Федеральное агентство по образованию
Уральский федеральный университет

А. Р. Данилин

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

**Учебное пособие
(исправленный и переработанный электронный вариант)**

Екатеринбург 2011

УДК 517.98(075.8)
Д182

Рецензенты:

кафедра вычислительной математики Челябинского государственного университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Павленко);

доктор физико-математических наук, профессор Т. Ф. Филиппова (Институт математики и механики УрО РАН)

Данилин А.Р. Функциональный анализ: учеб. пособие. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та. 2007. – 188 с.

ISBN

В пособии излагается курс функционального анализа и интегральных уравнений. Приводятся примеры и упражнения для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов математических специальностей классических университетов.

ISBN ?–????–????–?

Содержание

Предисловие

Данное учебное пособие предназначено для студентов математических факультетов, изучающих курс "Функциональный анализ и интегральные уравнения".

Все сформулированные утверждения (кроме тех, где есть явная ссылка на другие источники) студенты, претендующие на повышенные оценки, должны уметь доказывать. Как правило, доказательства утверждений, получающиеся непосредственным применением соответствующих определений, не приводятся. Изложение материала в значительной степени замкнуто.

В пособии используются следующие обозначения и соглашения.

Запись $A := B$ или $B =: A$ означает, что A определяется посредством B.

Для обозначения множеств натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел используются символы $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Символ $\mathbb{P}$ используется в качестве общего обозначения для $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

$\mathcal{B}(X)$ — множество всех подмножеств множества X, или *булеан*.

Математическая структура $< X, \mathcal{R} >$, где X — множество, а $\mathcal{R}$ — набор различных отображений и отношений, часто обозначается одним символом X.

Множество, на котором определена математическая структура, часто обозначается так же, как и структура, например, обозначение нормированного пространства $C[a;b]$ часто используется для обозначения множества непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций (на котором это нормированное пространство определено).

$f(x)$ — значение отображения (функции) f в точке x, а $f(\cdot)$ — сама функция f (используется для подчеркивания характера объекта, обозначенного символом f).

Если $f : D(f) \subset X \to Y$, то $Im\, f := f(D(f))$.

Часто у семейства множеств или элементов множества не указывается множество индексов, например, вместо $\{\, e_\alpha \,\}_{\alpha\in A}$ и $\bigcup\limits_{\alpha\in A} F_\alpha$ пишется $\{\, e_\alpha \,\}$ и $\bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha$ соответственно.

$< \{\, e_\alpha \,\} >$ – линейная оболочка системы векторов $\{\, e_\alpha \,\}$ в линейном пространстве.

$\delta_{k,n}$ – символ Кронекера.

Если элементами некоторого пространства являются классы эквивалентных функций, то через $x(\cdot)$ обозначается любой представитель класса (элемента) x $(x(\cdot) \in x)$.

Если в утверждении, сформулированном с помощью предикатов, не указаны кванторы, то ко всем переменным подразумевается квантор всеобщности.

Все вводимые термины при первом упоминании выделяются *курсивом*.

Комментарии внутри цепочки формул даются либо внутри квадратных скобок, либо над символами отношений.

Если в теореме сформулировано несколько утверждений, то номер доказываемого утверждения заключается в рамку. Различные этапы доказательства конкретного утверждения нумеруются без заключения номера в рамку.

Символом $\blacksquare$ обозначается окончание доказательства.

В учебном пособии без соответсвующих ссылок упоминаются следующие ученые:

Асколи Джулио (1843—1896) — итальянский математик;

Арцела Чезаре (1847—1912) — итальянский математик;

Банах Стефан (1892—1945) — польский математик (с 1924 г. работал во Львове);

Бессель Фридрих Вильгельм (1784—1846) — немецкий математик и астроном;

Буняковский Виктор Яковлевич (1804—1889) — русский математик;

Бэр Рене (1874—1935) — французский математик;

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815—1897) — немецкий математик;

Вольтерра Вито (1860—1940) — итальянский математик;

Гейне Генрих Эдуард (1821—1881) — немецкий математик;

Гёльдер Отто Людвиг (1852—1937) — немецкий математик;

Гильберт Давид (1862—1943) — немецкий математик;

Гато Рене Эжен (1890—1914 г.) — французский математик, погиб на Первой мировой войне;

Грин Джордж (1793—1841) — английский математик и физик;

Кантор Георг (1845—1918) — немецкий математик (родился в Петербурге);

Коши Огюстен Луи (1789—1857) — французский математик;

Колмогоров Андрей Николаевич (1903—1987) — советский математик;

Кронекер Леопольд (1823—1891) — немецкий математик;

Лагранж Жозеф Луи (1736—1813) — французский математик и механик;

Лебег Анри Луи (1875—1941) — французский математик;

Липшиц Рудольф Отто Сигизмунд (1832—1903) — немецкий математик;

Лиувилль Жозеф (1809—1882) — французский математик и механик;

Минковский Герман (1864—1909) — немецкий математик и физик;

