \forall\, x \in X\ \sup_n \langle x, e_n^* \rangle = \|x\|.$$

Доказательство. Пусть $X \supset \{\, x_n \,\}$ — всюду плотное в X множество, а e_n^*: $\langle x_n, e_n^* \rangle = \|x_n\|$ (такие существуют в силу следствия из теоремы Хана — Банаха). Пусть $x_0 \in X$ и $x_{n_k} \to x_0$. Тогда $\langle x_0, e_{n_k}^* \rangle = \langle x_0 - x_{n_k}, e_{n_k}^* \rangle + \langle x_{n_k}, e_{n_k}^* \rangle = \langle x_0 - x_{n_k}, e_{n_k}^* \rangle + \|x_{n_k}\| \to 0 + \|x_0\|$. ■

Определение. Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, а $X \supset X_0$ — линейное многообразие. Говорят, что система $\{\, \widehat{x}_\alpha \,\} \subset \widehat{X}$ *тотальна над* X_0, если $(\forall\, \alpha\ \langle x, \widehat{x}_\alpha \rangle = 0) \Longrightarrow (x = 0)$.

Следствие. *Пусть X — сепарабельное нормированное пространство. Тогда существует $\{\, x_n^* \,\} \subset X^*$ тотальная над X.*

Действительно, система, построенная в утверждении 4.1.6, тотатльна над X. ■

Теорема 4.1.4. *Пусть $(X, \widehat{X})$ — дуальная пара, $X \supset K$ — $\sigma(X, \widehat{X})$-компактно и существует счетная система $\{\, \widehat{x}_n \,\}$ в $\widehat{X}$, тотальная над $X_0 := \langle K \rangle$. Тогда топология $\sigma(X, \widehat{X}) \cap K$ метризуема.*

Доказательство. Пусть $\{\, \widehat{x}_n \,\} \subset \widehat{X}$ — тотальная над X_0 система. Поскольку K — $\sigma(X, \widehat{X})$-ограничено, то, не ограничивая общности (переходя к новой тотальной над X_0 системе), можно считать, что $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in K\ |\langle x, \widehat{x}_n \rangle| \leqslant 1$.

Для любого $x \in X_0$ положим $||x|| := \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle x, \widehat{x}_n \rangle|$. Тогда $|| \cdot ||$ — норма на X_0. Пусть $x_0 \in K$ и $r > 0$. Рассмотрим $B(x_0, r; K)$. Возьмем N: $2^{-N} < r/4$.

Тогда для $V(x_0) := \{\, x \in K : \max\limits_{n \leqslant N} |\langle x - x_0, \widehat{x}_n \rangle| < r/2 \,\}$ — $\sigma(X, \widehat{X}) \cap K$-окрестности точки x_0 получим, что $x \in V(x_0) \Longrightarrow$

$$||x - x_0|| \leqslant \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} |\langle x - x_0, \widehat{x}_n \rangle| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |\langle x, \widehat{x}_n \rangle| +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |\langle x_0, \widehat{x}_n \rangle| < \frac{r}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 2^{-N} < \frac{r}{2} + 2\frac{r}{4} = r$$

или $V(x_0) \subset B(x_0, r; K)$. Тем самым топология на K, порожденная нормой $|| \cdot ||$ есть отделимая топология на K, которая не сильнее $\sigma(X, \widehat{X}) \cap K$. В силу утверждения 1.5.5 эти две топологии на K совпадают. ■

Теорема 4.1.5. *Пусть X — нормированное пространство, а $X \supset K$ — слабо компактное множество. Тогда K секвенциально слабо компактно.*

Доказательство. Пусть $X \supset K$ слабо компактное множество и $\{\, x_n \,\} \subset K$. Рассмотрим $X_0 := \overline{\langle \{\, x_n \,\} \rangle}$ и $K_0 := K \cap X_0$. Тогда X_0 — сепарабельно, а K_0 — слабо компактно. По следствию из утверждения 4.1.6 найдется семейство $\{\, e_n^* \,\} \subset (X_0)^*$ тотальное над X_0. Но каждый e_n^* можно продолжить по непрерывности на все X, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\{\, e_n^* \,\} \subset X^*$. При этом $\{\, e_n^* \,\}$ — тотальна над $X_0 \supset \langle K_0 \rangle$. Поэтому по теореме 4.1.4 топология $K_0 \cap \sigma(X, X^*)$ метризуема и, тем самым, K_0 — секвенциально слабо компактно $\Longrightarrow$ $\exists\, x_{n_k}$, $x_0 \in K_0$: $x_{n_k} \xrightarrow{сл} x_0 \in K_0 \subset K$. ■

Определение. Пусть X — нормированное пространство, $X^* \supset X_0^*$ — линейное многообразие и $\vartheta \in (0;1]$. $S \subset S[0,1] \subset X$ назовем *ϑ-мажорирующим множеством для X_0^**, если

$$\forall\, x^* \in X_0^* \quad \sup_{x\in S} |\langle x, x^*\rangle| \geqslant \vartheta ||x^*||. \tag{4.1.3}$$

Замечание. Очевидно, что свойство (4.1.3) эквивалентно следующему $\forall\, x^* \in X_0^* : ||x^*|| = 1 \quad \sup\limits_{x\in S} |\langle x, x^*\rangle| \geqslant \vartheta$.

Утверждение 4.1.7. *Пусть X — нормированное пространство и $X^* \supset X_0^*$ — линейное многообразие.*

Если S — ϑ-мажорирующее множество для X_0^*, то S — ϑ-мажорирующее множество и для $\overline{\langle X_0^*\rangle}$.

Доказательство. Предположим противное, тогда

$$\exists\, x_0^* \in \overline{\langle X_0^*\rangle} : \quad \sup_{x\in S} |\langle x, x_0^*\rangle| =: \alpha < \beta < \vartheta ||x_0^*||. \tag{4.1.4}$$

Пусть $X_0^* \ni x_n^* \to x_0^*$, в частности $||x_n^*|| \to ||x_0^*||$. Тогда

$$\forall\, x \in S \ \ |\langle x, x_n^*\rangle| \leqslant |\langle x, x_n^* - x_0^*\rangle| + |\langle x, x_0^*\rangle| \leqslant ||x_n^* - x_0^*|| + \alpha \to \alpha$$
$$\Longrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geqslant n_0\,,\ \forall\, x \in S \ \ |\langle x, x_n^*\rangle| \leqslant \beta \overset{(4.1.3)}{\Longrightarrow}$$
$$\vartheta ||x_n^*|| \leqslant \sup_{x\in S} |\langle x, x_n^*\rangle| \leqslant \beta \overset{(4.1.4)}{\Longrightarrow} \vartheta ||x_0^*|| \leqslant \beta < \vartheta ||x_0^*||. \ \blacksquare$$

Утверждение 4.1.8. *Пусть X — нормированное пространство и $X^{**} \supset X_0^{**}$ — конечномерное подпространство. Тогда для любого $\vartheta \in (0;1)$ существует $X^* \supset S_\vartheta$ — конечное ϑ-мажорирующее множество для X_0^{**}.*

Доказательство. Пусть $\vartheta \in (0;1)$ и α: $\vartheta + \alpha < 1$. Так как сфера $S^{**} := S[0,1; X_0^{**}]$ компактна, то $\exists\, \{x_1^{**}, \dots, x_k^{**}\} \subset S^{**}$ — α-сеть для S^{**}. Пусть $x_1^*, \dots, x_k^* \in S[0,1; X_0^*]$ таковы, что

$$|\langle x_i^*, x_i^{**}\rangle| \geqslant \vartheta + \alpha. \tag{4.1.5}$$

Тогда $\forall\, x^{**} \in S^{**} \ \ \exists\, \widetilde{i}$: $||x^{**} - x_{\widetilde{i}}^{**}|| \leqslant \alpha \Longrightarrow |\langle x_{\widetilde{i}}^*, x^{**}\rangle| =$
$= |\langle x_{\widetilde{i}}^*, x_{\widetilde{i}}^{**}\rangle + \langle x_{\widetilde{i}}^*, x^{**} - x_{\widetilde{i}}^{**}\rangle| \geqslant |\langle x_{\widetilde{i}}^*, x_{\widetilde{i}}^{**}\rangle| - |\langle x_{\widetilde{i}}^*, x^{**} - x_{\widetilde{i}}^{**}\rangle| \overset{(4.1.5)}{\geqslant}$
$\geqslant \vartheta + \alpha - ||x_{\widetilde{i}}^*|| \cdot ||x^{**} - x_{\widetilde{i}}^{**}|| \geqslant \vartheta + \alpha - \alpha = \vartheta$. $\blacksquare$

Утверждение 4.1.9. *Пусть X — нормированное пространство и $X \ni x_n \xrightarrow{сл} x_0$. Тогда $[x_0] \in \overline{\langle \{\, [x_n] \,\}\rangle} \subset X^{**}$.*

Доказательство. По теореме Мазура $x_0 \in \overline{\langle \{\, x_n \,\}\rangle} \subset X$ $\Longrightarrow \exists\, \{\, \widetilde{x}_m \,\} \in \langle \{\, x_n \,\}\rangle$: $\widetilde{x}_m \to x_0 \Longrightarrow [\widetilde{x}_m] \to [x_0] \in \overline{\langle \{\, [x_n] \,\}\rangle}$. $\blacksquare$

Теорема 4.1.6. *Пусть X — нормированное пространство. Если $X \supset K$ — секвенциально слабо компактно, то K и слабо компактно.*

Доказательство. 1. Прежде всего отметим, что K ограничено. Действительно, в противном случае найдется $\{\, x_n \,\} \subset K$: $||x_n|| \to \infty$, из которой нельзя выделить ни одной слабо сходящейся подпоследовательности, поскольку всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена.

2. Поскольку $K \subset B[0, r; X]$, то

$$[K] \subset \big[B[0, r; X]\big] \subset B[0, r; X^{**}].$$

Но по теореме 3.7.3 $B[0, r; X^{**}]$ — $\sigma(X^{**}, X^*)$-компактно. Пусть $K^{**} := cl\big([K]; \sigma(X^{**}, X^*)\big)$, тогда K^{**} — $\sigma(X^{**}, X^*)$-компактно. Покажем, что $K^{**} = [K]$, откуда в силу утверждения 4.1.5 будет следовать заключение теоремы.

3. Пусть $x_0^{**} \in K^{**}$, а $\vartheta \in (0;1)$. Через $U^{**}(\varepsilon; x_1^*, \dots, x_k^*)$ будем обозначать $\sigma(X^{**}, X^*)$-окрестности нуля в X^{**}:

$$\{x^{**} \in X^{**} : \max_{i\in\overline{1,k}} |\langle x_i^*, x^{**}\rangle| < \varepsilon\}.$$

Возьмем произвольное $x_1^* \in X^*$: $||x_x^*|| = 1$. Тогда $\big(x_0^{**} + U^{**}(1; x_1^*)\big) \cap [K] \neq \varnothing$, т. е. $\exists\, x_1 \in K$: $|\langle x_1^*, [x_1] - x_0^{**}\rangle| < 1$. Тогда по утверждению 4.1.8 в X^* для $X_1^{**} := \langle \{x_0^{**}, [x_1]\}\rangle$ найдется $\{\, x_2^*, \dots, x_{k(1)}^* \,\}$ — конечное ϑ-мажорирующее множество. Теперь найдем $x_2 \in K$: $[x_2] \in x_0^{**} + U^{**}(1/2; x_1^*, \dots, x_{k(1)}^*)$. По утверждению 4.1.8 в X^* для $X_2^{**} := \langle x_0^{**}, [x_1], [x_2]\rangle$ найдется $\{\, x_{k(1)+1}^*, \dots, x_{k(2)}^* \,\}$ — конечное ϑ-мажорирующее множество.

Таким образом описан индукционный процесс построения последовательностей $\{ x_n \} \subset K$, $\{ X_n^{**} \}$ конечномерных подпространств пространства X^{**} и $S^* := \{ x_m^* \} \subset S[0,1;X^*]$ таких, что

$$[x_n] \in x_0^{**} + U^{**}(1/n; x_1^*, \dots, x_{k(n)}^*), \tag{4.1.6}$$

$$X_n^{**} = \langle x_0^{**}, [x_1], \dots, [x_n] \rangle, \tag{4.1.7}$$

$\{ x_1^*, \dots, x_{k(n)}^* \}$ — ϑ-мажорирующее множество для X_n^{**}.

Тогда S^* — ϑ-мажорирующее множество для $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^{**}$. В силу утверждения 4.1.7 S^* — ϑ-мажорирующее множество и для $X_0^{**} := \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^{**}}$.

4. В силу секвенциальной слабой компактности множества K, не ограничивая общности, можно считать, что

$$x_n \xrightarrow{сл} x_0 \in K. \tag{4.1.8}$$

Тогда по утверждению 4.1.9 и определению X_0^{**}

$$[x_0] \in X_0^{**}. \tag{4.1.9}$$

5. В силу соотношения (4.1.6) для любого $m \in \overline{1, k(n)}$ справедливо неравенство $|\langle x_m^*, [x_n] - x_0^{**} \rangle| < 1/n$. Отсюда в силу (4.1.8) для любого $m \in \mathbb{N}$ получим

$$\langle x_m^*, [x_0] - x_0^{**} \rangle = 0. \tag{4.1.10}$$

С другой стороны, в силу (4.1.7), (4.1.9) и определения X_0^{**} справедливо включение $[x_0] - x_0^{**} \in X_0^{**}$. Поскольку множество S^* является ϑ-мажорирующим для X_0^{**}, то

$$0 \overset{(4.1.9)}{=} \sup_m |\langle x_m^*, [x_0] - x_0^{**} \rangle| \geqslant \vartheta ||[x_0] - x_0^{**}|| \Longrightarrow x_0^{**} = [x_0] \in [K]. \quad \blacksquare$$

Теорема 4.1.7. *Пусть X — нормированное пространство. Следуюшие условия эквивалентны:*

1. *X рефлексивно.*
2. *Шар $B[0,1;X]$ слабо компактен.*
3. *Шар $B[0,1;X]$ секвенциально слабо компактен.*

Действительно, это следует из теоремы Эберлейна — Шмульяна и критерия рефлексивности (теорема 3.10.1). $\blacksquare$

Следствие. *Пусть X — рефлексивно, $X \supset M$ — выпукло и замкнуто. Тогда для любого $x \in X$ существует метрическая проекция x на M.*

Утверждение 4.1.10. *Если $p > 1$, то l_p рефлексивно.*

Доказательство. Покажем, что $B[0,1;l_p]$ секвенциально слабо компактен. Пусть $x_n = \{ \xi_{nk} \}$: $||x_n||_{l_p} \leqslant 1$, тогда $\forall\, n \in \mathbb{N}$ последовательности $\{ \xi_{nk} \}$ ограничены. Применяя диагональный метод, подобно доказательству теоремы 4.1.2, получим подпоследовательность $\{ x_{n_m} \}$ такую, что $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\xi_{n_m k} \to \alpha_k \in \mathbb{P}$. Переходя в частичных суммах $\sum\limits_{k=1}^{K} \xi_{n_m k}^p \leqslant 1$ к пределу сначала при $m \to \infty$, а потом при $K \to \infty$, получим, что $x_0 := \{ \alpha_k \} \in l_p$. Но слабая сходимость в l_p эквивалента равномерной ограниченности и покоординатной сходимости [9]. Тем самым $x_{n_m} \xrightarrow{сл} x_0$ при $m \to \infty$.

Теорема 4.1.8. *Банахово пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда X^* рефлексивно.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть X рефлексивно. По теореме Банаха — Алаоглу — Бурбаки шар $B[0,1;X^*]$ *слабо компактен, но в силу рефлексивности X $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$, тем самым шар $B[0,1;X^*]$ слабо компактен.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть X^* рефлексивно. Тогда по предыдущей части доказательства X^{**} рефлексивно. Тогда по утверждению 3.10.3 $[X]$ рефлексивно $\Longrightarrow$ шар $B[0,1;[X]] = [B[0,1;X]]$ слабо компактен в $[X] \Longrightarrow [B[0,1;X]]$ слабо компактен в X^{**}. Но в силу рефлексивности X^{**} $\sigma(X^{**}, X^{***}) = \sigma(X^{**}, X^*)$, поэтому шар $[B[0,1;X]]$ *слабо компактен. Тогда по утверждению 4.1.5 шар $B[0,1;X]$ слабо компактен.

Замечание. Существуют нерефлексивные банаховы пространства X такие, что $X \cong X^{**}$. Соответствующий пример построен в работе [22].

§ 2. Сопряженные линейные операторы

Определения 1. Пусть X, Y — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда $\forall\, y^* \in Y^*$ $\langle A(\cdot),\, y^* \rangle$ есть линейный непрерывный функционал на X. Определим $A^* : Y^* \to X^*$ из соотношения $\forall\, x \in X$ $\forall\, y^* \in Y^*$ $\langle x, A^*y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle$. Оператор A^* называется *сопряженным к* A.

2. $A^{**} := (A^*)^*$

Утверждение 4.2.1. *Пусть X, Y — нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ *и* $||A^*|| = ||A||$.
2. *Если* $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, *то* $\exists\,(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*,Y^*)$ *и* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
3. $\forall\, x \in X$ $A^{**}[x] = [Ax]$.

Теорема 4.2.1. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $A : X \to Y$ линейный. Следующие условия эквивалентны:*

1. $x_n \to x_0 \Longrightarrow Ax_n \xrightarrow{сл} Ax_0$. 2. $x_n \to x_0 \Longrightarrow Ax_n \to Ax_0$.
3. $x_n \xrightarrow{сл} x_0 \Longrightarrow Ax_n \xrightarrow{сл} Ax_0$.

Доказательство. $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$. Предположим, что $A \notin \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда найдется $\{\, x_n \subset X \,\}$: $||x_n|| = 1$ и $||Ax_n|| \to \infty \Longrightarrow x'_n := x_n/\sqrt{||Ax_n||} \to 0 \Longrightarrow Ax'_n \xrightarrow{сл} 0 \Longrightarrow \{\, Ax'_n \,\}$ ограничена. Но $||Ax'_n|| = \sqrt{||Ax_n||} \to \infty$ — противоречие.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$. Пусть $x_n \xrightarrow{сл} x_0$ и $y^* \in Y^*$. Тогда $\langle Ax_n, y^* \rangle = \langle x_n, A^*y^* \rangle \to \langle x_0, A^*y^* \rangle = \langle Ax_n, y^* \rangle$. ■

Теорема 4.2.2. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $A : X \to Y$ линейный, $s(Z)$ — сильная (нормированная) топология в нормированном пространстве Z, а $\sigma(Z)$ — слабая ($\sigma(Z, Z^*)$) топология в Z ($Z \in \{X, Y\}$). Следующие условия эквивалентны:*

1. A — $(s(X), \sigma(Y))$-*непрерывен.*
2. A — $(s(X), s(Y))$-*непрерывен.*
3. A — $(\sigma(X), \sigma(Y))$-*непрерывен.*

Доказательство. $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$. Если A не является $(s(X), s(Y))$-непрерывным, то он и $(s(X), s(Y))$-неограничен, т. е. $A(B[0,1;X])$ — $s(Y)$-неограничено $\overset{(3.9.3)}{\Longrightarrow}$ $A(B[0,1;X])$ — $\sigma(Y)$-неограничено. Но A $(s(X), \sigma(Y))$-непрерывен, поэтому он и $(s(X), \sigma(Y))$-ограничен $\Longrightarrow A(B[0,1;X])$ — $\sigma(Y)$-ограничено — противоречие.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$. Пусть $V \in \omega(0; \sigma(Y, Y^*))$, т. е. $V = \{y \in Y : \max\limits_{i \in \overline{1,n}} |\langle y, y_i^* \rangle| \leqslant \varepsilon\}$. Найдем $U \in \omega(0; \sigma(X, X^*)) = \{x \in X : \max\limits_{j \in \overline{1,m}} |\langle x, x_j^* \rangle| \leqslant \delta\}$ такое, чтобы $A(U) \subset V$. Для этого достаточно взять $m = n$, $x_i = A^*y_i^* \in X^*$ и $\delta = \varepsilon$. ■

Замечание. Таким образом в нормированных пространствах для линейных операторов эквивалентны "определения непрерывности по Коши и по Гейне" не только для пары топологий (s, s), но и для пар (s, σ) и (σ, σ).

Лемма 4.2.1 (лемма о тройке). *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(X,Z)$, $Im\, A = Y$ и $Ker\, A \subset Ker\, B$. Тогда существует $C \in \mathcal{L}(Y,Z)$ такой, что $B = CA$.*

Доказательство. Оператор C определим следующей формулой: $Cy := B(A^{-1}(\{y\}))$.

1. Это определение корректно, так как $A(X) = Y$ и, если $y = Ax_1 = Ax_2$, то $A(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow B(x_1 - x_2) = 0$, тем самым $Bx_1 = Bx_2$.

2. $\forall G \in s(Z) \quad C^{-1}(G) = A(B^{-1}(G))$ и $B^{-1}(G) \in s(X)$ в силу непрерывности B, а $A(B^{-1}(G)) \in s(Y)$ — в силу теоремы Банаха об открытом отображении. ■

Следствие. *Если $Z = \mathbb{P}$, то лемма о тройке справедлива при более слабом условии: $Im\,A$ — подпространство.*

Действительно, сначала лемму о тройке надо применить к пространству $Y_0 := Im\,A$, а потом получившийся линейный непрерывный функционал C продолжить на Y. ■

Теорема 4.2.3. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $(Im\,A)^{\perp} = Ker\,A^*$. 2. ${}^{\perp}(Im\,A^*) = Ker\,A$.

3. ${}^{\perp}(Ker\,A^*) = \overline{Im\,A}$. 4. $(Ker\,A)^{\perp} \supset \overline{Im\,A^*}$.

5. *Если X, Y рефлексивны, то $(Ker\,A)^{\perp} = \overline{Im\,A^*}$.*

6. *Если X, Y — банаховы пространства и $Im\,A$ замкнуто, тогда $(Ker\,A)^{\perp} = Im\,A^*$ и тем самым $Im\,A^*$ тоже замкнуто.*

Доказательство. $\boxed{1}$. $y^* \in (Im\,A)^{\perp} \iff \forall y \in Im\,A \;\langle y, y^* \rangle = 0 \iff \forall x \in X \;\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle = 0 \iff y^* \in Ker\,A^*$.

$\boxed{3}$. ${}^{\perp}(Ker\,A^*) \overset{1}{=} {}^{\perp}((Im\,A)^{\perp}) =$ [утверждения 4.1.3 и 4.1.4.1] $= \overline{Im\,A}$.

$\boxed{4}$. $x^* \in Im\,A^* \Longrightarrow \exists\, y^* \in Y^* : \; x^* = A^* y^* \Longrightarrow \forall x \in Ker\,A$ $\langle x, x^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle = \langle 0, y^* \rangle \Longrightarrow x^* \in (Ker\,A)^{\perp}$. Но по утверждению 4.1.3.1 $(Ker\,A)^{\perp}$ — подпространство.

$\boxed{5}$. $\overline{Im\,A^*} =$ [утверждение 4.1.4.9] $= \left({}^{\perp}(\overline{Im\,A^*})\right)^{\perp} \overset{2}{=} = (Ker\,A)^{\perp}$.

$\boxed{6}$. Пусть $x_0^* \in (Ker\,A)^{\perp}$, тогда $Ker\,A \subset Ker\,x_0^*$. В силу следствия из леммы о тройке (для пространств $X, Y, \mathbb{P}$ и операторов A, x_0^*) $\exists\, y_0^* \in Y^* : \; x_0^* = y_0^* \cdot A$. Но $\forall x \in X \;\langle x, x_0^* \rangle = x_0^*(x) = = y_0^*(Ax) = \langle Ax, y_0^* \rangle = \langle x, A^* y_0^* \rangle. \Longrightarrow x_0^* = A^* y_0^* \in Im\,A^*$. ■

Следствие. Пусть X, Y — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Справедливы следующие утверждения:

1. Если A — инъекция, то A^* — сюръекция.

2. Если A — сюръекция, то A^* — инъекция.
3. Если $\overline{Im\,A^*} = X^*$, то $Ker\,A = \{0\}$.
4. Если $\overline{Im\,A} = Y$, то $Ker\,A^* = \{0\}$.

Утверждение 4.2.2. *Если X, Y — нормированные пространства, $X \cong Y$ и X рефлексивно, то и Y рефлексивно.*

Доказательство. Пусть $A : X \to Y$ — линейная изометрия. Тогда $Im\,A = Y$ — замкнуто и $Ker\,A = \{0\}$. Поэтому по теореме 4.2.3 $Ker\,A^* = \{0\}$ и $Im\,A^* = X^* \Longrightarrow Im\,A^{**} = Y^{**}$. Но в силу рефлексивности X и утверждения 4.2.1.3 получим

$$[Y] = [AX] = A^{**}[X] = A^{**}X^{**} = Y^{**}. \;■$$

Утверждение 4.2.3. *Гильбертово пространство рефлексивно.*

Доказательство. 1. Если гильбертово пространство X сепарабельно, то оно изометрично пространтсву l_2 и в силу утверждений 4.1.10 и 4.2.2 — рефлексивно.

2. Если X не сепарабельно, то взяв последовательность $\{\, x_n \,\} \subset X$: $||x_n|| \leqslant 1$, надо перейти к сепарабельному гильбертову пространству $X_0 := \overline{\langle \{\, x_n \,\} \rangle}$, в которой из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность в смысле пространства X_0. Но тогда эта же подпоследовательность будет и слабо ходиться отностительно исходного пространства, поскольку, если $x^* \in X^*$, то $x^*\big|_{X_0} \in X_0^*$. ■

Определение. Пусть X, Y — нормированные пространства и $A : X \to Y$ линейный оператор. Будем говорить, что *оператор A строго отделен от нуля*, если

$$\exists\, c > 0\, \forall x \in X \;\; ||Ax|| \geqslant c \cdot ||x||. \tag{4.2.1}$$

или, что то же самое, $\inf\limits_{||x||=1} ||Ax|| > 0$.

Утверждение 4.2.4. *Пусть X, Y — нормированные пространства, $A : X \to Y$ линейный оператор и выполнено условие* (4.2.1). *Тогда $A^{-1} \in \mathcal{L}(Im\,A, X)$ и $||A^{-1}|| \leqslant 1/c$.*

Утверждение 4.2.5. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и A строго отделен от нуля. Тогда $Im\,A$ есть банахово пространство и тем самым замкнуто.*

Доказательство. Пусть $Im\,A \supset \{y_n\}$ фундаментальна. Тогда $\exists\{x_n\} \subset X$: $y_n = Ax_n$ и $||x_n - x_m|| \leqslant \leqslant ||y_n - y_m||/c \Longrightarrow \{x_n\}$ фундаментальна $\Longrightarrow \exists\, x_0 \in X$: $x_n \to x_0 \Longrightarrow Ax_n = y_n \to Ax_0 \in Im\,A$. ∎

§ 3. Базисы в банаховом пространстве и дуальные к ним системы

Определение. Пусть X — нормированное пространство. Семейства $\{x_\alpha\} \subset X$, $\{x^*_\alpha\} \subset X^*$ называются *дуальными друг к другу* (а пара $\big(\{x_\alpha\}, \{x^*_\alpha\}\big)$ — *биортогональной*), если $\langle x_\alpha, x^*_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

Утверждение 4.3.1. *Пусть X — нормированное пространство. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $\{x_\alpha\} \subset X$, $\{x^*_\alpha\} \subset X^*$ — дуальные системы, то обе они являются линейно независимыми системами.*
2. *Если $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ линейно независимы, то существует $\{x^*_1, \ldots, x^*_n\} \subset X^*$ дуальная к $\{x_1, \ldots, x_n\}$ система.*
3. *Если $\{x^*_1, \ldots, x^*_n\} \subset X^*$ линейно независимы, то существует $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ дуальная к $\{x^*_1, \ldots, x^*_n\}$ система.*

Доказательство. $\boxed{2}$. Так как $x_1 \notin X := \langle x_2, \ldots, x_n\rangle$, то по следствию 5 из теоремы Хана — Банаха найдется $x^*_1 \in X^*$: $\langle x_1, x^*_1\rangle = 1$, $\langle x_2, x^*_1\rangle = 0, \ldots, \langle x_n, x^*_1\rangle = 0$.

$\boxed{3}$. Это частный случай теоремы 3.2.1.4. ∎

Теорема 4.3.1. *Пусть X — банахово пространство с нормированным базисом $\{e_n\}$. Тогда $||x||_1 := \sup\limits_\nu \Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{\nu} \lambda_k e_k \Big|\Big|$, где*

$x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$, есть норма на линейном пространстве X, и пространство $\langle X, ||\cdot||_1\rangle$ банахово.

Доказательство. Пусть $P_l\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k\Big) := \sum\limits_{k=1}^{l} \lambda_k e_k$.

1. $\forall\, l \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in X\ \ ||P_l x|| \leqslant ||x||_1 \Longrightarrow ||x|| = \lim\limits_{l\to\infty} ||P_l x|| \leqslant \leqslant ||x||_1$ и $\forall\, p, l \in \mathbb{N}\ \ ||(P_p - P_l)x|| \leqslant 2||x||_1$.

2. Пусть $\{x_n = \{\lambda_{n,k}\}\}$ фундаментальная последовательность относительно нормы $||\cdot||_1$. Так как $\forall\, k > 2\ |\lambda_{n,k} - \lambda_{m,k}| = = ||(P_k - P_{k-1})(x_n - x_m)|| \overset{1}{\leqslant} 2||x_n - x_m||_1$, то $\{\lambda_{n,k}\}$ фундаментальна при любом k. Поэтому $\exists\{\lambda_{0,k}\}\,\forall\, k \in \mathbb{N}\ \lambda_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_{0,k}$.

3. Поскольку при $n, m > N(\varepsilon) := N_{\text{фундамент.}}(\varepsilon)$ и любых $p \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$ $\Big|\Big| \sum\limits_{k=l+1}^{l+p} \lambda_{n,k} e_k - \sum\limits_{k=l+1}^{l+p} \lambda_{m,k} e_k \Big|\Big| = = ||(P_{l+p} - P_l)(x_n - x_m)|| \leqslant 2||x_n - x_m||_1 < 2\varepsilon$, то при переходе к пределу при $m \to \infty$ получим $\forall\, p, l \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N(\varepsilon)$ $\Big|\Big| \sum\limits_{k=l+1}^{l+p} \lambda_{n,k} e_k - \sum\limits_{k=l+1}^{l+p} \lambda_{0,k} e_k \Big|\Big| \leqslant 2\varepsilon$.

4. Тогда $\forall\, p, l \in \mathbb{N}\,\forall\, n > N(\varepsilon)$ $\Big|\Big| \sum\limits_{k=l+1}^{l+p} \lambda_{0,k} e_k \Big|\Big| \overset{3}{\leqslant} 2\varepsilon + + \Big|\Big| \sum\limits_{k=l+1}^{l+p} \lambda_{n,k} e_k \Big|\Big|$. При фиксированном n последнее слагаемое стремится к нулю при $l, p \to \infty$, поскольку $\sum\limits_{k=1}^{l} \lambda_{n,k} e_k \xrightarrow[l\to\infty]{} x_n$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_{0,k} e_k$ сходится к некоторому x_0 в смысле нормы $||\cdot||$.

5. Поскольку $\forall\, l \in \mathbb{N}\,\forall\, n > N(\varepsilon)$ $||P_l(x_n - x_0)|| = = \Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{l} \lambda_{n,k} e_k - \sum\limits_{k=1}^{l} \lambda_{0,k} e_k \Big|\Big| \overset{3}{\leqslant} 2\varepsilon$, то и $\forall\, n > N(\varepsilon)$ $||x_n - x_0||_1 = = \sup\limits_l ||P_l(x_n - x_0)|| \leqslant 2\varepsilon$, т. е. $x_n \to x_0$ относительно $||\cdot||_1$. ∎

Следствие. *В условиях предыдущей теоремы нормы $||\cdot||$ и*

$||\cdot||_1$ *эквивалентны, а функционалы* e_n^**, определенные формулой*

$$\Big\langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k, e_n^* \Big\rangle = \lambda_n, \tag{4.3.1}$$

непрерывны.

Доказательство. Пусть I — тождественное отображение X на X. Поскольку $||Ix|| = ||x|| \leqslant ||x||_1$, то I — непрерывная биекция банахова пространства $\langle X, ||\cdot||_1\rangle$ на банахово пространство $\langle X, ||\cdot||\rangle$. По теореме Банаха о непрерывности обратного оператора I^{-1} тоже непрерывен, т. е.

$$\exists C > 0 \,\forall x \in X \;\; ||x||_1 = ||I^{-1}x||_1 \leqslant C||x||.$$

Наконец $|\langle x, e_n^*\rangle| = ||(P_n - P_{n-1})x|| \leqslant 2||x||_1 \leqslant 2C||x||.$ ∎

Теорема 4.3.2. *Пусть* X *— банахово пространство с базисом* $\{e_n\}$*. Тогда* $\{e_n^*\} \subset X^*$*, где* e_n^* *определены по формуле* (4.3.1)*, есть дуальная к нему система, и* $\{e_n^*\}$ *— базис в банаховом пространстве* $X_0^* := \overline{\langle\{e_n^*\}\rangle}$*. При этом*

$$\forall x_0^* \in X_0^* \;\; x_0^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x_0^*\rangle e_k^*.$$

Доказательство. 1. Пусть $P_n x := \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k^*\rangle e_k$. Так как $\{e_n\}$ — базис, то $\forall x \in X \;\; P_n x \to x$, и по теореме Банаха — Штейнгауза $\{||P_n||\}$ ограничена некоторой константой $K > 0$. Но $\forall x \in X \,\forall x^* \in X^* \;\; \langle P_n x, x^*\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k^*\rangle \cdot \langle e_k, x^*\rangle \implies P_n^* x^* = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle e_k, x^*\rangle e_k^*$. Так как $||P_n^*|| = ||P_n||$, то $\{||P_n^*||\}$ ограничена этой же константой K.

2. Пусть $X_1^* := \{x^* \in X^* : \{P_n^* x^*\}$ сходится$\}$. Тогда X_1^* — линейное многообразие и $\forall k \in \mathbb{N} \;\; e_k^* \in X_1^*$. Поскольку $\forall x \in X \,\forall x^* \in X^* \;\; \langle x, P_n^* x^*\rangle = \langle P_n x, x^*\rangle \to \langle x, x^*\rangle$, то $P_n^* x^* \xrightarrow{*сл} x^*$. Поэтому $\forall x^* \in X_1^* \;\; P_n^* x^* = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle e_k, x^*\rangle e_k^* \to \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x^*\rangle e_k^* = x^*$, т. е. $\{e_n^*\}$ — базис в X_1^*.

3. Покажем, что X_1^* замкнуто в X^*.

Если $X_1^* \ni x_m^* \to x_0^*$, то $||P_n^* x_0^* - P_l^* x_0^*|| \leqslant ||P_n^*(x_0^* - x_m^*)|| + + ||P_n^* x_m^* - P_l^* x_m^*|| + ||P_l^*(x_m^* - x_0^*)|| \leqslant 2K||x_0^* - x_m^*|| + + ||P_n^* x_m^* - P_l^* x_m^*||$, т. е. $\{P_n^* x_0^*\}$ фундаментальна и, тем самым, сходится к x_0^*.

4. Так как $\forall k \in \mathbb{N} \;\; e_k^* \in X_1^*$, то $X_0^* \subset X_1^*$. Но $\forall x_1^* \in X_1^*$ $P_n^* x_1^* \to x_1^*$ и $\{P_n^* x_1^*\} \subset X_0^*$, поэтому $x_1^* \in X_0^*$. ∎

Следствие. *Если* X *— рефлексивное пространство с базисом* $\{e_n\}$*, а* $\{e_n^*\}$ *— дуальная к нему система, то* $\{e_n^*\}$ *— базис в* X^**.*

Доказательство. Предположим противное: $X_0^* \neq X^*$. Тогда по следствию 5 из теоремы Хана — Банаха $\exists x_0^{**} \in X^{**}$: $x_0^{**} \neq 0$ и $X_0^* \subset Ker\, x_0^{**}$. В силу рефлексивности X найдется $x_0 :\; x_0^{**} = [x_0]$. Тогда в силу того, что $\forall k \in \mathbb{N} \;\; e_k^* \in X_0^*$, справедливы равенства $0 = \langle e_k^*, x_0^{**}\rangle = \langle e_k^*, [x_0]\rangle = \langle x_0, e_k^*\rangle$. Поэтому $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x_0, e_k^*\rangle e_k = 0$, т. е. $x_0^{**} = 0$, что противоречит выбору x_0^{**}. ∎

§ 4. Компактные операторы

Определения. Пусть X, Y – нормированные пространства.

1. Оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если

$$\forall M \subset X \;\; (M \text{ ограничено} \implies A(M) \text{ предкомпактно}).$$

2. Непрерывный компактный оператор называется *вполне непрерывным.*

Замечания

1. Поскольку всякий компактный оператор ограничен, то для линейных операторов понятие компактный и вполне непрерывный совпадают.

2. Для линейного оператора $A : X \to Y$ компактность эквивалентна предкомпактности множества $A(B[0,1])$.

Определение. Множество всех линейных компактных операторов из X в Y обозначают $comp\,\mathcal{L}(X,Y)$.

Утверждение 4.4.1. *Пусть X, Y – нормированные пространства. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $dim(X) < +\infty$, то $comp\,\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.*
2. *Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $dim(Im\,A) < +\infty$, то $A \in comp\,\mathcal{L}(X,Y)$.*

Определение. Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ называется *конечномерным*, если $dim(Im\,A) < +\infty$.

Пример 4.4.1. Если X бесконечномерное нормированное пространство, то тождественный оператор не компактен.

Утверждение 4.4.2. *Пусть X, Y – нормированные пространства. Если $A \in comp\,\mathcal{L}(X,Y)$, то A секвенциально непрерывен относительно пары $(\sigma(X), s(Y))$, то есть $(x_n \xrightarrow{сл} x_0 \Longrightarrow Ax_n \to Ax_0)$.*

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{сл} x_0$. Поскольку $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то в силу теоремы 4.2.1 $Ax_n \xrightarrow{сл} Ax_0$.

Предположим, что $Ax_n \not\to Ax_0$. Тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0\, \exists \{\, x_{n_k^{(1)}} \,\} : ||Ax_{n_k^{(1)}} - Ax_0|| \geqslant \varepsilon_0 \tag{4.4.1}$$

Но $\{\, Ax_{n_k^{(1)}} \,\}$ предкомпактно, поэтому $\exists y_0 \in Y\, \exists \{\, x_{n_k^{(2)}} \,\}$: $Ax_{n_k^{(2)}} \to y_0$. Так как $Ax_n \xrightarrow{сл} Ax_0$, то $y_0 = Ax_0$, что противоречит неравенству из (4.4.1). ■

Теорема 4.4.1. *Пусть X — рефлексивное пространство (в частности, гильбертово пространство), Y — нормированное пространство, а $A : X \to Y$ — линейный оператор. Тогда*

$$A \in comp\,\mathcal{L}(X,Y) \Longleftrightarrow (x_n \xrightarrow{сл} x_0 \Longrightarrow Ax_n \to Ax_0).$$

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $\{\, y_n \,\} \subset A(B[0,1])$.

Тогда $\exists \{\, x_n \,\} \subset B[0,1]$: $y_n = Ax_n$. Но в силу теоремы 4.1.7 $B[0,1]$ слабо секвенциально компактно. Поэтому $\exists x_0 \in B[0,1]\, \exists \{\, x_{n_k} \,\}$: $x_{n_k} \xrightarrow{сл} x_0 \Longrightarrow y_{n_k} = Ax_{n_k} \to y_0 = Ax_0$. ■

Следствие. *Пусть X рефлексивное пространство, Y — нормированное пространство, множество $M \subset X$, M — ограничено, выпукло и замкнуто, а $A \in comp\,\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда $A(M)$ — компактно.*

Замечание. Компактный оператор $A \in comp\,\mathcal{L}(X,Y)$ может не быть $(\sigma(X), s(Y))$-непрерывным.

Утверждение 4.4.3. *Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный оператор $A : X \to Y$ $(\sigma(X), s(Y))$-непрерывен тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и A — конечномерный.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что A $(\sigma(X), s(Y))$-непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен хотя бы на одной $\sigma(X)$-окрестности нуля.

$\boxed{\Longrightarrow}$. Поскольку $\sigma(X) \subset s(X)$, то из $(\sigma(X), s(Y))$-непрерывности следует и $(s(X), s(Y))$-непрерывность. Далее, пусть A ограничен на $U = U(\varepsilon; e_1^*, \ldots, e_n^*) := \{x \in X : \max\limits_{j \in \overline{1,n}} |\langle x, e_j^* \rangle| \leqslant \varepsilon\}$, где $X^* \supset \{\, e_1^*, \ldots, e_n^* \,\}$ — линейно независимы. Тогда по теореме 3.2.1 найдутся $\{\, e_1, \ldots, e_n \,\} \subset X$: $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$ при этом $X = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \oplus X_1$ и $X_1 := \bigcap\limits_{j=1}^{n} Ker\, e_j^*$.

Поскольку $AU = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + AX_1 : \forall\, i \in \overline{1,n}\ |\lambda_i| \leqslant \varepsilon \right\}$, то AX_1 ограничено $\Longrightarrow AX_1 = \{0\} \Longrightarrow dim(Im\,A) \leqslant n$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $Im\,A = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$, где $Y \supset \{\, g_1, \ldots, g_n \,\}$ — линейно независимы. Найдем $\{\, e_1, \ldots, e_n \,\} \subset X$: $\forall\, i \in \overline{1,n}$ $Ae_i = g_i$. Тогда $\{\, e_1, \ldots, e_n \,\}$ линейно независимы и $X = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \oplus Ker\,A$, а $Ker\,A$ подпространство. Определим

$e_j^* \in X^*$ следующим образом $\langle \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \widetilde{x}, e_j^* \rangle := \lambda_j$ для любого $\widetilde{x} \in Ker\, A$. Тогда $Ker\, A = \bigcap\limits_{j=1}^{n} Ker\, e_j^*$. Тем самым, A ограничен на $U(1; e_1^*, \dots, e_n^*)$. ■

Утверждение 4.4.4. *Пусть X и Y — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Если $dim(Im\, A) = n$, то и $dim(Im\, A^*) = n$.*

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущего утверждения по базису $\{g_1, \dots, g_n\}$ пространства $Im\, A$ построим линейно независимые вектора $\{e_1, \dots, e_n\}$ и функционалы $\{e_1^*, \dots, e_n^*\} \subset X^*$, такие, что $\forall\, i,j \in \overline{1,n}$ $Ae_i = g_i$, $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$ и $Ker\, A = \bigcap\limits_{j=1}^{n} Ker\, e_j^*$. Тогда $\forall\, x \in X$ $Ax = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i^* \rangle e_i \Longrightarrow \forall\, y^* \in Y^*$ $A^* y^* = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle e_i, y^* \rangle e_i^*$. ■

Теорема 4.4.2. *Пусть X – нормированное пространство, Y — банахово пространство, $\{A_n\} \subset comp\, \mathcal{L}(X,Y)$ и $A_n \to A_0$ в нормированном пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда $A_0 \in comp\, \mathcal{L}(X,Y)$, т. е. $comp\, \mathcal{L}(X,Y)$ — подпространство нормированного пространства $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Утверждение 4.4.5. *Пусть X, Y, Z, W – нормированные пространства, $A \in comp\, \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(W,X)$ и $C \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Тогда $AB \in comp\, \mathcal{L}(W,Y)$ и $CA \in comp\, \mathcal{L}(X,Z)$.*

Следствие. *Пусть X – бесконечномерное нормированное пространство, а Y – нормированное пространство. Если A из $comp\, \mathcal{L}(X,Y)$ и $Ker\, A = \{0\}$, то A^{-1} неограниченный линейный оператор.*

Теорема 4.4.3 (Шаудер). *Пусть X, Y – банаховы пространства и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда $(A \in comp\, \mathcal{L}(X,Y)) \Longleftrightarrow (A^* \in comp\, \mathcal{L}(Y^*, X^*))$.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $\{y_n^*\} \subset B_{Y^*}[0,1]$ и $x_n^* = A^* y_n^*$.

1. Рассмотрим $\widetilde{y}_n^*$ – сужение y_n^* на $Y_0 := \overline{A(B_X[0,1])}$ – компактное в Y множество. Покажем с помощью теоремы Арцела-Асколи (см., например, [3, теорема 1.8.2]), что $\{\widetilde{y}_n^*\}$ предкомпактно в $C(Y_0)$. Действительно, $\forall\, y \in Y_0$ $|\widetilde{y}_n^*(y)| = |\langle y, y_n^* \rangle| \leqslant \leqslant ||y|| \cdot ||y_n^*|| \leqslant ||A|| \Longrightarrow \{\widetilde{y}_n^*\}$ – равномерно ограничено. Далее, $\forall\, y_1, y_2 \in Y_0$ $|\widetilde{y}_n^*(y_1) - \widetilde{y}_n^*(y_2)| = |\langle y_1 - y_2, y_n^* \rangle| \leqslant ||y_1 - y_2|| \Longrightarrow \{\widetilde{y}_n^*\}$ – равностепенно непрерывно.

2. Пусть $\{\widetilde{y}_{n_k}^*\}$ – сходящаяся в $C(Y_0)$ подпоследовательность последовательности $\{\widetilde{y}_n^*\}$. Тогда $\rho_{Y_0}(\widetilde{y}_{n_k}^*, \widetilde{y}_{n_l}^*) = \max\limits_{y \in Y_0} |\widetilde{y}_{n_k}^*(y) - \widetilde{y}_{n_l}^*(y)| = \max\limits_{y \in Y_0} |\langle y, y_{n_k}^* - y_{n_l}^* \rangle| \geqslant \geqslant \sup\limits_{y \in A(B_X[0,1])} |\langle y, y_{n_k}^* - y_{n_l}^* \rangle| = \sup\limits_{||x|| \le 1} |\langle x, A^*(y_{n_k}^* - y_{n_l}^*) \rangle| = = ||A^* y_{n_k}^* - A^* y_{n_l}^*|| = ||x_{n_k}^* - x_{n_l}^*||$ и, следовательно, $\{x_{n_k}^*\}$ фундаментальна в полном метрическом пространстве X^*.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $A^* \in comp\, \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Тогда по предыдущему $A^{**} \in comp\, \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**}) \Longrightarrow A^{**}([B_X[0,1]]) = [A(B_X[0,1])]$ предкомпактно в Y^{**}. Покажем, что если $[Y_1]$ предкомпактно в Y^{**}, то и Y_1 предкомпактно в Y.

Пусть $\{y_n\} \subset Y_1 \Longrightarrow \exists \{[y_{n_k}]\}$, сходящаяся в Y^{**} $\Longrightarrow \{[y_{n_k}]\}$ фундаментальна в $Y^{**} \Longrightarrow \{y_{n_k}\}$ фундаментальна в банаховом пространстве $Y \Longrightarrow \{y_{n_k}\}$ сходится в Y. Таким образом, $A(B_X[0,1])$ предкомпактно в Y. ■

Теорема 4.4.4. *Если X – банахово пространство, а $A \in comp\, \mathcal{L}(X)$, то $\forall\, \delta > 0$ $\sum\limits_{|\lambda| \ge \delta} dim(Ker\,(A - \lambda I)) < +\infty$.*

Следствие. *Пусть X – банахово пространство, а $A \in comp\, \mathcal{L}(X)$ Справедливы следующие утверждения:*

1. У компактного оператора A не более чем конечное число собственных значений λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| \geqslant \delta > 0$, и кратность каждого собственного значения конечна.

2. *У компактного оператора A не более чем счетное число собственных значений, и их можно занумеровать (с учетом их кратности) в невозрастающем порядке модулей.*

Теорема 4.4.5. *Если X – банахово пространство, $A \in comp\,\mathcal{L}(X)$ и $\lambda \neq 0$, то $Im\,(A - \lambda I)$ замкнуто, то есть является подпространством банахова пространства X.*

Теорема 4.4.6. *Пусть X – банахово пространство, $A \in comp\,\mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \sigma(A)$ и $\lambda \neq 0$. Тогда $\lambda \in \sigma_d(A)$.*

Следствие. *Если X – бесконечномерное банахово пространство и $A \in comp\,\mathcal{L}(X)$, то $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \{0\}$.*

Утверждение 4.4.6. *Если X – банахово пространство, $A \in comp\,\mathcal{L}(X)$ и $\lambda \neq 0$, то $(Ker\,(A - \lambda I) = \{0\}) \Longleftrightarrow (Im\,(A - \lambda I) = X)$.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Если $Ker\,(A - \lambda I) = \{0\}$, то $\lambda \notin \sigma(A)$, поэтому $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ и, тем самым, $Im\,(A - \lambda I) = X$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $Im\,(A - \lambda I) = X$. Тогда $Ker\,(A^* - \lambda I) = Ker\,(A - \lambda I)^* \overset{\text{теор. 4.2.3.1}}{=} (Im\,(A - \lambda I))^\perp = X^\perp = \{0\}$, тем самым, $\lambda \notin \sigma_d(A^*)$. Но $A^* \in comp\,\mathcal{L}(X^*)$ поэтому $\lambda \in \rho(A^*)$. Тогда $Im\,(A^* - \lambda I) = X^*$ и $\{0\} = {}^\perp X^* = {}^\perp(Im\,(A^* - \lambda I)) =$ [теорема 4.2.3.2] $= Ker\,(A - \lambda I)$. ■

Следствие. *Пусть $A \in comp\,\mathcal{L}(X)$, X – банахово пространство и $\lambda \neq 0$. Тогда для оператора $\mathcal{A} := A - \lambda I$ справедлива* альтернатива Фредгольма: *либо уравнение $\mathcal{A}x = y$ разрешимо (и при этом единственным образом) при любом $y \in X$, либо соответствующее однородное уранение $\mathcal{A}x = 0$ имеет ненулевое решение.*

Теорема 4.4.7 (первая теорема Фредгольма). *Пусть X — банахово пространство и $A \in comp\,\mathcal{L}(X)$. Следующие условия эквивалентны:*

1. $Im\,(I - A) = X$. 2. $Ker\,(I - A) = \{0\}$.
3. $Im\,(I - A^*) = X^*$. 4. $Ker\,(I - A^*) = \{0\}$.

Действительно, это следует из теоремы 4.2.3 и утверждения 4.4.6. ■

Теорема 4.4.8 (вторая теорема Фредгольма). *Пусть X — банахово пространство и $A \in comp\,\mathcal{L}(X)$. Тогда*

$$dim(Ker\,(I - A)) = dim(Ker\,(I - A^*)).$$

Доказательство. Конечномерность подпространств $Ker\,(I - A)$ и $Ker\,(I - A^*)$ уже доказана (см. теорему 4.4.4).

1. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — нормированный базис подпространства $Ker\,(I - A)$, $\{e_1^*, \dots, e_m^*\}$ — нормированный базис $Ker\,(I - A^*)$, а $\{\widetilde{e}_1^*, \dots, \widetilde{e}_n^*\}$ и $\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_m\}$ — дуальные к $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{e_1^*, \dots, e_m^*\}$ системы соответственно, т. е. $\langle e_k, \widetilde{e}_l^*\rangle = \delta_{kl}$ и $\langle \widetilde{e}_k, e_l^*\rangle = \delta_{kl}$.

Предположим, что $n < m$. Рассмотрим операторы

$$\widetilde{A}x := \sum_{k=1}^{n} \langle x, \widetilde{e}_k^*\rangle \widetilde{e}_k \quad \text{и} \quad \widehat{A} := A + \widetilde{A}.$$

Оба оператора компактны, так как $\widetilde{A}$ конечномерный, а $\widehat{A}$ — сумма компактных операторов.

2. Пусть $x_0 \in Ker\,(I - \widehat{A})$. Тогда $(I - A)x_0 = \widetilde{A}x_0$. Поскольку для $j \in \overline{1,n}$ $\langle (I - A)x_0, e_j^*\rangle = \langle x_0, (I - A^*)e_j^*\rangle = \langle x_0, 0\rangle = 0$ и $\langle (I - A)x_0, e_j^*\rangle = \langle \widetilde{A}x_0, e_j^*\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_0, \widetilde{e}_k^*\rangle \cdot \langle \widetilde{e}_k, e_j^*\rangle = \langle x_0, \widetilde{e}_j^*\rangle$, то

$$\forall\, j \in \overline{1,n}\ \langle x_0, \widetilde{e}_j^*\rangle = 0. \tag{4.4.2}$$

Поэтому $\widetilde{A}x_0 = 0$. Таким образом, $x_0 \in Ker\,(I - A)$, и его можно представить в виде $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Тогда $\lambda_k = \langle x_0, \widetilde{e}_k^*\rangle \overset{(4.4.2)}{=} 0$, т. е. $x_0 = 0$. Итак,

$$Ker\,(I - \widehat{A}) = \{0\}. \tag{4.4.3}$$

3. Поскольку $(I-\widehat{A})^* = ((I-A)-\widetilde{A})^* = (I-A^*)-\widetilde{A}^*$, то

$$\forall\, x \in X \;\; \langle x, (I-\widehat{A})^* e_m^* \rangle = \langle x, (I-A^*)e_m^* - \widetilde{A}^* e_m^* \rangle \; =$$

$$= -\langle x, \widetilde{A}^* e_m^* \rangle = -\langle \widetilde{A}x, e_m^* \rangle \; = -\sum_{k=1}^{n} \langle x, \widetilde{e}_k^* \rangle \cdot \langle \widetilde{e}_k, e_m^* \rangle \overset{m \geq n}{=} 0.$$

Поэтому $(I-\widehat{A})^* e_m^* = 0$, т. е. $e_m^* \in Ker\,(I-\widehat{A}^*)$, что в силу первой теоремы Фредгольма противоречит (4.4.3).

4. Таким образом, $dim(Ker\,(I-A)) \geqslant dim(Ker\,(I-A^*))$, поэтому и $dim(Ker\,(I-A^*)) \geqslant dim(Ker\,(I-A^{**}))$.

Но $dim(Ker\,(I-A^{**})) \geqslant dim(Ker\,(I-A))$ в силу утверждения 4.2.1.3, тем самым $dim(Ker\,(I-A)) = dim(Ker\,(I-A^*))$. ∎

Теорема 4.4.9 (третья теорема Фредгольма). *Пусть X — банахово пространство и $A \in comp\,\mathcal{L}(X)$. Тогда $Im\,(I-A) = {}^{\perp}(Ker\,(I-A^*))$ и $Im\,(I-A^*) = (Ker\,(I-A))^{\perp}$.*

Действительно, это следует из теорем 4.2.3 и 4.4.5. ∎

§ 5. Линейные операторы в гильбертовых пространствах

В этом разделе все пространства гильбертовы, а A^* — эрмитово сопряженный к A оператор.