Никольский Сергей Михайлович (род. в 1905 г.) — российский математик;

Парсеваль М. А. (1755—1836) — французский математик;

Риман Георг Фридрих Бернхард (1826—1866) — немецкий математик;

Рисс Фридьёш (1880—1956) — венгерский математик;

Рисс Марсель (1886—1969) — американский математик венгерского происхождения (брат Ф. Рисса);

Стеклов Владимир Андреевич (1864—1926) — русский математик и механик;

Тейлор Брук (1685—1731) — английский математик;

Ферма Пьер (1601—1665) — французский математик;

Фишер Рональд Эйлмер (1890—1962) — английский математик, статистик и генетик;

Фредгольм Эрик Ивар (1866—1927) — шведский математик;

Фреше Морис Рене (1878—1973) — французский математик;

Фубини Гвидо (1879—1943) — итальянский математик;

Фурье Жан Батист Жозеф (1768—1830) — французский математик;

Хан (Ган) Ганс (1879—1954) — австрийский математик;

Хаусдорф Феликс (1868—1942) — немецкий математик;

Цорн Макс Август (1906—1993) — американский математик немецкого происхождения;

Шаудер Юлиуш Павел (1896—1943) — польский математик;

Шварц Лоран (род. в 1915 г.) – французский математик;

Шмидт Эрхард (1876—1959) — немецкий математик;

Штейгауз Хуго Дионисий (1887—1972) — польский математик.

В заключение автор выражает свою благодарность всем сотрудникам кафедры математического анализа и теории функций УрГУ и своим студентам, проделавшим огромную работу по улучшению электронного варианта данного пособия.

Глава 1
Метрические и топологические пространства

1. Метрика, норма, скалярное произведение

Определение. Отображение $\rho : X^2 \to \mathbb{R}$ называется *метрикой на* X, если
1. $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.
3. $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ — *неравенство треугольника.*

Следствие. *Если* ρ *— метрика на* X*, то* $\rho(x,y) \geqslant 0$.

Определение. Если ρ — метрика на X, то $< X, \rho >$ называется *метрическим пространством.*

Замечание. Метрическое пространство — это пара $< X, \rho >$. Задавая на X различные метрики, мы будем получать различные метрические пространства.

Пример 1.1. $X := \mathbb{R}$, $\rho(x,y) := |x - y|$.

Пример 1.2. X — произвольное множество, $\rho_T(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ — *тривиальная метрика.*

Пример 1.3. Если $< X, \rho >$ — метрическое пространство, а $X_1 \subset X$, то $< X_1, \rho >$ — тоже метрическое пространство, которое называется *подпространством исходного метрического пространства.*

Пример 1.4. Если ρ — метрика на X, то метриками на X будут и следующие отображения:

$$\rho_1(x,y) := \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)}, \quad \rho_2(x,y) := \min\{\rho(x,y), 1\}.$$

Пример 1.5. Если ρ_i — метрика на X_i $(i = 1,2)$, то

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2),$$

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \max\{\rho_1(x_1,y_1),\ \rho_2(x_2,y_2)\},$$

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \rho_2^2(x_2,y_2)} \ —$$

метрики на $X_1 \times X_2$.

Определение. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}$ называется *нормой на* X, если
1. $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ $(x \in X,\ \lambda \in \mathbb{P})$.
3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ — *неравенство треугольника.*

Следствие. *Если* $||\cdot||$ *— норма на линейном пространстве* X*, то*
1. $||x|| \geqslant 0$.
2. $||-x|| = ||x||$.
3. $\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leqslant ||x - y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Определение. Если $|| \cdot ||$ — норма на линейном пространстве X, то $< X, || \cdot || >$ называется *нормированным пространством.*

Замечание. Нормированное пространство — это пара $< X, || \cdot || >$. Задавая на линейном пространстве X различные нормы, мы будем получать различные нормированные пространства.

Пример 1.6. $X := \mathbb{P}$, $||x|| := |x|$.

Пример 1.7. $X := \mathbb{P}^k$, $||x||_\infty := \max\{\,|x_i| : i = 1,2,\ldots,k\,\}$. $c^k := < X, || \cdot ||_\infty >$.

Пример 1.8. $X := \Big\{ \{x_n\} \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}} : \{x_n\}$ ограничена $\Big\}$, $||x||_\infty := \sup\{\,|x_n| : n \in \mathbb{N}\,\}$. $m := < X, || \cdot ||_\infty >$.

Пример 1.9. $X := \Big\{ \{x_n\} \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}} : \{x_n\}$ сходится $\Big\}$, $||x||_\infty := \sup\{\, |x_n| : n \in \mathbb{N}\,\}$. $c := < X, ||\cdot||_\infty >$.

Пример 1.10. $X := \Big\{ \{x_n\} \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}} : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0 \Big\}$, $||x||_\infty := \sup\{\, |x_n| : n \in \mathbb{N}\,\}$. $c_0 := < X, ||\cdot||_\infty >$.