Утверждение 4.5.1. *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, $A^{**} = A$.
2. $(Im\,A)^{\perp} = Ker\,A^*$, $(Ker\,A)^{\perp} = \overline{Im\,A^*}$.
3. *Если $Im\,A$ — подпространство, то $(Ker\,A)^{\perp} = Im\,A^*$.*

Утверждение 4.5.2. *Пусть H — гильбертово пространство и $A \in \mathcal{L}(H)$. Тогда $H = Ker\,A \oplus \overline{Im\,A^*} = Ker\,A^* \oplus \overline{Im\,A}$.*

Определение. Пусть H — гильбертово пространство. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, т. е. $\forall\, x, y \in H \;\; (Ax,\, y) = (x, Ay)$.

Теорема 4.5.1. *Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Если $A \in \mathcal{L}(H)$ и $A^* = A$, то $\forall\, x \in H \;\; (Ax, x) \in \mathbb{R}$ и $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\beta \neq 0$.

1. Покажем, что $Ker\,(A-\lambda I) = \{0\}$. Если $(A-\lambda I)x_0 = 0$, то $Ax_0 = \lambda x_0$. Тогда $\lambda ||x_0||^2 = (\lambda x_0, x_0) = (Ax_0, x_0) = (x_0, Ax_0) = (x_0, \lambda x_0) = \overline{\lambda} ||x_0||^2$. Поэтому $x_0 = 0$.

2. Покажем, что $Im\,(A-\lambda I)$ замкнуто.

$$\forall\, x \in H \;\; ||(A-\lambda I)x||^2 = ((A-\lambda I)x, (A-\lambda I)x) \; =$$
$$= ||(A-\alpha I)x||^2 + ||i\beta x||^2 - ((A-\alpha I)x, i\beta x) - (i\beta x, (A-\alpha I)x) \; =$$
$$= \; ||(A-\alpha I)x||^2 + ||i\beta x||^2 \geqslant \beta^2 ||x||^2.$$

Итак, $\forall\, x \in H \;\; ||(A-\lambda I)x|| \geqslant |\beta| \cdot ||x||$, поэтому в силу утверждения 4.2.5 $Im\,(A-\lambda I)$ замкнуто.

3. Поскольку $\overline{\lambda} \notin \mathbb{R}$, то $H = Ker\,(A-\overline{\lambda} I) \oplus \overline{Im\,(A^*-\overline{\lambda} I)^*} = Im\,(A-\lambda I)$, т. е. $Im\,(A-\lambda I) = H$. Таким образом, $(A-\lambda I)$ — непрерывная линейная биекция H на H. Поэтому по теореме Банаха об обратном отображении $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, т. е. $\lambda \in \rho(A)$. ∎

Следствие. *Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$, $A^* = A$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $e_1 \perp e_2$.*

Утверждение 4.5.3. *Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Если $A \in \mathcal{L}(H)$ и $\forall\, x \in H \;\; (Ax, x) \in \mathbb{R}$, то $A^* = A$.*

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\big(A(x+y), x+y\big) = (Ax, x) + (Ax, y) + \overline{(x, Ay)} + (Ay, y) \in \mathbb{R} \implies$$

$$\mathfrak{Im}\left((Ax,y)+\overline{(x,Ay)}\right)=\mathfrak{Im}\,(Ax,y)-\mathfrak{Im}\,(x,Ay)=0.$$

Аналогично, $\big(A(x+iy),x+iy\big)=(Ax,x)-i(Ax,y)+i\overline{(x,Ay)}+$ $+(Aiy,iy)\in\mathbb{R}\Longrightarrow\mathfrak{Im}\,\big(-i(Ax,y)+i\overline{(x,Ay)}\big)=\mathfrak{Re}\,(Ax,y)-$ $-\mathfrak{Re}\,(x,Ay)=0.$ ■

Теорема 4.5.2 (о норме самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве). *Пусть H — гильбертово пространство. Если $A\in\mathcal{L}(H)$ и $A^*=A$, то $||A||=\sup\limits_{||x||=1}|(Ax,x)|$.*

Доказательство. 1. В силу неравенства Коши — Буняковского и определения нормы линейного оператора

$$\alpha:=\sup_{||x||=1}|(Ax,x)|\leqslant\sup_{||x||=1}(||Ax||\cdot||x||)\leqslant||A||.$$

2. Пусть $x\neq0$, тогда $|(Ax,x)|\leqslant\alpha||x||^2$.

3. В силу равенства

$$\big(A(x+y),x+y\big)-\big(A(x-y),x-y\big)=4\mathfrak{Re}\,(Ax,y)$$

из п. 2 получим, что

$$4|\mathfrak{Re}\,(Ax,y)|\leqslant\alpha||x+y||^2+\alpha||x-y||^2=2\alpha\big(||x||^2+||y||^2\big).$$

Взяв $||x||=1$: $Ax\neq0$ и $y=Ax/||Ax||$, из этого неравенства получим

$$4\mathfrak{Re}\,\big(Ax,Ax/||Ax||\big)=4||Ax||\leqslant4\alpha\Longrightarrow||Ax||\leqslant\alpha\Longrightarrow||A||\leqslant\alpha \quad ■$$

Следствие. *Пусть H — гильбертово пространство. Если $A,B\in\mathcal{L}(H)$, $A^*=A$, $B^*=B$ и $\forall\,x\in H\ (Ax,x)=(Bx,x)$, то $A=B$.*

Утверждение 4.5.4. *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $A\in\mathcal{L}(H_1,H_2)$. Тогда $||A||^2=||A^*A||$.*

Утверждение 4.5.5. *Пусть H — гильбертово пространство, $A\in\mathcal{L}(H)$ и $A^*=A$. Тогда $\big(\exists\,A^{-1}\in\mathcal{L}(H)\big)\Longleftrightarrow\big(A$ — строго отделен от нуля (см. (4.2.1)$\big)$.*

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. $Ker\,A=\{0\}$ и по утверждению 4.2.5 $Im\,A$ — подпространство. Поэтому в силу утверждения 4.5.1 $Im\,A=(Ker\,A^*)^\perp=(Ker\,A)^\perp=H$ и, тем самым, по теореме Банаха об обратном отображении $A^{-1}\in\mathcal{L}(H)$. ■

Определение. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Оператор $A\in\mathcal{L}(H)$ называется неотрицательным, что обозначается $A\geqslant0$, если $\forall\,x\in H\ (Ax,x)\geqslant0$.

Замечание. Отметим, что в силу утверждения 4.5.3 неотрицательный линейный оператор в гильбертовом пространстве над полем $\mathbb{C}$ самосопряжен.

Определение. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$. Оператор $A\in\mathcal{L}(H)$ называется неотрицательным, что обозначается $A\geqslant0$, если $A=A^*$ и $\forall\,x\in H\ (Ax,x)\geqslant0$.

Теорема 4.5.3. *Пусть H — гильбертово пространство, $A\in\mathcal{L}(H)$, $A=A^*$ и $\alpha(A):=\inf\limits_{||x||=1}(Ax,x)$, $\beta(A):=\sup\limits_{||x||=1}(Ax,x)$. Тогда*

$$\{\alpha(A),\beta(A)\}\subset\sigma(A)\subset[\alpha(A),\beta(A)]\ \text{и}$$
$$||A||=\max\{|\alpha(A)|,|\beta(A)|\}.$$

Доказательство. 1. Пусть $A_\alpha:=A-\alpha I$, где $\alpha:=\alpha(A)$. Тогда $A_\alpha\geqslant0$ и по теореме 4.5.2 $||A_\alpha||=\beta-\alpha\Longrightarrow\exists\,\{\,x_n\,\}\subset H:$ $||x_n||=1$ и $(A_\alpha x_n,x_n)\to||A_\alpha||\Longrightarrow$

$$0\leqslant||(A_\alpha-||A_\alpha||I)x_n||^2=$$
$$=||Ax_n||^2+||A_\alpha||^2||x_n||^2-2||A_\alpha||(A_\alpha x_n,x_n)\leqslant$$
$$\leqslant2||A_\alpha||^2-2||A_\alpha||(A_\alpha x_n,x_n)\to0.$$

В силу утверждения 4.5.5 $||A_\alpha||=(\beta-\alpha)\in\sigma(A_\alpha)=$ $=\sigma(A)-\alpha\Longrightarrow\beta\in\sigma(A)$.

2. Пусть $A_\beta:=\beta I-A$, где $\beta:=\beta(A)$. Тогда $A_\beta\geqslant0$ и по теореме 4.5.5 $||A_\beta||=\beta-\alpha\stackrel{1}{\Longrightarrow}(\beta-\alpha)\in\sigma(A_\beta)=$ $=\beta-\sigma(A)\Longrightarrow\alpha\in\sigma(A)$.

3. Пусть $\lambda > \beta(A)$. Тогда $A_\beta := \beta I - A \geqslant 0 \Longrightarrow$ $||(\lambda I - A)x||^2 = ||A_\beta x + (\lambda - \beta)x||^2 = ||A_\beta x||^2 + (\lambda-\beta)^2||x||^2 +$ $+ 2(\lambda-\beta)(A_\beta x, x) \geqslant (\lambda-\beta)^2||x||^2$, т. е. $(A - \lambda I)$ строго отделен от нуля $\stackrel{\text{утв.4.5.5}}{\Longrightarrow} \lambda \in \rho(A)$.

Аналогично рассматривается случай $\lambda < \alpha(A)$. ■

Утверждение 4.5.6. *Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$ и $A = A^*$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $(A \geqslant 0) \Longleftrightarrow \big(\sigma(A) \subset [0; +\infty)\big)$.
2. *Если* $\sigma(A) \subset [\alpha; +\infty)$ *и* $\alpha > 0$, *то* $||A^{-1}|| \leqslant 1/\alpha$.

Доказательство. $\boxed{2}$. В силу условия $\alpha(A) \geqslant \alpha$. Пусть $A_\alpha := A - \alpha I \geqslant 0$. Тогда $||Ax||^2 = ||A_\alpha x + \alpha x||^2 = ||A_\alpha x||^2 +$ $+ \alpha^2||x||^2 + 2(A_\alpha x, x) \geqslant \alpha^2||x||^2$. ■

Теорема 4.5.4 (норма компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве). *Пусть H — гильбертово пространство и $A^* = A$. Если $A \in comp\,\mathcal{L}(H)$, то $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}\, \exists\, x_0 \neq 0$ $(Ax_0 = \lambda x_0 \wedge |\lambda| = ||A||)$, т. е.* $||A|| = \max|\sigma_d(A)|$.

Теорема 4.5.5 (Гильберт — Шмидт). *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $A \in comp\,\mathcal{L}(H)$ и $A^* = A$. Тогда существует ортонормированный базис пространства H, состоящий из собственных векторов оператора A.*

§ 6. Понятие регуляризующего алгоритма

Пусть X и Y — нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $Ker\, A = \{0\}$, но $A^{-1} \notin \mathcal{L}(Y, X)$. Рассмотрим задачу нахождении приближения к решению уравнения $Ax = y$ по приближенно заданным исходным данным. А именно: пусть известно, что

точные исходные данные $y_0 \in Im\, A$, тогда $\exists\, x_0 \in X : Ax_0 = y_0$. Если вместо y_0 нам известно некоторое его приближение y_δ: $||y_0 - y_\delta|| \leqslant \delta$, то в качестве приближения точного решения x_0 нельзя брать решение уравнения $Ax = y_\delta$. Во-первых, это уравнение может быть неразрешимым, а, во-вторых, даже если решение этого уравнения есть, то в силу неограниченности оператора A^{-1} нельзя гарантировать близость этого решения к x_0.

Во второй половине 20 века, в значительной степени усилиями советских ученых (Тихонов А. Н., Лаврентьев М. М., Иванов В. К., их ученики и последователи), была создана теория решения задач такого рода (и не только для линейных уравнений). Она получила название "Теория решения некорректно поставленных задач". Одна из основных идей этой теории состоит в том, что для нахождения приближения элемента x_0 по приближенно заданным исходным данным y_δ, необходимо исходное уравнение заменить на новую задачу.

Подробнее с теорией некорректно поставленных задач можно ознакомиться, например, по монографиям [17], [10] и [4]. Здесь мы рассмотрим один из методов нахождения такого приближения для уравнений в гильбертовых пространтсвах.

Теорема 4.6.1. *Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$, $Ker\, A = \{0\}$, $0 \in \sigma(A)$ и $A \geqslant 0$. Тогда $\forall\, x \in H$ $\lim\limits_{\alpha\to+0}(A + \alpha I)^{-1}Ax = x$.*

Доказательство. 1. В силу утверждения 4.5.6

$$||(A + \alpha I)^{-1}|| \leqslant 1/\alpha.$$

2. $\forall\, y \in H$ $||(A + \alpha I)y||^2 = ||Ay||^2 + 2\alpha(Ay, y) + \alpha^2||y||^2 \geqslant$ $\geqslant [\alpha(Ay, y) \geqslant 0] \geqslant ||Ay||^2$ Положив $y = (A + \alpha I)^{-1}x$, получим

$$||(A + \alpha I)^{-1}A|| \leqslant 1. \tag{4.6.1}$$

3. Предположим, что при некотором $x_0 \in H$ утверждение теоремы неверно. Тогда $\exists\, \gamma > 0$, $\exists\, \{\, \alpha_n \,\} : \alpha_n \to +0$ и

$$||(A + \alpha_n I)^{-1}Ax_0 - x_0|| \geqslant \gamma. \tag{4.6.2}$$

В силу (4.6.1) последовательность $\{x_n\}$: $x_n := (A+\alpha_n I)^{-1}Ax_0$ ограничена. Поэтому, не ограничивая общности (в силу утверждения 4.2.3 и теоремы 4.1.7), можно считать, что $\exists\, \widehat{x} : x_n \xrightarrow{сл} \widehat{x}$. Но

$$Ax_0 = (A+\alpha_n I)x_n = Ax_n + \alpha_n x_n \to A\widehat{x}.$$

Тогда в силу инъективности оператора A получим, что $\widehat{x} = x_0$. Тем самым

$$x_n = (A+\alpha_n I)^{-1}Ax_0 \xrightarrow{сл} x_0. \qquad (4.6.3)$$

4. Из (4.6.3) и свойства нормы слабого предела получим

$$||x_0|| \leqslant \underline{\lim}\, ||(A+\alpha_n I)^{-1}Ax_0|| \leqslant \overline{\lim}\, ||(A+\alpha_n I)^{-1}Ax_0|| \overset{(4.6.1)}{\leqslant} ||x_0||,$$

т. е. $||x_n|| \to ||x_0||$. Но в гильбертовом пространстве из соотношений $x_n \xrightarrow{сл} x_0$ и $||x_n|| \to ||x_0||$ следует: $x_n \to x_0$, что противоречит соотношению (4.6.2). ■

Теорема 4.6.2. *Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$, $Ker\, A = \{0\}$, $0 \in \sigma(A)$, $A \geqslant 0$, $Ax_0 = y_0$, $||y_0 - y_\delta|| \leqslant \delta$, $\alpha : (0;\delta_0) \to (0;\alpha_0)$,*

$$\lim_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0 \ \text{и} \ \lim_{\delta\to 0} \frac{\delta}{\alpha(\delta)} = 0. \qquad (4.6.4)$$

Тогда $x_\delta := (A+\alpha(\delta)I)^{-1}y_\delta \to x_0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство. В силу неравенства треугольника

$$||x_\delta - x_0|| \leqslant ||(A+\alpha(\delta)I)^{-1}y_\delta - (A+\alpha(\delta)I)^{-1}y_0|| +$$
$$+ ||(A+\alpha(\delta)I)^{-1}y_0 - x_0|| \leqslant \tfrac{\delta}{\alpha(\delta)} + ||(A+\alpha(\delta)I)^{-1}Ax_0 - x_0|| \to 0$$

при $\delta \to 0$ в силу соотношения (4.6.4) и теоремы 4.6.1, поскольку $\lim\limits_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0$. ■

Утверждение 4.6.1. *Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_21)$, $Ker\, A = \{0\}$, $A^{-1} \notin \mathcal{L}(H_2, H_1)$, $\overline{Im\, A} = H_2$, $Ax_0 = y_0$, $||y_0 - y_\delta|| \leqslant \delta$, $\alpha : (0;\delta_0) \to (0;\alpha_0)$, $\lim\limits_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0$ и $\lim\limits_{\delta\to 0} \dfrac{\delta}{\alpha(\delta)} = 0$.*

Тогда $x_\delta := (A^*A + \alpha(\delta)I)^{-1}A^*y_\delta \to x_0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство. В силу того, что $\overline{Im\, A} = H_2$ и утверждения 4.5.1, получим: $Ker\, A^* = \{0\}$. Поэтому уравнение $Ax = y$ равносильно уравнению $A^*Ax = A^*y$. При этом $A^*A \geqslant 0$, а $||A^*y_\delta - A^*y_0|| \leqslant ||A^*||\delta$. Теперь осталось применить теорему 4.6.2. ■

Определение. Пусть X и Y — нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $Ker\, A = \{0\}$, но $A^{-1} \notin \mathcal{L}(Y,X)$.

Семейство $\{R_\alpha\} \subset \mathcal{L}(Y,X)$, где $\alpha \in (0;\alpha_0)$, называется *линейным регуляризующим семейством для оператора A на множестве $V \subset X$* (или кратко, *регуляризующим семейством для A на V*), если $\forall\, x \in V \ \lim\limits_{\alpha\to 0} R_\alpha Ax = x$.

Если сходимость $\lim\limits_{\alpha\to 0} R_\alpha Ax = x$ равномерная на V, то $\{R_\alpha\}$ называется *равномерным линейным регуляризующим семейством для оператора A на множестве $V \subset X$* (или кратко, *равномерным регуляризующим семейством для A на V*).

Замечание. Теорема 4.6.1 показывает, что если H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$, $Ker\, A = \{0\}$, $0 \in \sigma(A)$ и $A \geqslant 0$, то семейство $R_\alpha := (A+\alpha I)^{-1}$ является линейным регуляризующим семейством для A на всем H.

Задание 4.6.1. Покажите, что рассмотренное выше семейство не является равномерным линейным регуляризующим семейством на всем H.

Замечание. В случае наличия у оператора A регуляризующего семейства $\{R_\alpha\}$ для A на множестве V, в качестве приближения точного решения $Ax_0 = y_0$, $x_0 \in V$ по приближенной правой части y_δ: $||y_\delta - y_0|| \leqslant \delta$ можно брать $x_\delta := R_{\alpha(\delta)}y_\delta$ при некоторой связи параметров α и δ: $\lim\limits_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0$.