Пример 1.11. $X := \Big\{ x(\cdot) : [a;b] \to \mathbb{P} : x(\cdot)$ ограничена на $[a;b] \Big\}$, $||x(\cdot)||_\infty := \sup\{\, |x(t)| : t \in [a;b]\,\}$. $M[a;b] := < X, ||\cdot||_\infty >$.

Пример 1.12. $X := \Big\{ x(\cdot) : [a;b] \to \mathbb{P} : x(\cdot)$ непрерывна на $[a;b] \Big\}$, $||x(\cdot)||_\infty := \max\{\, |x(t)| : t \in [a;b]\,\}$. $C[a;b] := < X, ||\cdot||_\infty >$.

Пример 1.13. $X := \Big\{ x(\cdot) : [a;b] \to \mathbb{P} : x(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $[a;b]$ k раз $\Big\}$, $||x(\cdot)|| := \sum\limits_{i=0}^{k} \max\{\, |x^{(i)}(t)| : t \in [a;b]\}$, $C^k[a;b] := < X, ||\cdot|| >$. $C[a;b] := C^0[a;b]$.

Пример 1.14. $X := \mathbb{P}^k$, $||x||_1 := \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|$. $l_1^k := < X, ||\cdot||_1 >$.

Пример 1.15. $X := \Big\{ \{x_n\} \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ сходится $\Big\}$, $||x||_1 := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$. $l_1 := < X, ||\cdot||_1 >$.

Пример 1.16. $X := \Big\{ x(\cdot) : [a;b] \to \mathbb{P} : x(\cdot)$ непрерывна на $[a;b] \Big\}$, $||x||_1 := \int\limits_a^b |x(t)|\, dt$, $\widetilde{L}_1[a;b] := < X, ||\cdot||_1 >$.

Утверждение 1.1. *Если $||\cdot||$ — норма на X, то $\rho(x,y) := ||x-y||$ есть метрика на X.*

Замечания. 1. Любое нормированное пространство есть метрическое пространство относительно метрики, порожденной нормой.

2. c_0 — подпространство метрического пространства c.

3. c — подпространство метрического пространства m.

4. $C[a;b]$ — подпространство метрического пространства $M[a;b]$.

Определение. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $(\cdot,\cdot) : X^2 \to \mathbb{P}$ называется *скалярным произведением на X*, если

1. $(x,x) \geqslant 0$.
2. $(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
3. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$ — *линейность по первому аргументу.*
4. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ — комплексное сопряжение.

Замечание. Если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то скалярное произведение симметрично и, следовательно, линейно и по второму аргументу. Таким образом, в этом случае $(\cdot,\cdot)$ есть *билинейное отображение.* Если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то $(z, \lambda x + \mu y) = \overline{\lambda}(z,x) + \overline{\mu}(z,y)$. В этом случае $(\cdot,\cdot)$ — *полуторалинейное отображение.*

Определение. Линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

Замечание. В отличие от [6] в [8] евклидовым пространством называется конечномерное вещественное пространство со скалярным произведением, а комплексное конечномерное пространство со скалярным произведением — *унитарным.* Бесконечномерное пространство со скалярным произведением в [8] называется *предгильбертовым.*

Пример 1.17. $(x,y) := \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \overline{y}_i$ — скалярное произведение в $X := \mathbb{P}^k$. $l_2^k := < X, (\cdot,\cdot) >$.

Пример 1.18. $(x(\cdot), y(\cdot)) := \int\limits_a^b x(t)\overline{y}(t)\, dt$ — скалярное произведение в линейном пространстве X непрерывных на $[a;b]$ функций со значениями в $\mathbb{P}$. $\widetilde{L}_2[a;b] := < X, (\cdot,\cdot) >$.

Теорема 1.1 (неравенство Коши — Буняковского). *Если X — евклидово пространство, то*

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}.$$

Доказательство. Если $(x,y) = 0$, то неравенство очевидно выполняется. В противном случае для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ квадратный трехчлен

$$(x + \lambda \cdot (x,y) \cdot y, x + \lambda \cdot (x,y) \cdot y)$$

неотрицателен, поэтому его дискриминант неположителен. ■

Следствие. *Если X — евклидово пространство, то $||x|| := \sqrt{(x,x)}$ — норма на X.*

Утверждение 1.2. *Если X — евклидово пространство, то*

$$|(x,y)| = \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \iff \text{вектора } x \text{ и } y \text{ линейно зависимы.}$$

Действительно, если $\sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \neq 0$, то указанное равенство эквивалентно тому, что при некотором λ справедливо следующее равенство: $x + \lambda \cdot (x,y) \cdot y = 0$.

Задание 1.1. Пусть X — евклидово пространство. Найдите условия на вектора x и y, при которых справедливо равенство $||x + y|| = ||x|| + ||y||$.

Замечания. 1. Евклидово пространство является нормированным пространством относительно нормы, порожденной скалярным произведением и, следовательно, метрическим пространством относительно метрики, порожденной этой нормой.