Теорема 4.6.3. *Пусть X и Y — нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $Ker\, A = \{0\}$, $A^{-1} \notin \mathcal{L}(Y,X)$, $\{R_\alpha\}$ — регуляризующее семейство для A на V, $Ax_0 = y_0$,*

$x_0 \in V$, $||y_0 - y_\delta|| \leqslant \delta$ *и* $\alpha : (0;\delta_0) \to (0;\alpha_0)$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\alpha(\delta) = 0$ *и* $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\delta}{||R_{\alpha(\delta)}||} = 0$. *Тогда* $x_\delta := R_{\alpha(\delta)}y_\delta \to x_0$ *при* $\delta \to 0$. ■

Если у оператора A есть равномерное регуляризующее семейство на V, то можно дать и гарантированную оценку приближенного решения $x_\delta := R_\alpha y_\delta$.

Пусть X и Y — нормированные пространства, $\{R_{\alpha(\delta)}\} \subset \mathcal{L}(Y,X)$ — равномерное регуляризующее семейство для A на V т. е. $\eta(\alpha) := \sup\limits_{x\in V}||R_\alpha Ax - x|| \to 0$ при $\alpha \to 0$ и $x_{\alpha,\delta} := R_\alpha y_\delta$. Тогда $||x_{\alpha,\delta} - x_0|| \leqslant \dfrac{\delta}{||R_{\alpha(\delta)}||} + \eta(\alpha)$. Тем самым если $\lim\limits_{\delta\to 0}\alpha(\delta) = 0$ и $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\delta}{||R_{\alpha(\delta)}||} = 0$, то гарантированная оценка приближенного решения $x_\delta := R_{\alpha(\delta)}y_\delta$ имеет вид

$$||x_\delta - x_0|| \leqslant \frac{\delta}{||R_{\alpha(\delta)}||} + \eta(\alpha(\delta)),$$

причем

$$\frac{\delta}{||R_{\alpha(\delta)}||} + \eta(\alpha(\delta)) \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Глава 5
Операторы с индексом

§ 1. Факторпространства нормированных пространств

Определение. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, а X_0 — его подпространство. Тогда бинарное отношение $x \sim y := (x-y) \in X_0$ есть отношение эквивалентности, и на множестве классов эквивалентности этого отношения $\widetilde{x} = x + X_0$ можно задать операции $\widetilde{x} + \widetilde{x}' := \widetilde{x + x'}$ и $\lambda\widetilde{x} := \widetilde{\lambda x}$, относительно которых оно станет линейным пространством над полем $\mathbb{P}$ (с нулем $\widetilde{0}$). Это линейное пространство обозначается через X/X_0 и называется *факторпространством прстранства X по подпространству X_0*.

Отображение $\pi : X \to X/X_0$, заданное формулой $\pi(x) := \widetilde{x}$, называется *каноническим отображением* или *факторотображением.*

Утверждение 5.1.1. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $X \supset X_0$ — линейное подпространство, то найдется такое подпространство X_1 пространства X, что $X_1 \cong X/X_0$ и $X = X_0 \oplus X_1$.*

2. *Если $X \supset X_i$ — линейные подпространства ($i = 0, 1$) такие, что $X = X_0 \oplus X_1$, то $X_1 \cong X/X_0$.*

3. *Если $X \supset X_0 \supset X_1$, где X_0 и X_1 подпространства пространства X, и $dim\big(X/X_1\big) < \infty$, то $dim\big(X/X_0\big) < \infty$.*

Доказательство. $\boxed{1}$. Пусть $\{\,\widetilde{e}_\alpha\,\}$ — базис пространства X/X_0, а $\{\,\widehat{e}_\alpha\,\}$: $\forall\,\alpha\;\; \widehat{e}_\alpha \in e_\alpha$. Тогда $\{\,\widehat{e}_\alpha\,\}$ — линейно независимая система. Дополним ее до базиса всего пространства X, т. е. возьмем линейно независимую систему $\{\,\overline{e}_\beta\,\}$ такую, что $\{\,\widehat{e}_\alpha\,\} \cup \{\,\overline{e}_\beta\,\}$ — базис пространства X. Тогда

$$X = \langle \{ \widehat{e}_\alpha \} \rangle \oplus \langle \{ \overline{e}_\beta \} \rangle, \text{ и } \langle \{ \overline{e}_\beta \} \rangle \cong X/X_0.$$

$\boxed{3}$. Пусть π_0 и π_1 - канонические факторотображения пространства X на X/X_0 и X/X_1, соответственно. Тогда отображение $A : X/X_1 \to X/X_0$, определенное формулой $A\big(\pi_1(x)\big) := \pi_0(x)$ есть линейная сюръекция. ■

Утверждение 5.1.2. *Пусть X — нормированное пространство, а X_0 — его подпространство. Справедливы следующие утверждения:*

1. $||\widetilde{x}|| := \inf\{||\overline{x}|| : \overline{x} \in \widetilde{x} = x + X_0\}$ *— норма на линейном пространстве X/X_0.*
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \widetilde{x} \in X/X_0 \ \exists x_\varepsilon \in \widetilde{x} : ||\widetilde{x}|| \leqslant ||x_\varepsilon|| \leqslant ||\widetilde{x}|| + \varepsilon.$
3. $\pi \in \mathcal{L}(X, X/X_0)$, $||\pi|| \leqslant 1$ *и* $Im\,\pi = X/X_0$.
4. *Если X — банахово пространство, то X/X_0 тоже банахово пространство.*
5. *Если X — банахово пространство и существует подпространство $X_1 \subset X$ такое, что $X = X_0 \oplus X_1$, то $X_1 \cong X/X_0$ как топологические векторные пространства.*
6. *Существует $\pi_R : X/X_0 \to X$ такое, что $\pi \circ \pi_R = I_{X/X_0}$ и $\forall \widetilde{x} \in X/X_0 \ \ ||\pi_R(\widetilde{x})|| \leqslant 2||\widetilde{x}||$.*

Доказательство. $\boxed{4}$. Пусть $\{ \widetilde{x}_n \}$ — фундаментальная последовательность в X/X_0. Тогда $\exists \{ \widetilde{x}_{n_k} \}$: $||\widetilde{x}_{n_k} - \widetilde{x}_{n_{k+1}}|| < 2^{-k}$. В силу пункта 2 найдется $\{ x_k \} \subset X$: $\pi(x_k) = \widetilde{x}_{n_k} - \widetilde{x}_{n_{k+1}}$ и $||x_k|| < 2^{-k} \Longrightarrow$ $x_0 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. Так как $\pi(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \pi(x_k) =$ $= \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} (\widetilde{x}_{n_k} - \widetilde{x}_{n_{k+1}}) = \lim\limits_{m\to\infty} (\widetilde{x}_{n_1} - \widetilde{x}_{n_{m+1}})$, то $\{ \widetilde{x}_{n_k} \}$ сходится $\Longrightarrow \{ \widetilde{x}_n \}$ сходится.

$\boxed{5}$. Отображение $\pi\big|_{X_1}$ есть непрерывная линейная биекция банахова пространства X_1 на банахово пространство X/X_0, поэтому по теореме Банаха об обратном отображении, получим, что $\pi\big|_{X_1}$ — гомеоморфизм. ■

Утверждение 5.1.3. *Пусть X — банахово пространство, а X_0 — его подпространство. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Существует подпространство $X_1 \subset X$ такое, что $X = X_0 \oplus X_1$.*
2. *Существует отображение $\pi_R \in \mathcal{L}\big(X/X_0, X\big)$ такое, что $\pi \circ \pi_R = I_{X/X_0}$.*

Доказательство. $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$. В этом случае $\pi_R := \Big(\pi\big|_{X_1}\Big)^{-1}$ — искомое отображение.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$. Пусть $\pi_R \in \mathcal{L}\big(X/X_0\big)$ такое, что $\pi \circ \pi_R = I_{X/X_0}$. $||\widetilde{x}|| = ||\pi(\pi_R(\widetilde{x}))|| \leqslant ||\pi|| \cdot ||\pi_R(\widetilde{x})|| \leqslant ||\pi_R(\widetilde{x})||$, т. е. π_R строго отделено от нуля $\Longrightarrow X_1 := Im\,\pi_R$ — подпространство.

Если $x \in X$, то $x_1 := \pi_R(\widetilde{x}) \in X_1$ и $\pi(x_1) = \widetilde{x_1} = \widetilde{x} \Longrightarrow$ $x - x_1 \in X_0$.

Если $x_0 \in X_0 \cap X_1$, то $\exists\, \widetilde{x} : x_0 = \pi_R(\widetilde{x}) \Longrightarrow \widetilde{0} = \pi(x_0) = \widetilde{x}$ $\Longrightarrow x_0 = \pi_R(\widetilde{0}) = 0$. ■

Утверждение 5.1.4. *Пусть X, Y — линейные пространства над полем $\mathbb{P}$, оператор $A : X \to Y$ — линейный, а оператор $\widetilde{A} : X/Ker\,A \to Y$ определен формулой: $\widetilde{A}\widetilde{x} := Ax$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $Im\,\widetilde{A} = Im\,A$, $Ker\,\widetilde{A} = \{\widetilde{0}\}$ *и* $Im\,A \cong X/Ker\,A$.
2. *Если X, Y — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(X/Ker\,A, Y)$ и $||\widetilde{A}|| \leqslant ||A||$.*

Утверждение 5.1.5. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и существует Y_0 — подпространство пространства Y такое, что $Y = Im\,A \oplus Y_0$. Тогда $Im\,A$ — подпространство и $Im\,A \cong X/Ker\,A$ как топологические векторные пространства.*

Доказательство. В силу утверждений 5.1.3.4 и 5.1.4 можно считать, что $Ker\,A = \{0\}$.

Рассмотрим линейное отображение $\widehat{A}$ банахова пространства $X \times Y_0$ в банахово пространство Y, заданное формулой

$\widehat{A}(x,y) := Ax + y$. Тогда $\widehat{A}$ — непрерывная биекция банахова пространства $X \times Y_0$ на банахово пространство Y. По теореме Банаха об обратном отображении $\widehat{A}$ — гомеоморфизм $\Longrightarrow$ $Im\,A = \widehat{A}(X \times \{0\})$ — замкнуто. Теперь осталось применить утверждение 5.1.3.5 ∎

Утверждение 5.1.6. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $dim(Y/Im\,A) < \infty$, то $Im\,A$ замкнуто.*

Действительно, это есть следствие из утверждений 5.1.1 и 5.1.5 и замкнутости любых конечномерных линейных многообразий. ∎

Определение. Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то линейное пространство $Y/Im\,A$ называется *коядром оператора* A и обозначается $Coker\,A$.

Определение. Пусть $\{X_1,\ldots,X_n\}$ — линейные пространства и $\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}$ — линейные операторы: $\forall\, i \in \overline{1,n-1}$ $A_i : X_i \to X_{i+1}$. Диаграмма $\ldots \xrightarrow{A_{i-1}} X_i \xrightarrow{A_i} X_{i+1} \xrightarrow{A_{i+1}} \ldots$ называется *точной*, если $\forall\, i \in \overline{1,n-1}$ $Im\,A_i = Ker\,A_{i+1}$.

Пример 5.1.1. Диаграмма $\{0\} \to X \xrightarrow{A} Y \to \{0\}$ точна тогда и только тогда, когда A — биекция.

Теорема 5.1.1. *Пусть $\{X_1,\ldots,X_n\}$ — банаховы пространства, $\forall\, i \in \overline{1,n-1}$ $A_i \in \mathcal{L}(X_i,X_{i+1})$ и диаграмма $\ldots \xrightarrow{A_{i-1}} X_i \xrightarrow{A_i} X_{i+1} \xrightarrow{A_{i+1}} \ldots$ точна. Тогда диаграмма $\ldots \xrightarrow{A_{i+1}^*} X_{i+1}^* \xrightarrow{A_i^*} X_i^* \xrightarrow{A_{i-1}^*} \ldots$ тоже точна.*

Доказательство. Отметим, что в силу точности исходной диаграммы все $Im\,A_i$ замкнуты поскольку совпадают с ядрами непрерывных операторов. Тогда по теореме 4.2.3

$$Im\,A_{i+1}^* = (Ker\,A_{i+1})^{\perp} = (Im\,A_i)^{\perp} = Ker\,A_i^*. \ \blacksquare$$

§ 2. Свойства операторов с индексом

Определения. 1. Пусть X, Y — банаховы пространства. Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ называется *оператором с индексом* или *фредгольмовым*, если $Ker\,A$ и $Coker\,A$ конечномерны. Множество всех фредгольмовых операторов из X в Y будем обозначать $\mathcal{F}(X,Y)$.

2. *Индексом* фредгольмова оператора называется величина

$$ind(A) := dim(Ker\,A) - dim(Coker\,A). \tag{5.2.1}$$

Замечание. В [12] и [18] в отличие от [8], [19], а также монографий [13], [20], фредгольмовыми называются лишь операторы с *нулевым индексом*, а операторы с произвольным индексом называются *нетеровыми*.

Утверждение 5.2.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $A \in \mathcal{F}(X,Y)$. Тогда существуют такие подпространства $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$, что $X = Ker\,A \oplus X_0$, $Y = Y_0 \oplus Im\,A$ и $dim(Y_0) = dim(Coker\,A)$.*

Утверждение 5.2.2. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и A биективен. Тогда $A \in \mathcal{F}(X,Y)$ и $ind(A) = 0$.*

Утверждение 5.2.3. *Пусть X, Y, Z и W — банаховы пространства, $A \in \mathcal{F}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $C \in \mathcal{L}(W,X)$ и операторы B и C биективны. Тогда $BA \in \mathcal{F}(X,Z)$, $AC \in \mathcal{F}(W,Y)$ и $ind(BA) = ind(AC) = ind(A)$.*

Утверждение 5.2.4. *Пусть X, Y — конечномерные нормированные пространства. Тогда $\mathcal{F}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$ и $\forall\, A \in \mathcal{L}(X,Y)$ $ind(A) = dim(X) - dim(Y)$.*

Доказательство. Равенство $\mathcal{F}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$ очевидно в силу конечномерности пространств X и Y. В силу утверждения 5.2.1 справедливы разложения $X = Ker\,A \oplus X_0$ и

$Y = Y_0 \oplus Im\, A$, а в силу утверждения 5.1.1 $dim(Im\, A) = dim(X_0)$. Поэтому $ind(A) = dim(Ker\, A) - dim(Y_0) = \big(dim(X) - dim(X_0)\big) - \big(dim(Y) - dim(Im\, A)\big) = dim(X) - dim(Y)$. ■

Утверждение 5.2.5. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Если $A \in \mathcal{F}(X, Y)$, то $Im\, A$ замкнуто.*

Действительно, это следует из определения фредгольмова оператора и утверждения 5.1.6. ■

Теорема 5.2.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Если $A \in \mathcal{F}(X, Y)$, то $A^* \in \mathcal{F}(Y^*, X^*)$. При этом $dim(Ker\, A^*) = dim(Coker\, A)$, $dim(Coker\, A^*) = dim(Ker\, A)$ и $ind(A^*) = -ind(A)$.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\{0\} \to Ker\, A \xrightarrow[1-1]{i} X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow[\text{на}]{\pi} Y/Im\, A \to \{0\}, \qquad (5.2.2)$$

где i — отображение вложения $Ker\, A$ в X (инъекция), а π — фактоототображение (сюръекция). Эта диаграмма точна. Тогда по теореме 5.1.1 точна диаграмма

$$\{0\} \to (Y/Im\, A)^* \xrightarrow[1-1]{\pi^*} Y^* \xrightarrow{A^*} X^* \xrightarrow[\text{на}]{i^*} (Ker\, A)^* \to \{0\}. \qquad (5.2.3)$$

При этом в силу теоремы 4.2.3 i^* — сюръекция, а π^* — инъекция. Поэтому $dim(Coker\, A) = dim(Y/Im\, A) = [Y/Im\, A$ — конечномерно$] = dim\big((Y/Im\, A)^*\big) = [\pi^*$ — инъекция$] = dim(Im\, \pi^*) = [$точность диаграммы (5.2.3)$] = dim(Ker\, A^*)$.

Аналогично, $dim(Ker\, A) = [Ker\, A$ — конечномерно$] = dim\big((Ker\, A)^*\big) = [$точность диаграммы (5.2.2)$] = dim(Im\, i^*) = [$утверждение 5.1.4$] = dim\big(X^*/Ker\, i^*\big) = [$точность диаграммы (5.2.2)$] = dim\big(X^*/Im\, A^*\big) = dim(Coker\, A^*)$. ■

Утверждение 5.2.6. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Если $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $Im\, A$ — замкнут, $dim(Ker\, A) < \infty$ и $dim(Ker^*\, A) < \infty$, то $A \in \mathcal{F}(X, Y)$. При этом*

$$ind(A) = dim(Ker\, A) - dim(Ker\, A^*).$$

Доказательство. Из замкнутости $Im\, A$ следует точность диаграммы (5.2.2), а, значит, диаграмма (5.2.3) тоже точна, и, в частности, $Im\, \pi^* = Ker\, A^*$ — конечномерно. Но π^* инъективен, поэтому $Im\, \pi^* \cong \big(Y/Im\, A\big)^*$ — конечномерно $\Longrightarrow Y/Im\, A$ — конечномерно. ■

Утверждение 5.2.7. *Пусть X — банахово пространство. Если $K \in comp\, \mathcal{L}(X)$, то*

$$I + K \in \mathcal{F}(X) \text{ и } ind(I + K) = 0.$$

Действительно, это следует из предыдущего утверждения и теорем 4.4.4, 4.4.5, 4.4.3 и 4.4.8. ■

Определение. Пусть X_1, X_2 и Y_1, Y_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ и $A_{ij} : X_j \to Y_i$ — линейные операторы. Тогда линейный оператор $A : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, заданный по формуле $A(x_1, x_2) := (A_{11}x_1 + A_{12}x_2, A_{21}x_1 + A_{22}x_2)$, можно представить в *матричном виде* $A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, если пары (x_1, x_2) и (y_1, y_2) записывать в виде векторов-столбцов $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. При представлении таких операторов в матричном виде сохраняются классические формулы матричного исчисления, связанные с суммой и произведением операторов.