2. Взяв конкретные евклидовы пространства, будем получать конкретные неравенства Коши — Буняковского. Так в l_2^k это неравенство имеет вид

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i| \cdot |y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |y_i|^2}, \tag{1.1}$$

а в $\widetilde{L}_2[a;b]$ —

$$\int_a^b |x(t)| \cdot |y(t)|\, dt \leqslant \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\, dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2\, dt}. \tag{1.2}$$

Утверждение 1.3. *Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$ сходятся, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| \cdot |y_n|$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cdot |y_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2}. \tag{1.3}$$

Действительно, достаточно сделать предельный переход в неревенстве (1.1). ■

Пример 1.19. $X := \left\{ \{x_n\} \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \text{ сходится} \right\}$, $(x,y) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \overline{y_n}$. $l_2 := < X, (\cdot,\cdot) >$.

Теорема 1.2 (неравенство Гёльдера). *Пусть $p, q : p > 1$, $q > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i| \cdot |y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^q \right)^{1/q}. \tag{1.4}$$

Доказательство. 1. С помощью дифференциального исчисления показывается, что при $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ справедливо неравенство $\dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q} \geqslant u \cdot v$.

2. Пусть $A = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p}$, а $B = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |y_i|^q\right)^{1/q}$.

Если $A = 0 \vee B = 0$, то неравенство (1.4) очевидно.

В противном случае

$$\frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|}{B}\right)^q \geqslant \frac{|x_i|\cdot|y_i|}{A\cdot B}.$$

Для завершения доказательства осталось просуммировать эти неравенства. ∎

Следствие. *Пусть* $p, q : p > 1,\ q > 1,\ p^{-1} + q^{-1} = 1$.

1. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$ *сходятся, то сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|\cdot|y_n|$ *и справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\cdot|y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q} \text{ —} \tag{1.5}$$

неравенство Гёльдера для рядов.

2. *Если* $|x(\cdot)|^p$ *и* $|y(\cdot)|^q$ *интегрируемы на* $[a;b]$, *то*

$$\int_a^b |x(t)|\cdot|v(t)|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \text{ —} \tag{1.6}$$

неравенство Гёльдера для интегралов.

Замечание. При $p = q = 2$ неравенства Гёльдера переходят в соответствующие неравенства Коши — Буняковского.

Теорема 1.3 (неравенство Минковского). *Если* $p > 1$, *то*

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{1/p}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть $A = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p}$. Тогда

$$A^p = \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \ \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i| \overset{(1.4)}{\leq}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{1/p}\right) =$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{1/p}\right) \cdot A^{p-1}. \ \blacksquare$$

Следствие. *Пусть* $p > 1$. *Тогда*

1. $||x||_p := \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p}$ *— норма на* $X = \mathbb{P}^k$. $l_p^k := < X, ||\cdot||_p >$.

2. $||x||_p := \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ *— норма на* $X := \left\{ \{x_n\} \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ сходится} \right\}$. $l_p := < X, ||\cdot||_p >$.

3. $||x(\cdot)||_p := \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ *— норма в линейном пространстве* X *непрерывных на* $[a;b]$ *функций со значениями в* $\mathbb{P}$. $\widetilde{L}_p[a;b] := < X, ||\cdot||_p >$.

Определение. Пространство $L_p(a;b) :=$ нормированное пространство классов эквивалентности измеримых на $[a;b]$ функций $x(\cdot)$ таких, что $|x(\cdot)|^p$ суммируема на $[a;b]$, с нормой $||\widetilde{x}||_p := \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$.

Здесь $x(\cdot) \in \widetilde{x}$, а $x(\cdot) \sim y(\cdot) \Longleftrightarrow x(t) \overset{п.в.}{=} y(t)$.

2. Топология метрических пространств

Определения. Пусть X — метрическое пространство.

1. *Открытый шар* $:= B(a,r) := \{x \in X : \rho(x,a) < r\}$.
2. *Замкнутый шар* $:= B[a,r] := \{x \in X : \rho(x,a) \leqslant r\}$.

Утверждение 2.1 (свойства шаров в метрических пространствах). *Пусть X – метрическое пространство, $a_1 \in X$, $a_2 \in X$ и $r > 0$.*

1. *Если $a_1 \in B[a_2, r]$, то $B[a_1, r] \subset B[a_2, 2r]$ и $B[a_2, r] \subset B[a_1, 2r]$.*

2. *Если $B[a_1, r] \cap B[a_2, 2r] \neq \varnothing$, то $B[a_1, 3r] \subset B[a_2, 6r]$.*

3. *Если $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $B[a_1, r_1] \subset B[a_2, r_2]$ и $B[a_2, r_2] \setminus B[a_1, r_1] \neq \varnothing$, то $r_1 < 2r_2$.*

4. *Утверждения, аналогичные утверждениям 1 – 3, справедливы и для открытых шаров.*

Доказательство. $\boxed{2}$. Пусть $x_0 \in B[a_1, r] \cap B[a_2, 2r]$ и $\rho(x, a_1) \leqslant 3r$. Тогда

$$\rho(x, a_2) \leqslant \rho(x, a_1) + \rho(a_1, x_0) + \rho(x_0, a_2) \leqslant 3r + r + 2r = 6r. \quad \blacksquare$$

Определения. Пусть X — метрическое пространство.

1. $X \supset G$ — *открытое множество* :=

$$\forall\, x \in G\, \exists\, r > 0 \;\; B(x, r) \subset G.$$

2. x_0 — *внутренняя точка множества* M :=

$$\exists\, r > 0 \;\; B(x_0, r) \subset M.$$

3. *Окрестность точки* $x_0 := U(x_0) :=$ любое множество, для которого x_0 — внутренняя точка.

4. δ-*окрестность точки* $:= U(x_0, \delta) := B(x_0, \delta)$.

5. $\overset{\circ}{M}$ — *внутренность множества* := множество внутренних точек множества M.

6. x_0 — *предельная точка множества* M, если

$$\forall\, r > 0 \;\; M \cap (B(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing.$$

7. x_0 — *точка прикосновения множества* M, если

$$\forall\, r > 0 \;\; M \cap B(x_0, r) \neq \varnothing.$$

8. $M' :=$ множество предельных точек множества M.

9. $X \supset F$ — *замкнутое множество* $:= F' \subset F$.

10. $\overline{M} := M \cup M'$ — *замыкание множества* M (совпадает с множеством точек прикосновения множества M).

11. $S[a, r] := B[a, r] \setminus B(a, r)$ — *сфера.*

Замечания. 1. G — открытое $\Longleftrightarrow$ все точки множества G — внутренние.

2. Внутренняя точка множества всегда содержится в нем. Предельная точка множества M может не принадлежать множеству M.

Утверждение 2.2 (свойства открытых и замкнутых множеств). *В метрическом пространстве X справедливы следующие утверждения:*

1. *G_α — открытые множества $\Longrightarrow \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ — открытое множество.*

2. *$G_1, \ldots, G_k$ — открытые множества $\Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{k} G_i$ — открытое множество.*

3. *F_α — замкнутые множества $\Longrightarrow \bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ — замкнутое множество.*

4. *$F_1, \ldots, F_k$ — замкнутые множества $\Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ — замкнутое множество.*

5. *Множества X и $\varnothing$ являются и открытыми и замкнутыми.*

6. *M открыто $\Longleftrightarrow X \setminus M$ замкнуто; M замкнуто $\Longleftrightarrow X \setminus M$ открыто.*

7. *$\overset{\circ}{M} = \bigcup\{G : \; G \subset M, G$ — открытое множество$\}$ — наибольшее открытое множество, содержащееся в M.*

8. *$\overline{M} = \bigcap\{F : \; F \supset M, F$ — замкнутое множество$\}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее M.*

Следствие. M открыто $\Longleftrightarrow \overset{\circ}{M} = M$; M замкнуто $\Longleftrightarrow M = \overline{M}$.

Замечание. В $< X, \rho_T >$ все множества и открыты и замкнуты одновременно.

Определение. $\tau(\rho) := \{G : G$ — открыто$\}$ — *топология, порожденная метрикой.*

Утверждение 2.3. *Пусть* X — *метрическое пространство. Тогда*

1. $B(a, r)$ — *открытое множество.*
2. $B[a, r]$ — *замкнутое множество.*

Пример 2.1. В $< X, \rho_T >$ $(|X| > 1)$ $B(a, 1) = \{a\}$, а $B[a, 1] = X$, т. е. $\overline{B(a, 1)} \neq B[a, 1]$.

Пример 2.2. В метрическом пространстве

$$< [1; +\infty), \rho(x, y) := |x^{-1} - y^{-1}| >$$

имеет место включение $B(21, 0.3) \subset B(5, 0.2)$, т. е. шар большего радиуса лежит в шаре меньшего радиуса.

Пример 2.3. В $< X, \rho_T >$ $S[a, 0.5] = \varnothing$.

Задание 2.1. Пусть X — нормированное пространство и $X \neq \{0\}$. Докажите, что при $r > 0$ справедливы следующие утверждения:

1. $\overline{B(a, r)} = B[a, r]$.
2. $S[a, r] \neq \varnothing$.
3. $B(a_1, r_1) \subset B(a_2, r_2) \Longrightarrow r_1 \leqslant r_2$.

Определение. Окрестностью $U(M)$ множества M в метрическом пространстве X называется множество из X, удовлетворяющее следующему свойству:

$$\exists\, G \in \tau(\rho)\ M \subset G \subset U(M).$$

Утверждение 2.4. *В метрическом пространстве справедливы следующие утверждения:*

1. $\forall\, x, y : x \neq y\, \exists\, U(x), U(y)\ \ U(x) \cap U(y) = \varnothing$.
2. *Если* $x_0 \notin F$ *и* F — *замкнутое множество, то* $\exists\, U(x_0), U(F)\ \ U(x_0) \cap U(F) = \varnothing$.
3. *Если* F_1, F_2 — *замкнутые множества и* $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, *то* $\exists\, U(F_1), U(F_2)\ \ U(F_1) \cap U(F_2) = \varnothing$.