Если X и Y — линейные пространства над полем $\mathbb{P}$, X_1, X_2 и Y_1, Y_2 их подпространства такие, что $X = X_1 \oplus X_2$ и $Y = Y_1 \oplus Y_2$, а $A : X \to Y$ — линейный оператор, то отождествляя $X_1 \oplus X_2$ с $X_1 \times X_2$, а $Y_1 \oplus Y_2$ с $Y_1 \times Y_2$, т. е. записывая вектора $x_1 + x_2$ и $y_1 + y_2$ в виде $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, получим *матричное представление* оператора A, порожденное указанным разложением пространств X и Y, где линейные операторы $A_{ij} : X_j \to Y_i$ определены формулами $A_{ij} = pr_i A\big|_{X_j}$. Здесь pr_i — оператор проектирования Y на Y_i, т. е. $pr_i(y_1 + y_2) = y_i$ $(y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2)$.

Утверждение 5.2.8. *Пусть X_1, X_2 и Y_1, Y_2 — банаховы пространства, а $A : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ — линейный оператор с матричным представлением $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Тогда*

$$A \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2) \Longleftrightarrow \forall\, i, j = 1, 2 \;\; A_{ij} \in \mathcal{L}(X_j, Y_i).$$

Определение. Пусть X и Y — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор A называется *почти обратимым*, если $\exists\, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(Y, X) \colon AS_1 = I_Y + K_1$, а $S_2 A = I_X + K_2$, где операторы K_1 и K_2 — конечномерны.

Теорема 5.2.2. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Тогда $\big(A \in \mathcal{F}(X, Y)\big) \Longleftrightarrow (A$ почти обратим$)$.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. В силу конечномерности $Ker\, A$ и $Coker\, A$ они дополняемы, т. е. существуют такие подпространства $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$, что $X = Ker\, A \oplus X_0$ и $Y = Y_0 \oplus Im\, A$, при этом $Y_0 \cong Coker\, A$. Тогда матричное представление оператора A, порожденное этим разложением пространств X и Y, имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, где $A_{22} \in \mathcal{L}(X_0, Im\, A)$ и $Im\, A = Im\, A_{22}$. По построению A_{22} — непрерывная биекция банахова пространства X_0 на банахово пространство $Im\, A$ (напомним, что у фредгольмова оператора образ всегда замкнут) $\Longrightarrow$ $S_0 := A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(Im\, A, X_0)$.

Определим оператор $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ формулой $S := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix}$. Тогда $AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{Im\, A} \end{pmatrix} = I_Y + \begin{pmatrix} -I_{Y_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -I_{Y_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — конечномерный. С другой стороны

$SA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{X_0} \end{pmatrix} = I_X + \begin{pmatrix} -I_{Ker\, A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -I_{Ker\, A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ тоже конечномерный.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $S_2 A = I_X + K_2$. Тогда $Ker\, A \subset Ker\,(S_2 A) = Ker\,(I_X + K_2) \subset Im\, K_2$ — конечномерно.

Пусть $AS_1 = I_Y + K_1$. Тогда $Im\, A \supset Im\,(AS_1) = Im\,(I_Y + K_1)$. Но по утверждению 5.2.7 оператор $I_Y + K_1$ фредгольмов $\Longrightarrow dim\big(Coker(I_Y + K_1)\big) < \infty \overset{\text{утв. 5.1.1.3}}{\Longrightarrow} dim(Coker\, A) < \infty$. ■

Утверждение 5.2.9. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{F}(X, Y)$, а $K \in comp\,\mathcal{L}(X, Y)$. Тогда оператор $A + K \in \mathcal{F}(X, Y)$.*

Доказательство. По теореме 5.2.2 оператор A — почти обратим. Тем самым существует $S_2 \in \mathcal{L}(Y, X)$: $S_2 A = I_X + K_2$, где K_2 — конечномерный. Тогда $S_2(A + K) = I_X + K_2 + S_2 K$. Поскольку оператор $K_2 + S_2 K$ компактен, то по утверждению 5.2.7 $S_2(A + K) \in \mathcal{F}(X) \Longrightarrow \exists\, \widehat{S}_2 \in \mathcal{L}(X) \colon \widehat{S}_2 S_2(A + K) =: \overline{S}_2(A + K) = I_X + \overline{K}_2$, где $\overline{K}_2$ – конечномерный.

Аналогично показывается наличие $\exists\, \overline{S}_1 \in \mathcal{L}(Y, X))$ такого, что $(A + K)\overline{S}_1 = I_Y + \overline{K}_1$, где $\overline{K}_1$ — конечномерный. Поэтому оператор $(A + K)$ почти обратим и в силу теоремы 5.2.2 фредгольмов. ■

Утверждение 5.2.10. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Тогда $\mathcal{F}(X, Y)$ открыто в $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{F}(X, Y)$. Тогда по теореме 5.2.2 найдутся $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(Y, X)$:

$$AS_1 = I_Y + K_1, \quad S_2 A = I_X + K_2,$$

где операторы K_1 и K_2 — конечномерны $\Longrightarrow$

$$(A + \Delta A)S_1 = (I_Y + \Delta A \cdot S_1) + K_1 \text{ и}$$
$$S_2(A + \Delta A) = (I_X + S_2 \cdot \Delta A) + K_2.$$

Но при $||\Delta A|| < \min\{||S_1||^{-1}, ||S_2||^{-1}\}$ операторы $(I_Y + \Delta A \cdot S_1)$ и $(I_X + S_2 \cdot \Delta A)$ биективны и обратные к ним непрерывны. Поэтому

$$(A+\Delta A)S_1(I_Y+\Delta A\cdot S_1)^{-1} = I_Y + K_1(I_Y+\Delta A\cdot S_1)^{-1} = I_Y + \widehat{K}_1,$$

$$(I_X+S_2\cdot\Delta A)^{-1}S_2(A+\Delta A) = I_X + (I_X+S_2\cdot\Delta A)^{-1}K_2 = I_X + \widehat{K}_2,$$

где $\widehat{K}_1$ и $\widehat{K}_2$ конечномерны и непрерывны. Применяя теорему 5.2.2 получим, что $(A+\Delta A) \in \mathcal{F}(X,Y)$. ■

Утверждение 5.2.11. *Пусть X, Y и Z — банаховы пространства, $A \in \mathcal{F}(Y,Z)$ и $B \in \mathcal{F}(X,Y)$. Тогда $AB \in \mathcal{F}(X,Z)$.*

Действительно, это есть следствие из теоремы 5.2.2. ■

§ 3. Свойства индекса фредгольмовых операторов

Утверждение 5.3.1. *Пусть X, Y, Z и W — банаховы пространства, $A \in \mathcal{F}(X,Y)$, $B \in \mathcal{F}(Z,W)$. Тогда*

$$A \oplus B := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{F}(X\times Z, Y\times W) \text{ и}$$

$$ind(A\oplus B) = ind(A) + ind(B).$$

Утверждение 5.3.2. *Пусть X_i, Y_j $(i,j=1,2)$ — банаховы пространства, $A_{ij} \in \mathcal{L}(X_j, Y_i)$, $A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, оператор A_{22} биективен и $A \in \mathcal{F}(X_1\times X_2, Y_1\times Y_2)$. Тогда*

$$ind(A) = ind\big(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\big).$$

Доказательство. Поскольку непрерывные операторы $\begin{pmatrix} I_{Y_1} & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_{Y_2} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I_{X_2} \end{pmatrix}$ биективны, то по утверждению 5.2.3

$$ind(A) = ind\left(\begin{pmatrix} I_{Y_1} & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_{Y_2} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I_{X_2} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= ind\left(\begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\right) \overset{\text{(утв. 5.3.1, утв. 5.2.2)}}{=}$$

$$= ind\big(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\big). \ ■$$

Утверждение 5.3.3. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Тогда $ind : \mathcal{F}(X,Y) \to \mathbb{Z}$ — локально постоянное отображение.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{F}(X,Y)$. В силу конечномерности $Ker\,A$ и $Coker\,A$ они дополняемы, т. е. существуют такие подпространства $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$, что $X = Ker\,A \oplus X_0$ и $Y = Y_0 \oplus Im\,A$. При этом $Y_0 \cong Coker\,A$. Тогда матричное представление оператора A, порожденное этим разложением пространств X и Y, имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, где $A_{22} \in \mathcal{L}(X_0, Im\,A)$ и $Im\,A = Im\,A_{22}$. По построению A_{22} — непрерывная биекция банахова пространства X_0 на банахово пространство $Im\,A \Longrightarrow A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(Im\,A, X_0)$.

Тогда $A + \Delta A = \begin{pmatrix} \Delta A_{11} & \Delta A_{12} \\ \Delta A_{21} & A_{22}+\Delta A_{22} \end{pmatrix}$. Но если $||\Delta A||$ достаточно мала, то оператор $A_{22} + \Delta A_{22}$ — биекция и обратный к нему непрерывен $\overset{\text{(утв. 5.3.2)}}{\Longrightarrow}$ $ind(A + \Delta A) = ind\big(\Delta A_{11} - \Delta A_{12}(A_{22} + \Delta A_{22})^{-1}\Delta A_{21}\big)$. Пусть $\widehat{A} := \Delta A_{11} - \Delta A_{12}(A_{22} + \Delta A_{22})^{-1}\Delta A_{21}$. При этом $\widehat{A} \in \mathcal{L}(Ker\,A, Y_0) \overset{\text{(утв. 5.2.4)}}{\Longrightarrow} ind(\widehat{A}) = dim(Ker\,A) - dim(Y_0) = dim(Ker\,A) - dim(Coker\,A) = ind(A) = ind(A+\Delta A)$. ■

Утверждение 5.3.4. *Пусть X и Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{F}(X,Y)$ и $K \in comp\,\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда*

$$ind(A+K) = ind(A).$$

Доказательство. В силу утверждения 5.2.9 $\forall t \in [0;1]$ $(A + t\cdot K) \in \mathcal{F}(X,Y) \overset{\text{(утв. 5.3.3)}}{\Longrightarrow} ind(A + t\cdot K)$ — const $\Longrightarrow ind(A) = ind(A + 0\cdot K) = ind(A + 1\cdot K) = ind(A+K)$. ■

Утверждение 5.3.5. *Пусть X, Y и Z — банаховы пространства, $A \in \mathcal{F}(Y,Z)$ и $B \in \mathcal{F}(X,Y)$. Тогда*

$$ind(AB) = ind(A) + ind(B).$$

Доказательство. Отметим, что в силу утверждения 5.2.11 $AB \in \mathcal{F}(X,Z)$. Воспользуемся утверждениями 5.2.3, 5.3.1 и 5.3.3. Для этого рассмотрим следующие вспомогательные операторы: $A \oplus B \in \mathcal{F}(Y \times X, Z \times Y)$,

$$V_1 := \begin{pmatrix} I_Z & -\varepsilon^{-1}A \\ 0 & I_Y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(Z \times Y, Z \times Y),$$

$$V_2 := \begin{pmatrix} A & 0 \\ \varepsilon I_Y & B \end{pmatrix} \in \mathcal{F}(Y \times X, Z \times Y),$$

$$V_3 := \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}I_Y & B \\ 0 & -\varepsilon I_X \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(Y \times X, Y \times X) \text{ и}$$

$$V_4 := \begin{pmatrix} 0 & I_Y \\ I_X & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(Y \times X, Y \times X),$$

где ε — малый положительный параметр.

Операторы V_1, V_3 и V_4 есть непрерывные биекции, а оператор V_2 близок к $A \oplus B$ в операторной норме при малом ε, поэтому $ind(V_2) = ind(A \oplus B)$. Таким образом $ind(A) + ind(B) = ind(A \oplus B) = ind(V_1V_2V_3V_4)$. Но $V_1V_2V_3V_4 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_Y \end{pmatrix}$, поэтому $ind(A) + ind(B) = ind(AB) + ind(I_Y) = ind(AB)$. ■

Теорема 5.3.1 (Никольский С. М.). *Пусть X и Y — банаховы пространства, а $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда $\big(A \in \mathcal{F}(X,Y)$ и $ind(A) = 0\big) \iff \big(\exists\, B \in \mathcal{L}(X,Y),\ K \in comp\,\mathcal{L}(X,Y):$ $B^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ и $A = B + K\big)$.*

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. $ind(B + K) \overset{\text{(утв. 5.3.4)}}{=} ind(B) \overset{\text{(утв. 5.2.2)}}{=} 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$. Так как $ind(A) = 0$, то

$$n := dim(Ker\,A) = dim(Ker\,A^*).$$

1. Пусть $\{\,e_1,\dots,e_n\,\}$ — базис $Ker\,A$, $\{\,e_1^*,\dots,e_n^*\,\}$ — базис $Ker\,A^*$, а $\{\,\widetilde{e}_1^*,\dots,\widetilde{e}_n^*\,\}$ и $\{\,\widetilde{e}_1,\dots,\widetilde{e}_n\,\}$ — дуальные к $\{\,e_1,\dots,e_n\,\}$ и $\{\,e_1^*,\dots,e_n^*\}$ системы соответственно, т. е. $\langle e_i, \widetilde{e}_j^*\rangle = \delta_{ij}$ и $\langle \widetilde{e}_i, e_j^*\rangle = \delta_{ij}$. Рассмотрим конечномерный непрерывный оператор

$$\widehat{A}x := \sum_{i=1}^{n} \langle x, \widetilde{e}_i^*\rangle \widetilde{e}_i.$$

Отметим, что

$$\widehat{A}^* y^* = \sum_{i=1}^{n} \langle \widetilde{e}_i, y^*\rangle \widetilde{e}_i^*.$$

2. Покажем, что оператор $A + \widehat{A}$ биективен, тогда получим нужное нам представление $A = (A + \widehat{A}) + (-\widehat{A})$.

Пусть $x_0 \in Ker\,(A + \widehat{A})$. Тогда

$$Ax_0 = -\widehat{A}x_0 \in Im\,A = {}^{\perp}(Ker\,A^*) \Longrightarrow$$

$$\forall\, j \in \overline{1,n}\ \langle \widehat{A}x_0, e_j^*\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_0, \widetilde{e}_i^*\rangle \cdot \langle \widetilde{e}_i, e_j^*\rangle = \langle x_0, \widetilde{e}_j^*\rangle = 0 \quad (5.3.1)$$

Поэтому

$$\widehat{A}x_0 = 0 \Longrightarrow Ax_0 = 0 \Longrightarrow x_0 = \sum_{j=1}^{n} \langle x_0, \widetilde{e}_j^*\rangle e_j \overset{(5.3.1)}{=} 0 \Longrightarrow$$

$$x_0 = 0 \Longrightarrow Ker\,(A + \widehat{A}) = \{0\}.$$

Аналогично показывается, что и $Ker\,(A + \widehat{A})^* = \{0\}$.

Поскольку $(A+\widehat{A}) \in \mathcal{F}(X,Y)$, то $Im\,(A+\widehat{A})$ — подпространство $\Longrightarrow Im\,(A + \widehat{A}) = Y$. ■

Глава 6

Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

§ 1. Дифференцируемость по Фреше и Гато

Определения. Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$.

1. Отображение F называется *дифференцируемым по Фреше в точке* $x_0 \in \overset{\circ}{D}(F)$, если $\exists\, L(x_0) \in \mathcal{L}(X,Y)$:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = L(x_0)h + ||h||\alpha(h; x_0), \text{ где } \alpha(h; x_0) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

2. Оператор $L(x_0)$ в этом случае называется *сильным дифференциалом* (*дифференциалом Фреше*), или *сильной производной отображения F в точке* x_0, и обозначается $\overset{s}{D}F(x_0)$ или $\overset{s}{F'}(x_0)$.

Замечания. 1. Если F — функционал (т. е. $Y = \mathbb{P}$), то $\overset{s}{F'}(x_0) \in X^*$.

2. В конечномерном анализе $L(x_0)$ чаще называют дифференциалом, а производной называют матрицу, соответствующую этому линейному оператору в стандартном базисе.

Утверждение 6.1.1 (свойства сильного дифференциала). *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $\overset{s}{D}F(x_0)$ *единственен.*
2. *Если* $F(\cdot) = \mathrm{const}$, *то* $\overset{s}{D}F(x_0) = 0$.
3. *Если* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, *то* $\forall\, x \in X$ $\overset{s}{D}A(x) = A$.

4. *Если F сильно дифференцируемо в точке x_0, то F непрерывно в этой точке.*
5. *Пусть $G : D(G) \subset X \to Y$. Если F и G сильно дифференцируемы в точке x, то для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$ отображение $\lambda F + \mu G$ тоже сильно дифференцируемо в точке x и $\overset{s}{D}(\lambda F + \mu G)(x) = \lambda \overset{s}{D}F(x) + \mu \overset{s}{D}G(x)$.*
6. *Пусть $G : D(G) \subset Y \to Z$, $F(D(F)) \subset D(G)$, X, Y, Z — нормированные пространства. Если F сильно дифференцируемо в точке x_0, а G сильно дифференцируемо в точке $y_0 = F(x_0)$, то $H(x) := G(F(x))$ сильно дифференцируемо в точке x_0 и $\overset{s}{D}H(x_0) = \overset{s}{D}G(y_0) \cdot \overset{s}{D}F(x_0)$.* ■

Другой подход к дифференцированию — сведение к случаю функции одной переменной.

Определение. Пусть $F : D(F) \subset \mathbb{R} \to Y$, Y — нормированное пространство и $t_0 \in \overset{\circ}{D}(F)$. Тогда *производной функции F в точке* t_0 называется

$$\frac{dF(t_0)}{dt} := F'(t_0) := \lim_{\triangle t \to 0} \frac{F(t_0 + \triangle t) - F(t_0)}{\triangle t} \in Y.$$

Утверждение 6.1.2 *Пусть $F : D(F) \subset \mathbb{R} \to Y$, Y — нормированное пространство. Тогда F сильно дифференцируемо в точке t_0 тогда и только тогда, когда существует производная $F'(t_0)$. При этом $\overset{s}{D}F(t_0)h = h \cdot F'(t_0)$.*

Следствие. *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства, $h \in X$, $t \in \mathbb{R}$. Если F сильно дифференцируемо в точке $x + th$, то $\frac{d}{dt}F(x + th) = \overset{s}{D}F(x + th)h$.*

Определения. Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства.

1. Отображение F называется *дифференцируемым в точке x_0 по направлению* $h \in X$, если существует

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \frac{d}{dt}F(x_0 + th)\Big|_{t=0} =: DF(x_0; h).$$

2. Если F дифференцируемо в точке x_0 по любому направлению, то отображение $DF(x_0;\cdot)$ называется *первой вариацией отображения F в точке x_0.*

Утверждение 6.1.3 *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства. Если отображение F сильно дифференцируемо в точке x_0, то $DF(x_0;\cdot) = \overset{s}{D}F(x_0)$.*

Теорема 6.1.1 (Ферма) (необходимое условие локального экстремума). *Пусть X — нормированное пространство. Если $x_0 \in \overset{\circ}{D}(\varphi)$ — точка локального экстремума функционала $\varphi : D(\varphi) \subset X \to \mathbb{R}$ и φ дифференцируем в точке x_0 по любому направлению, то $\forall\, h \in X$ $D\varphi(x_0; h) = 0$.*

Пример 6.1.1. Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления: найти точки локального экстремума функционала $\varphi : C^1[a;b] \to \mathbb{R}$, заданного формулой $\varphi(x) = \int\limits_a^b F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt$, где $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^3$ функция. Тогда для любой $h \in C^1[a;b]$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$ получим $D\varphi(x,h) = \int\limits_a^b \Big(F'_x\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)h(t) + F'_{\dot{x}}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)\dot{h}(t)\Big)\, dt = \int\limits_a^b \Big(F'_x\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) - \frac{d}{dt}F'_{\dot{x}}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)\Big)h(t)\, dt$. Поскольку множество $h \in C^1[a;b]$ таких, что $h(a) = h(b) = 0$ плотно в $L_2(a;b)$ а подынтегральная функция непрерывна, то условие $D\varphi(x,h) \equiv 0$ эквивалентно соотношению

$$F'_x\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) = \frac{d}{dt}F'_{\dot{x}}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) \text{ —}$$

это и есть *уравнение Эйлера*, дающее необходимое условие наличия в точке $x(\cdot)$ локального экстремума функционала φ.

Замечание. Отображение $DF(x_0;\cdot)$ необязательно будет линейным. Например, для $F(x_1,x_2) := \sqrt[3]{x_1x_2^2}$ $F(0+th) = \sqrt[3]{th_1t^2h_2^2} = t\sqrt[3]{h_1h_2^2}$, поэтому $DF(0;h) = \sqrt[3]{h_1h_2^2}$.

Определения. 1. Если $DF(x_0;\cdot) \in \mathcal{L}(X,Y)$, то говорят, что отображение F *слабо дифференцируемо* (*дифференцируемо по Гато*) *в точке x_0.*

2. В этом случае $DF(x_0;\cdot)$ называется *слабым дифференциалом* (*дифференциалом Гато*) *отображения F в точке x_0* и обозначается $\overset{w}{D}F(x_0)$ или $\overset{w}{F'}(x_0)$.

Утверждение 6.1.4. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $F : D(F) \subset X \to Y$. Справедливы следующие утверждения:*

1. *$\overset{w}{D}F(x_0)$ единственен.*
2. *Если F слабо дифференцируемо в точке $x + th$, то $\frac{d}{dt}F(x+th) = \overset{w}{D}F(x+th)h$.*
3. *Если F слабо дифференцируемо в точке $x + th$, то*

$$\forall\, y^* \in Y^* \;\; \tfrac{d}{dt}\langle F(x+th), y^*\rangle = \langle \overset{w}{D}F(x+th)h, y^*\rangle.$$

4. *Если F сильно дифференцируемо в точке x_0, то оно и слабо дифференцируемо в точке x_0 и $\overset{w}{D}F(x_0) = \overset{s}{D}F(x_0)$.*

Пример 6.1.2. Пусть

$$F(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, & x_1^2 \neq x_2 \text{ или } x_1 = x_1 = 0, \\ 1, & x_1^2 = x_2. \end{cases}$$

Тогда $DF(0;\cdot) \equiv 0$, т. е. отображение F слабо дифференцируемо в точке $x_0 = 0$, но не является непрерывным в точке $x_0 = 0$, поэтому F не является и сильно дифференцируемым в точке $x_0 = 0$.

Теорема 6.1.2 (формула конечных приращений). *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства. Если F слабо дифференцируемо на $[x_1;x_2]$, то существует такое $\xi \in (x_1;x_2)$, что $||F(x_2) - F(x_1)|| \leqslant ||\overset{w}{D}F(\xi)|| \cdot ||x_2 - x_1||$.*

Доказательство. По 2-му следствию из теоремы Хана — Банаха (с. 59) существует такой $y^* \in Y^*$, что $||y^*|| = 1$ и

$$||F(x_2) - F(x_1)|| = \langle F(x_2) - F(x_1), y^* \rangle.$$

Рассмотрим функцию $\psi(t) := \langle F(x_1 + t(x_2 - x_1)), y^* \rangle$. Тогда $||F(x_2) - F(x_1)|| = \psi(1) - \psi(0) = [$ формула конечных приращений в одномерном случае $- \ \exists \theta \in (0;1)] =$ $= \psi'(\theta) \cdot 1 = [\xi := x_1 + \theta(x_2 - x_1)] \overset{\text{утв. 6.1.4}}{=} \langle \overset{w}{F'}(\xi)(x_2 - x_1), y^* \rangle \leqslant$ $\leqslant ||\overset{w}{F'}(\xi)|| \cdot ||x_2 - x_1|| \cdot ||y^*||$. ∎

Утверждение 6.1.5. *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства, F слабо дифференцируемо на $[x_1; x_2]$ и $\{ ||\overset{w}{D}F(x)|| \}$ ограничено на $[x_1; x_2]$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $\forall x, \widehat{x} \in [x_1; x_2]$ $||F(x) - F(\widehat{x})|| \leqslant \sup\limits_{\xi \in [x_1; x_2]} ||\overset{w}{D}F(\xi)|| \cdot ||x - \widehat{x}||$.
2. *Если $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то $\forall x, \widehat{x} \in [x_1; x_2]$*

$$||F(x) - F(\widehat{x}) - A(x - \widehat{x})|| \leqslant \sup_{\xi \in [x_1; x_2]} ||\overset{w}{D}F(\xi) - A|| \cdot ||x - \widehat{x}||.$$

Доказательство. $\boxed{2}$. Надо применить первое утверждение к функции $F(x) - Ax$. ∎

Теорема 6.1.3 (достаточное условие сильной дифференцируемости). *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства. Если F слабо дифференцируемо в некоторой окрестности $U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 и $\overset{w}{F'}$ непрерывно в точке x_0 как отображение из X в $\mathcal{L}(X, Y)$, то F сильно дифференцируемо в точке x_0. Более того*

$$\forall x, \widehat{x} \in U(x_0, \varepsilon)$$
$$F(x) - F(\widehat{x}) - \overset{w}{F'}(x_0)(x - \widehat{x}) = ||x - \widehat{x}|| \beta(x, \widehat{x}; x_0), \text{ и} \tag{6.1.1}$$
$$\beta(x, \widehat{x}; x_0) \to 0 \text{ при } x \to x_0 \text{ и } \widehat{x} \to x_0.$$

Доказательство. Надо применить утверждение 6.1.5.2 к $A = \overset{w}{F'}(x_0)$ и воспользоваться непрерывностью $\overset{w}{F'}(x)$ в точке x_0. ∎

Замечание. Отметим, что условие (6.1.1) более сильное, чем условие сильной дифференцируемости.

Определение. Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Отображение F называется *строго дифференцируемым в точке* $x_0 \in \overset{\circ}{D}(F)$, если в некоторой окрестности $U(x_0, \varepsilon)$ выполняется условие (6.1.1).

§ 2. Производные и дифференциалы высших порядков

В дальнейшем мы будем рассматривать только сильную дифференцируемость (дифференцируемость по Фреше).

Определение. Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства.

Если отображение $F' : D(F') \subset X \to \mathcal{L}(X, Y)$ дифференцируемо в точке x_0, то F называется *дважды дифференцируемым в точке* x_0.

Замечание. Отметим, что $F''(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$.

Определение. Пусть X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Тогда $\mathcal{L}(X, X; Y) := \mathcal{L}_2(X; Y)$ — нормированное пространство билинейных непрерывных отображений $A : X^2 \to Y$ с нормой $||A|| := \sup\limits_{||x_1|| \leqslant 1, ||x_2|| \leqslant 1} ||A(x_1, x_2)||$.

Утверждение 6.2.1. $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \cong \mathcal{L}_2(X; Y)$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$.

Определим $J : \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \to \mathcal{L}_2(X; Y)$ следующим образом: $\forall x_1, x_2 \in X$ $(JA)(x_1, x_2) := (Ax_1)x_2$. ∎

Замечание. "Отождествляя" $F''(x_0)$ с билинейным отображением, мы будем писать $F''(x_0)(h_1, h_2)$ вместо $(F''(x_0)h_1)h_2$.

Определения. 1. Аналогично определяются производные более высоких порядков и $\mathcal{L}_k(X; Y)$ — нормированное пространство k-линейных непрерывных отображений из X^k в Y. При этом можно считать, что производная k-го порядка $F^{(k)}(x_0)$ есть k-линейное отображение, т. е. $F^{(k)}(x_0) \in \mathcal{L}_k(X;Y)$.

2. Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Если F k раз дифференцируемо в точке x_0, то *дифференциалом порядка k отображения F в точке x_0* называется отображение $d^k F(x_0) : X \to Y$, определенное формулой

$$d^k F(x_0)(h) := F^{(k)}(x_0)(h, \ldots, h).$$

Утверждение 6.2.2. *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Если F k раз дифференцируемо в точке x_0, то*

$$\forall\, h \in X\, \forall\, \lambda \in \mathbb{P} \qquad d^k F(x_0)(\lambda h) = \lambda^k d^k F(x_0)(h).$$

Пример 6.2.1. Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемое отображение в точке x, тогда

$$F'(x)h = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial F(x)}{\partial x_i}\, h_i,\ F''(x)(h_1, h_2) = \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j \partial x_i}\, h_{1,i} h_{2,j}, \text{ а}$$

$$d^2 F(x)(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j \partial x_i}\, h_i h_j.$$

Теорема 6.2.1. *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$ и отображение F k раз дифференцируемо в точке $x + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{t}_i h_i$, где $\{\, h_1, \ldots, h_k \,\} \subset X$, а $\{\, \widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k \,\} \subset \mathbb{R}$. Тогда в некоторой окрестности точки $(\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k) \in \mathbb{R}^k$ определено отображение*

$$\varphi(t_1, \ldots, t_k) := F(x + \sum_{i=1}^{k} t_i h_i),$$

которое k раз дифференцируемо в точке $(\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k)$. При этом

$$\tfrac{\partial^k}{\partial t_1 \ldots \partial t_k} \varphi(\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k) = F^{(k)}(x + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{t}_i h_i)(h_1, \ldots, h_k).$$

Следствие. *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если F k раз дифференцируемо в точке $x + th$, то*

$$\tfrac{d^k}{dt^k} F(x + th) = d^k F(x + th)(h).$$

2. *Если F k раз дифференцируемо в точке $x + th$, то*

$$\forall\, y^* \in Y^*\ \tfrac{d^k}{dt^k} \langle F(x + th), y^* \rangle = \langle d^k F(x + th)(h), y^* \rangle.$$

Замечание. Пример 6.2.1 показывает, что равенство смешанных производных в смысле обычного конечномерного анализа — это симметричность соответствующих полилинейных отображений — производных в смысле функционального анализа.

Утверждение 6.2.3. *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Если отображение F k раз непрерывно дифференцируемо в точке x_0, то*

$$F^{(k)}(x_0)(h_1, \ldots, h_k) = F^{(k)}(x_0)(\sigma(h_1, \ldots, h_k)),$$

где $\sigma(h_1, \ldots, h_k)$ — произвольная перестановка аргументов $h_1, \ldots, h_k$.

Теорема 6.2.2 (формула Тейлора с оценкой остатка по Лагранжу). *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Если отображение F является $(n+1)$ раз дифференцируемым в некоторой окрестности $U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0, то $\forall\, h \in B(0, \varepsilon)\, \exists\, \xi \in U(x_0, \varepsilon)$*

$$\left\| F(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k F(x_0)(h) \right\| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} ||d^{n+1} F(\xi)(h)||.$$

Доказательство. Пусть

$$R_n(x_0; h) := F(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k F(x_0)(h)$$

и $y^*(h) \in Y^*$ таково, что $||y^*(h)|| = 1$ и $||R_n(x_0;h)|| = \langle R_n(x_0;h), y^*(h)\rangle$. Тогда

$$\langle F(x_0+h), y^*(h)\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\langle F(x_0+th), y^*(h)\rangle\Big|_{t=0} \cdot 1^k +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\langle F(x_0+th), y^*(h)\rangle\Big|_{t=\theta} \cdot 1^{n+1} =$$

$$= \Big\langle \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k F(x_0)(h), y^*(h)\Big\rangle + \Big\langle \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}F(\xi), y^*(h)\Big\rangle. \ \blacksquare$$

Теорема 6.2.3. *Пусть $\varphi : D(\varphi) \subset X \to \mathbb{R}$, X — нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\varphi^{(n+1)}$ непрерывна в $U(x_0,\varepsilon)$ и $d^1\varphi(x_0) = 0, \ldots, d^{n-1}\varphi(x_0) = 0$ и $d^n\varphi(x_0) \neq 0$. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если x_0 — точка локального минимума функционала φ, то $\forall\, h \in X$ $d^n\varphi(x_0)(h) \geqslant 0$.*
2. *Если x_0 — точка локального максимума функционала φ, то $\forall\, h \in X$ $d^n\varphi(x_0)(h) \leqslant 0$.*
3. *Если $\exists\, C > 0$ $\forall\, h \in X$ $d^n\varphi(x_0)(h) \geqslant C||h||^n$, то x_0 — точка строгого локального минимума функционала φ.*
4. *Если $\exists\, C > 0$ $\forall\, h \in X$ $d^n\varphi(x_0)(h) \leqslant -C||h||^n$, то x_0 — точка строгого локального максимума функционала φ.*
5. *Если $\exists\, h_1, h_2 \in X$ $d^n\varphi(x_0)(h_1) < 0 < d^n\varphi(x_0)(h_2)$, то в точке x_0 у φ нет локального экстремума.*

Доказательство. По предыдущей теореме

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \tfrac{1}{n!} d^n\varphi(x_0)(h) + R_n(x_0;h).$$

Поскольку $d^{n+1}\varphi(x)$ непрерывен в точке x_0, то он ограничен в некоторой окрестности $U(x_0,\varepsilon_0)$. Поэтому

$$\forall\, h \in B[0;\varepsilon_0/2] \quad ||R_n(x_0;h)|| \leqslant ||d^{n+1}\varphi(\xi)(h)||/((n+1)!) \leqslant$$

$$\leqslant ||h||^{n+1} \cdot ||d^{n+1}\varphi(\xi)|| \leqslant ||h||^{n+1} M,$$

где M — некоторая константа. Таким образом,

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \tfrac{1}{n!} d^n\varphi(x_0)(h) + O(||h||^{n+1}) \text{ при } h \to 0.$$

$\boxed{1}$. В этом случае $\frac{1}{n!} d^n\varphi(x_0)(h) + O(||h||^{n+1}) \geqslant 0$ при всех достаточно малых h. Возьмем произвольный $h_0 \in X$ и рассмотрим $h(t) := th_0$ при малых положительных t. Тогда

$$\tfrac{1}{n!} d^n\varphi(x_0)(th_0) + O(||th_0||^{n+1}) = t^n\big(\tfrac{1}{n!} d^n\varphi(x_0)(h_0) + O(t)\big) \geqslant 0.$$

Поделив это неравенство на t^n и перейдя затем к пределу при $t \to +0$, получим $d^n\varphi(x_0)(h_0) \geqslant 0$.

$\boxed{4}$. $\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \frac{1}{n!} d^n\varphi(x_0)(h) + O(||h||^{n+1}) \leqslant$

$$\leqslant -\tfrac{C}{n!}||h||^n + O(||h||^{n+1}) = ||h||^n\big(-\tfrac{C}{n!} + O(||h||)\big).$$

$\boxed{5}$. В этом случае $\varphi(x_0+th_i)$ имеет при $t = 0$ строгий локальный максимум при $i = 1$ и строгий локальный минимум при $i = 2$. $\blacksquare$

§ 3. Частные производные и функции, заданные неявно

Определение. Пусть $F : D(F) \subset X \times Y \to Z$, X, Y, Z — нормированные пространства. Если отображение $F(\cdot, y_0)$ дифференцируемо в точке x_0, то его производная в этой точке называется *частной производной по x отображения F в точке* (x_0, y_0) и обозначается $F'_x(x_0,y_0)$. Аналогично определяется и вторая частная производная — по y — $F'_y(x_0,y_0)$.

Замечание. Отметим, что $F'_x(x_0,y_0) \in \mathcal{L}(X,Z)$, а $F'_y(x_0,y_0) \in \mathcal{L}(Y,Z)$.

Утверждение 6.3.1 (достаточное условие дифференцируемости). *Пусть $F : D(F) \subset X \times Y \to Z$, X, Y, Z — нормированные пространства. Если F дифференцируемо и по x, и по y в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), F'_x и F'_y непрерывны в точке (x_0,y_0), то F дифференцируема в точке (x_0,y_0) и $\forall\, u \in X$ $\forall\, v \in Y$ $F'(x_0,y_0)(u,v) = F'_x(x_0,y_0)u + F'_y(x_0,y_0)v$.*

Определение. Пусть $F : D(F) \subset X \times Y \to Z$. Отображение $f : D(f) \subset X \to Y$ называется *отображением, заданным неявно уравнением* $F(x, y) = z_0 \in Z$, если

$$\forall\, x \in D(f)\ \ (x, f(x)) \in D(F) \wedge F(x, f(x)) = z_0.$$

Теорема 6.3.1 (о существовании неявно заданного отображения). *Пусть $F : D(F) \subset X \times Y \to Z$, X, Y, Z — банаховы пространства и выполнены следующие условия:*

1. $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}(F)$ *и* $F(x_0, y_0) = 0$*;*
2. F *непрерывна в точке* (x_0, y_0)*;*
3. $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}(F'_y)$ *и* F'_y *непрерывно в точке* (x_0, y_0)*;*
4. $F'_y(x_0, y_0)$ *непрерывно обратим.*

Тогда $\exists\, \widetilde{\varepsilon} > 0\ \ \exists\, \widetilde{\delta} > 0\ \ \exists\, f : U(x_0, \widetilde{\delta}) \to U(y_0, \widetilde{\varepsilon})$ *такое, что* $\forall\, x \in U(x_0, \widetilde{\delta})\ \ F(x, f(x)) = 0$ *и* f *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Обозначим $L := (F'_y(x_0, y_0))^{-1}$.

1. Рассмотрим при каждом x из малой окрестности точки x_0 оператор $A(x)$, определенный следующей формулой:

$$(A(x))(y) := y - LF(x, y).$$

Тогда $(A(x))(y) = y \Longleftrightarrow F(x, y) = 0$.