Доказательство. $\boxed{1}$. В качестве $U(x)$ и $U(y)$ можно соответственно взять $B(x, r)$ и $B(y, r)$, где $r = \rho(x, y)/3$.

$\boxed{2}$. $x_0 \notin F \Longrightarrow x_0$ не предельная для $F \Longrightarrow \exists\, r(x_0) > 0\ \ U(x_0, r_1(x_0)) \cap F = \varnothing$. В качестве $U(x_0)$ и $U(F)$ можно соответственно взять $B(x_0, r)$ и $\bigcup\limits_{x \in F} B(x, r)$, где $r = r(x_0)/3$.

$\boxed{3}$. $U(F_i) := \bigcup\limits_{x \in F_i} B(x, r_j(x)/3)$ $(i + j = 3)$, где при $x \in F_i$ $U(x, r_j(x)) \cap F_j = \varnothing$. ■

Следствие. *Если* $x_0 \notin F \subset X$ — *метрическое пространство и* F — *замкнутое множество, то*

$$\rho(x_0, F) := \inf\{\, \rho(x, x_0) : x \in F \,\} > 0.$$

Определение. Множество M в метрическом пространстве X называется *ограниченным*, если $M \subset B[a, r]$ при некоторых $a \in X$ и $r > 0$.

Пример 2.4. В $< X, \rho_T >$ все множества ограничены.

3. Предел и непрерывность в метрических пространствах

Определения. 1. Пусть X — метрическое пространство, $\{\, x_n \,\} \subset X$ и $x_0 \in X$. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 := x_n \to x_0 :=$

$$\forall\, U(x_0)\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N\ \ x_n \in U(x_0).$$

2. Если $\exists\, x_0 \in X\ \ x_n \to x_0$, то $\{\, x_n \,\}$ называется *сходящейся.*

Определения. Пусть X и Y — метрические пространства, а $f : X \to Y$.

1. Если x_0 предельная для X, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 :=$

$$\forall\, U(y_0)\, \exists\, U(x_0)\, \forall\, x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}\ \ f(x) \in U(y_0).$$

2. f называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$, если

$$\forall\, U(f(x_0))\, \exists\, U(x_0)\, \forall\, x \in U(x_0)\ \ f(x) \in U(f(x_0)).$$

3. f называется *непрерывной на множестве* $M \subset X$, если f непрерывна в каждой точке этого множества.

Замечание. На последовательность $\{\, x_n \,\} \subset X$ можно смотреть как на отображение $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ в X, а в $\overline{\mathbb{N}}$ ввести следующую метрику: $\rho(x, \infty) := 1/x$, $\rho(x, y) := |x^{-1} - y^{-1}|$ $(x \neq \infty \neq y)$. Тогда предел последовательности — это обычный предел функции при $n \to \infty$.

Утверждение 3.1 (свойства предела в метрических и нормированных пространствах). *Пусть X и Y — метрические пространства, а $f : X \to Y$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $x_n \to x_0 \Longleftrightarrow \rho(x_n, x_0) \to 0.$
2. $(x_n \to \widetilde{x} \wedge x_n \to \widehat{x}) \Longrightarrow \widetilde{x} = \widehat{x}.$
3. $x_n \to x_0 \Longrightarrow x_{n_k} \to x_0.$
4. $\{\, x_n \,\}$ *— сходящаяся* $\Longrightarrow \{\, x_n \,\}$ *— ограничена.*
5. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \Longleftrightarrow \forall\, \{\, x_n \,\}\ \ (x_0 \neq x_n \to x_0 \Longrightarrow f(x_n) \to y_0).$
6. $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_1 \wedge \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2.$
7. f *непрерывна в точке* $x_0 \Longleftrightarrow$

$$\forall\, \{\, x_n \,\}\ \ (x_n \to x_0 \Longrightarrow f(x_n) \to f(x_0)).$$

8. $\rho(\cdot, \cdot)$ *непрерывно на* X^2.
9. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда $x_n \to x_0 \Longrightarrow ||x_n|| \to ||x_0||$, т. е. норма является непрерывной на X функцией.*

10. *Пусть X — нормированное пространство, $\{\, x_n \,\}, \{\, \overline{x}_n \,\} \subset X$, $x_n \to x_0$, $\overline{x}_n \to \overline{x}_0$, $\{\, \lambda_n \,\}, \{\, \overline{\lambda}_n \,\} \subset \mathbb{P}$, $\lambda_n \to \lambda_0$, $\overline{\lambda}_n \to \overline{\lambda}_0$. Тогда $\lambda_n x_n + \overline{\lambda}_n \overline{x}_n \to \lambda_0 x_0 + \overline{\lambda}_0 \overline{x}_0$, т. е. линейные операции в нормированном пространстве являются непрерывными функциями своих аргументов.*
11. *Пусть X — евклидово пространство, $\{\, x_n \,\}, \{\, \overline{x}_n \,\} \subset X$, $x_n \to x_0$, $\overline{x}_n \to \overline{x}_0$. Тогда $(x_n, \overline{x}_n) \to (x_0, \overline{x}_0)$, т. е. скалярное произведение в евклидовом пространстве непрерывно на X^2.*

Утверждение 3.2 (свойства непрерывных функций в метрических пространствах).

1. *Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, X, Y, Z — метрические пространства, f непрерывна в точке x_0, а g непрерывна в точке $f(x_0)$. Тогда $g(f(\cdot))$ непрерывна в точке x_0.*
2. *Пусть $f : X \to Y$, X, Y — метрические пространства. Тогда f непрерывна на $X \Longleftrightarrow$*

$$\forall\, G \in \tau(\rho_Y)\ \ f^{-1}(G) \in \tau(\rho_X).$$

3. *Пусть $f : X \to Y$, X, Y — метрические пространства. Тогда f непрерывна на $X \Longleftrightarrow$*

$$\forall\, F \subset Y\ \ (F \text{ — замкнуто} \Longrightarrow f^{-1}(F) \text{ — замкнуто}).$$

Утверждение 3.3 (характеризация открытых и замкнутых множеств). *Пусть $M \subset X$ и X — метрическое пространство.*

1. M *открыто* $\Longleftrightarrow$

$$\big((x_n \to x_0 \in M) \Longrightarrow \exists\, n_0\, \forall\, n > n_0\ \ x_n \in M\big).$$

2. M *замкнуто* $\Longleftrightarrow \big((\{\, x_n \,\} \subset M \wedge x_n \to x_0) \Longrightarrow x_0 \in M).$

Пример 3.1. Во всех l_p^k и c^k сходимость покоординатная, т. е. $(x_{1,n}, \ldots, x_{k,n}) = x_n \to x_0 = (x_{1,0}, \ldots, x_{k,0}) \Longleftrightarrow$

$$\forall\, i \in \overline{1, k}\ \ x_{i,n} \to x_{i,0}.$$

Пример 3.2. В $C[a;b]$ сходимость — это равномерная на $[a;b]$ сходимость.

Пример 3.3. $(x_n \to x_0$ в $< X, \rho_T >) \Longleftrightarrow \exists\, n_0 \,\forall\, n > n_0\ x_n = x_0$.

Пример 3.4. Пусть $\{ x_n(\cdot) \} \subset C[a;b]$ и $x_0(\cdot) \in C[a;b]$. Если $x_n(\cdot) \xrightarrow[C[a;b]]{} x_0(\cdot)$, то $x_n(\cdot) \xrightarrow[\widetilde{L}_1[a;b]]{} x_0(\cdot)$.

Пример 3.5. Пусть $x_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 2 - nt, & 1/n \leqslant t \leqslant 2/n, \\ 0, & 2/n \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$

Тогда $||x_n(\cdot)||_{\widetilde{L}_1[0;2]} = 1/n \to 0$, а $||x_n(\cdot)||_{C[0;2]} = 1$.

Пример 3.6. Если $< X, \rho >$ — метрическое пространство, то $x_n \xrightarrow[\rho_T]{} x_0 \Longrightarrow x_n \xrightarrow[\rho]{} x_0$.

Определения. Пусть ρ_1 и ρ_2 — метрики, заданные на одном множестве X.

1. Говорят, что ρ_1 *не слабее* ρ_2 (ρ_2 *не сильнее* ρ_1), если

$$x_n \xrightarrow[\rho_1]{} x_0 \Longrightarrow x_n \xrightarrow[\rho_2]{} x_0.$$

2. Говорят, что ρ_1 *сильнее* ρ_2 (ρ_2 *слабее* ρ_1), если ρ_1 не слабее ρ_2 и найдется $\{ x_n \}$ такая, что $x_n \xrightarrow[\rho_2]{} x_0$, но $x_n \not\xrightarrow[\rho_1]{} x_0$.

3. Говорят, что ρ_1 и ρ_2 *эквивалентны*, если ρ_1 не слабее ρ_2 и ρ_2 не слабее ρ_1, т. е. $x_n \xrightarrow[\rho_1]{} x_0 \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow[\rho_2]{} x_0$.

Пример 3.7. ρ_T — самая сильная из метрик на любом множестве.

Пример 3.8. Метрика, порожденная нормой $|| \cdot ||_{C[a;b]}$, сильнее метрики, порожденной нормой $|| \cdot ||_{\widetilde{L}[a;b]}$.

Пример 3.9. Метрики, порождающие l_p^k и c^k, эквивалентны.