Найдем такие $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что для любого $x \in B(x_0, \delta)$ отображение $A(x)$ есть сжимающее отображение полного метрического пространства $B[y_0, \varepsilon]$ в себя.

2. В силу формулы конечных приращений

$$||(A(x))(y_2) - (A(x))(y_1)|| \leqslant ||(A(x))'_y(\eta)|| \cdot ||y_2 - y_1||.$$

Но $||(A(x))'_y(\eta)|| = ||I - LF'_y(x, \eta)|| = ||I - L(F'_y(x, \eta) - F'_y(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0))|| = [LF'_y(x_0, y_0) = I] = ||L(F'_y(x, \eta) - F'_y(x_0, y_0))|| \leqslant ||L|| \cdot \omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0))$ где $\omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0)) := \sup\limits_{||x - x_0|| \leqslant \delta, ||y - y_0|| \leqslant \varepsilon} ||F'_y(x, y) - F'_y(x_0, y_0)||$.

Отметим, что в силу 3-го условия

$$\omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0)) \to 0 \text{ при } \delta, \varepsilon \to +0. \qquad (6.3.1)$$

3. Поскольку $||y_0 - (A(x))(y)|| =$

$$= ||y_0 - (A(x))(y_0) + (A(x))(y_0) - (A(x))(y)|| \leqslant$$

$$\leqslant ||y_0 - (A(x))(y_0)|| + ||L|| \cdot \omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0))||y - y_0||, \text{ а}$$

$$||y_0 - (A(x))(y_0)|| = ||LF(x, y_0)|| \overset{F(x_0, y_0) = 0}{=}$$

$$= ||L(F(x, y_0) - F(x_0, y_0))|| \leqslant ||L|| \cdot \omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0), \text{ где}$$

$$\omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0) := \sup_{||x - x_0|| \leqslant \delta} ||F(x, y_0) - F(x_0, y_0)||, \text{ то}$$

$$||y_0 - (A(x))(y)|| \leqslant ||L||(\varepsilon \cdot \omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0)) + \omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0)).$$

Отметим, что в силу 2-го условия

$$\omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0) \underset{\delta \to +0}{\longrightarrow} 0. \qquad (6.3.2)$$

4. Чтобы отображение $A(x)$ было отображением $B[y_0, \varepsilon]$ в себя, достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$||L||(\varepsilon \cdot \omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0)) + \omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0)) \leqslant \varepsilon, \qquad (6.3.3)$$

а для сжимаемости этого отображения достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$||L||\omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0)) < 1. \qquad (6.3.4)$$

Отметим, что $\omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0))$ и $\omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0)$ убывают при убывании δ и ε.

В силу соотношения (6.3.1) существуют δ_1 и ε_1 такие, что

$$\alpha := ||L||\omega((\delta_1, \varepsilon_1); F'_y, (x_0, y_0)) < 1.$$

Тогда $\forall\, \delta \in (0; \delta_1)\ \ \forall\, \varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$ выполняется неравенство (6.3.4) и

$$||L||(\varepsilon\omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0)) + \omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0)) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\alpha + ||L||\omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0).$$

Таким образом, для выполнения неравенства (6.3.3) достаточно потребовать выполнения неравенства $\varepsilon\alpha + ||L||\omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0) \leqslant \varepsilon$, которое равносильно следующему неравенству:

$$\omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0) \leqslant \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{||L||}. \tag{6.3.5}$$

В силу условия (6.3.3) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$ существует $0 < \delta(\varepsilon)$ — решение неравенства (6.3.5).

Возьмем $\widetilde{\varepsilon}$, $\widetilde{\varepsilon}_1$: $0 < \widetilde{\varepsilon}_1 < \widetilde{\varepsilon} < \varepsilon_1$, а $\widetilde{\delta} = \delta(\widetilde{\varepsilon}_1) < \delta_1$.

5. По теореме Банаха о сжимающем отображении (см., например, [3, теорема 1.7.3])

$$\forall\, x \in U(x_0, \widetilde{\delta})\, \exists!\, y \in B[y_0, \widetilde{\varepsilon}_1] \subset U(y_0, \widetilde{\varepsilon}) : \ (A(x))(y) = y,$$

т. е. $F(x, y) = 0$.

Тем самым определено отображение $f(x) := y$ и $||f(x_0) - y_0|| \leqslant \varepsilon$ при $||x - x_0|| < \delta(\varepsilon)$, если $\delta(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству (6.3.5). ∎

Теорема 6.3.2 (о локальной обратимости дифференцируемого отображения). *Пусть $f : D(f) \subset Y \to X$, X, Y — банаховы пространства и выполнены следующие условия:*

1. $y_0 \in \overset{\circ}{D}(f)$ *и* $f(y_0) = x_0$;
2. f *непрерывна в точке* y_0;
3. $y_0 \in \overset{\circ}{D}(f')$ *и* f' *непрерывно в точке* y_0;
4. $f'(y_0)$ *непрерывно обратим.*

Тогда $\exists \widetilde{\varepsilon} > 0$ $\exists \widetilde{\delta} > 0$ *такие, что* f *обратимо в* $U(x_0, \widetilde{\delta})$, *т. е. существует* $f^{-1} : U(x_0, \widetilde{\delta}) \to U(y_0, \widetilde{\varepsilon})$ *причем отображение* f^{-1} *непрерывно в точке* x_0.

Действительно, это следует из теоремы 6.3.1, примененной к $F(x, y) := x - f(y)$. ∎

Теорема 6.3.3 (о дифференцируемости неявно заданного отображения). *Если дополнительно к условиям теоремы* 6.3.1

отображение F дифференцируемо по x в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и F дифференцируемо в точке (x_0, y_0), то отображение f, заданное неявно уравнением $F(x, y) = 0$, дифференцируемо в точке x_0 и

$$f'(x_0) = -(F'_y(x_0, y_0))^{-1} F'_x(x_0, y_0).$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $P := -(F'_y(x_0, y_0))^{-1} F'_x(x_0, y_0)$, $\triangle y := f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$. Тогда при всех малых $\triangle x$ $0 \equiv F(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\triangle x + F'_y(x_0, y_0)\triangle y + (||\triangle x|| + ||\triangle y||) \cdot \alpha(\triangle x, \triangle y)$, где $\lim\limits_{(\triangle x, \triangle y) \to 0} \alpha(\triangle x, \triangle y) = 0$. Отсюда

$$\triangle y = P\triangle x + (||\triangle x|| + ||\triangle y||)\beta(\triangle x, \triangle y), \tag{6.3.6}$$

где $\beta(\triangle x, \triangle y) := -(F'_y(x_0, y_0))^{-1}\alpha(\triangle x, \triangle y)$. Из (6.3.6) получим, что $||\triangle y|| \leqslant ||\triangle x||(||P|| + ||\beta||) + ||\triangle y|| \cdot ||\beta||$. Отсюда $||\triangle y|| \leqslant \dfrac{||P|| + ||\beta(\triangle x, \triangle y)||}{1 - ||\beta(\triangle x, \triangle y)||} ||\triangle x|| \leqslant K \cdot ||\triangle x||$ при некотором K, поскольку $\dfrac{||P|| + ||\beta(\triangle x, \triangle y)||}{1 - ||\beta(\triangle x, \triangle y)||} \to ||P||$ при $(\triangle x, \triangle y) \to 0$. Таким образом,

$$\frac{1}{||\triangle x||} ||f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) - P\triangle x|| \leqslant (1 + K)||\beta|| \to 0$$

при $\triangle x \to 0$, т. е. f дифференцируемо в точке x_0 и $f'(x_0) = P$. ∎

§ 4. Условный локальный экстремум

Здесь мы рассмотрим задачу о нахождении точек локального экстремума вещественного функционала φ при условии $\Phi(x) = 0$ и получим необходимые условия локального экстремума.

Утверждение 6.4.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$, $\varphi : D(\varphi) \subset X \to \mathbb{R}$, $\Phi : D(\Phi) \subset X \to Y$, φ и Φ дифференцируемы в точке x_0, и x_0 — точка условного локального экстремума $\varphi(x)$ при $\Phi(x) = 0$. Тогда для любого отображения $\alpha : (-\delta; \delta) \to X$, дифференцируемого в точке $t = 0$ и такого, что $\alpha(0) = x_0$ и $\Phi\big(\alpha(t)\big) \equiv 0$ на $(-\delta; \delta)$, справедливо равенство $\langle \alpha'(0), \varphi'(x_0) \rangle = 0$. При этом $\alpha'(0) \in Ker\, \Phi'(x_0)$.*

Доказательство. В этом случае у функции $f(t) := \varphi(\alpha(t))$ точка $t = 0$ есть точка локального эктремума и по теореме Ферма $0 = f'(0) = \varphi'(x_0)(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \varphi'(x_0) \rangle$. А в силу тождества $\Phi(\alpha(t)) \equiv 0$ получим, что $\Phi'(x_0)(\alpha'(0)) = 0$. ∎

Теорема 6.4.1 (Люстерник Л.А.). *Пусть X, Y — банаховы пространства, $\Phi : D(\Phi) \subset X \to Y$, $\Phi(x_0) = 0$, Φ непрерывно в окрестности точки x_0, Φ строго дифференцируемо в точке x_0 и $Im\, \Phi'(x_0) = Y$. Тогда $\exists\, \delta > 0$, $\exists\, K > 0$, $\exists\, \eta : B(x_0, \delta) \to X$ такое, что*

$$\forall\, x \in B(x_0, \delta) \;\; \Phi(x + \eta(x)) \equiv 0 \text{ и } ||\eta(x)|| \leqslant K ||\Phi(x)||.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_0 = 0$.

1. Обозначим $A := \Phi'(0)$ Тогда $\widetilde{A} : X/Ker\, A \to Y$, где $\widetilde{A}(\widetilde{x}) := Ax$ по утверждению 5.1.4 есть непрерывная биекция $X/Ker\, A$ на Y, и по теореме Банаха об обратном операторе существует $\widetilde{A}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X/Ker\, A)$. Рассмотрим отображение $R := \pi_R \circ \widetilde{A}^{-1} : Y \to X$. Тогда $A \circ R = I_Y$ и в силу утверждения 5.1.3.6

$$\forall\, y \in Y \qquad ||R(y)|| \leqslant 2||\widetilde{A}^{-1}|| \cdot ||y|| =: C||y||. \tag{6.4.1}$$

2. В силу непрерывности отображения Φ в окрестности точки $x = 0$ и строгой дифференцируемости его в точке $x = 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что Φ непрерывно в $B(0, \varepsilon)$ и

$$\begin{gathered} \forall\, x, x' \in B(0, \varepsilon) \\ ||\Phi(x) - \Phi(x') - A(x - x')|| \leqslant \frac{1}{2C}||x - x'||. \end{gathered} \tag{6.4.2}$$

3. В силу непрерывности Φ в точке $x = 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall\, x \in B(0, \delta) \qquad ||x|| + 2C||\Phi(x)|| < \varepsilon. \tag{6.4.3}$$

4. Возьмем произвольное $x \in B(0, \delta)$ и рассмотрим итерационный процесс:

$$\xi_0 := x \qquad \xi_{n+1} := \xi_n - R\big(\Phi(\xi_n)\big). \tag{6.4.4}$$

Отметим, что в силу равенства $A \circ R = I_Y$

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_+ \qquad A(\xi_{n+1} - \xi_n) + \Phi(\xi_n) = 0. \tag{6.4.5}$$

5. $||\xi_{n+1} - \xi_n|| \overset{(6.4.4)}{=} ||R\big(\Phi(\xi_n)\big)|| \overset{(6.4.1)}{\leqslant} C||\Phi(\xi_n)|| \overset{(6.4.5)}{=}$ $= C||\Phi(\xi_n) - \Phi(\xi_{n-1}) - A(\xi_n - \xi_{n-1})|| \overset{(6.4.2)}{\leqslant} \frac{1}{2}||\xi_n - \xi_{n-1}|| \leqslant$ $\leqslant \ldots \leqslant \dfrac{1}{2^n}||\xi_1 - \xi_0||$. Итак,

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_+ \qquad ||\xi_{n+1} - \xi_n|| \leqslant \frac{1}{2^n}||\xi_1 - \xi_0||. \tag{6.4.6}$$

6. В силу (6.4.6) имеем $||\xi_{n+p} - \xi_n|| \leqslant ||\xi_{n+p} - \xi_{n+p-1}|| +$ $+ \ldots + ||\xi_{n+1} - \xi_n|| \overset{(6.4.6)}{\leqslant} \displaystyle\sum_{m=n}^{\infty} \frac{||\xi_1 - \xi_0||}{2^m} = \frac{||\xi_1 - \xi_0||}{2^{n-1}} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\{\, \xi_n \,\}$ фундаментальна $\Longrightarrow \{\, \xi_n \,\}$ сходится.

7. Определим $\eta(x)$ формулой $\eta(x) := \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n - x$. Используя неравенство из предыдущего пункта, получим, что $||\xi_n - x|| =$ $= ||\xi_n - \xi_0|| \leqslant 2||\xi_1 - x||$. Переходя в нем к пределу, получим: $||\eta(x)|| \leqslant 2||\xi_1 - x|| \overset{(6.4.4),(6.4.1)}{\leqslant} 2C||\Phi(x)||$. Поскольку

$$||\eta(x) + x|| \leqslant ||x|| + ||\eta(x)|| \leqslant ||x|| + 2C||\Phi(x)|| \overset{(6.4.3)}{<} \varepsilon,$$

то Φ непрерывна в точке $\eta(x) + x$. Тогда, переходя в (6.4.5) к пределу, получим, что $\Phi\big(\eta(x) + x\big) = 0$. ∎

Теорема 6.4.2 (о касательном пространстве). *Пусть* $\Phi : D(\Phi) \subset X \to Y$, *где* X, Y — *банаховы пространства,* $\Phi(x_0) = 0$, Φ *непрерывно в окрестности точки* x_0, *строго дифференцируемо в точке* x_0 *и* $Im\,\Phi'(x_0) = Y$. *Тогда* $\forall \overline{x} \in Ker\,\Phi'(x_0)\ \exists \alpha : (-\delta;\delta) \to X\ : \alpha(0) = x_0,\ \alpha'(0) = \overline{x}$ *и* $\Phi(\alpha(t)) \equiv 0$ *на* $(-\delta;\delta)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\eta(x)$ из теоремы 6.4.1. Определим отображение α по формуле

$$\alpha(t) := x_0 + t\overline{x} + \eta(x_0 + t\overline{x}).$$

Тогда при достаточно малых t $\Phi\big(x_0 + t\overline{x} + \eta(x_0 + t\overline{x})\big) \equiv 0$. Но

$$||\eta(x_0 + t\overline{x})|| \leqslant K||\Phi(x_0 + t\overline{x})|| = K||\Phi(x_0 + t\overline{x}) - \Phi(x_0)|| =$$

$$= K\big\|\Phi'(x_0)t\overline{x} + ||t\overline{x}|| \cdot \beta(t\overline{x};x_0)\big\| = K|t| \cdot ||\overline{x}|| \cdot ||\beta(t\overline{x};x_0)|| = o(t)$$

при $t \to 0$. Таким образом $\eta(x_0 + t\overline{x})$ дифференцируемо при $t = 0$ и

$$\frac{d}{dt}\eta(x_0 + t\overline{x})\big|_{t=0} = 0,$$

поэтому $\alpha(0) = x_0$ и $\alpha'(0) = \overline{x}$. ■

Теорема 6.4.3. *Пусть* X, Y — *банаховы пространства над полем* $\mathbb{R}$, $\varphi : D(\varphi) \subset X \to \mathbb{R}$, $\Phi : D(\Phi) \subset X \to Y$, φ *и* Φ *дифференцируемы в* $B(x_0, \delta_0) \subset D(\varphi) \cap D(\Phi)$, Φ *непрерывно дифференцируемо в точке* x_0, $\Phi(x_0) = 0$, $Im\,\Phi'(x_0) = Y$ *и* x_0 — *точка условного локального экстремума* $\varphi(x)$ *при* $\Phi(x) = 0$. *Тогда* $\varphi'(x_0) \in (Ker\,\Phi'(x_0))^{\perp}$.

Доказательство этой теоремы следует и утверждения 6.4.1 и теоремы 6.4.2. ■

Теорема 6.4.4 (метод множителей Лагранжа). *Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы. Тогда найдется*

$y_0^* \in Y^*$ (*аналог "множителей Лагранжа"*) *такой, что функционал Лагранжа*

$$L(x, y^*) := \varphi(x) - \langle \Phi(x), y^* \rangle$$

удовлетворяет в точке (x_0, y_0^*) *следующим равенствам:*

$$L'_x(x_0, y_0^*) = 0,\ \ L'_{y^*}(x_0, y_0^*) = 0.$$

Доказательство. Поскольку $L'_{y^*}(x_0, y_0^*) = [\Phi(x_0)] = 0$ и

$$L'_x(x_0, y_0^*) = \varphi'(x_0) - y_0^*\Phi'(x_0) = \varphi'(x_0) - (\Phi'(x_0))^* y_0^*,$$

то сформулированное в теореме заключительное условие эквивалентно следующему: $\exists\, y_0^* \in Y^*\ :\ \varphi'(x_0) = (\Phi'(x_0))^* y_0^*$, т. е. $\varphi'(x_0) \in Im\,(\Phi'(x_0))^*$.

Но по предыдущей теореме $\varphi'(x_0) \in (Ker\,\Phi'(x_0))^{\perp} =$ [по теореме 4.2.3.6] $= Im\,(\Phi'(x_0))^*$. ■

Список литературы

1. *Банах С.* Теория линейных операций. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2001.

2. *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Краткий курс теории экстремальных задач. М: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

3. *Данилин А.Р.* Функциональный анализ для бакалавров. Учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2012.

4. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

5. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

6. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа: Учебное пособие для студентов механико-математического факультета. — Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006.

7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

8. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.

9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

10. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

11. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

12. Математическая энциклопедия: В 5 т. М.: Совет. энцикл., 1977—1985.

13. *Ремпель Ш., Шульц Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1986.

14. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

15. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

16. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.

17. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решений некорректных задач. М.: Наука, 1974.

18. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1993.

19. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. М.: МНЦМО, 2004.

20. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. М.: Мир, 1987. Т. 3.

21. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.

22. *James R.C.* A non-reflexive Banach spaces isometric with its second conjugate spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. (USA). 1951. Vol. 37. P. 174—177.