Задание 3.1. Покажите, что если ρ — метрика на X, то метрики $\rho_1(x,y) := \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ и $\rho_2(x,y) := \min\{\rho(x,y), 1\}$ эквивалентны друг другу и ρ.

Задание 3.2. Покажите, что свойство ограниченности может не сохраняться при переходе к эквивалентной метрике.

Утверждение 3.4. *Пусть ρ_1 и ρ_2 — метрики на X.*

1. (ρ_1 *не слабее* ρ_2) $\Longleftrightarrow \tau(\rho_1) \supset \tau(\rho_2)$.

2. (ρ_1 *эквивалентна* ρ_2) $\Longleftrightarrow \tau(\rho_1) = \tau(\rho_2)$, *т. е. метрики ρ_1 и ρ_2 порождают одну и ту же топологию.*

Определение. Понятия "не слабее "не сильнее "слабее "сильнее" и "эквивалентны" переносятся и на нормы через метрики, ими порождаемые. Например, норма $||\cdot||_{C[a;b]}$ сильнее нормы $|| \cdot ||_{\widetilde{L}[a;b]}$.

Утверждение 3.5. *Пусть $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ — нормы на линейном пространстве X. Справедливы следующие утверждения:*

1. ($||\cdot||_1$ не слабее $||\cdot||_2$) $\Longleftrightarrow \exists\, C > 0 \,\forall\, x \in X\ \ ||x||_2 \leqslant C||x||_1$.

2. Если нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ эквивалентны и множество M ограничено в смысле одной из этих норм, то M ограничено и в смысле другой нормы.

Доказательство. $\boxed{1. \Longrightarrow}$. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{ x_n \} \subset X$ такая, что $||x_n||_1/||x_n||_2 \to \infty$. Но тогда $x_n/||x_n||_1 \xrightarrow[||\cdot||_2]{} 0$ и $x_n/||x_n||_1 \not\xrightarrow[||\cdot||_1]{} 0$, что противоречит условию. ■

Определение. Метрические пространства $< X, \rho_X >$ и $< Y, \rho_Y >$ называются *изометричными*, если существует биекция $f : X \to Y$ такая, что

$$\forall\, x_1, x_2 \in X\ \ \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2).$$

Замечание. Изометрия — изоморфизм метрических структур.

Определение. Нормированные пространства $< X, ||\cdot||_X >$ и $< Y, ||\cdot||_Y >$ называются *изометричными*, если существует биекция $f : X \to Y$ такая, что f — линейное отображение и

$$\forall\, x \in X \;\; ||f(x)||_Y = ||x||_X.$$

Замечание. Для изоморфизмов всех видов будем использовать знак $\cong$.

4. Сепарабельные метрические пространства

Определения. 1. Множество M в метрическом пространстве X называется *всюду плотным*, если $\overline{M} = X$, т. е. если

$$\forall\, x \in X\, \forall\, U(x)\; U(x) \cap M \neq \varnothing,$$

или (в терминах метрики)

$$\forall\, x \in X\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, y \in M : \; \rho(x, y) < \varepsilon.$$

2. Множество M в метрическом пространстве X называется *нигде не плотным*, если в $\overline{M}$ нет внутренних точек ($\overset{\circ}{\overline{M}} = \varnothing$).

Утверждение 4.1. *Пусть $< X, \rho >$ — метрическое пространство.*
Тогда M всюду плотно $\Longleftrightarrow \forall\, G \in \tau(\rho) \setminus \{\varnothing\} \;\; M \cap G \neq \varnothing$.

Пример 4.1. В l_p^k и c^k над $\mathbb{R}$ множество $\mathbb{Q}^k$ всюду плотно. В l_p^k и c^k над $\mathbb{C}$ множество $\mathbb{Q}^k + i\mathbb{Q}^k$ всюду плотно.

Определение. Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем есть не более чем счетное всюду плотное множество.

Пример 4.2. l_p^k и c^k сепарабельны.

Пример 4.3. $C[a; b]$, l_p, c и c_0 сепарабельны.

Пример 4.4. m не сепарабельно, так как $M := \Big\{ \{\, x_n \,\} \; : x_n \in \{0, 1\} \Big\}$ континуально и $\forall\, x, y \in M \;\; (x \neq y \Longrightarrow ||x - y|| = 1)$.

Утверждение 4.2. *В сепарабельном метрическом пространстве любое непустое открытое множество есть объединение не более чем счетного семейства открытых шаров.*

Доказательство. Пусть $\{\, a_n \,\}$ — счетное всюду плотное множество в $< X, \rho >$.

Покажем, что любое непустое открытое множество есть объединение некоторых множеств из следующего не более чем счетного семейства открытых шаров $\{\, B(a_n, 1/m) : \; n, m \in \mathbb{N} \,\}$.

1. Пусть $x \in X$ и $r > 0$. Тогда в силу утверждения 8.6

$$\exists\, m(r) : 2/m(r) < r\, \exists\, n(x, r)\; a_{n(x,r)} \in B(x, 1/m(r)) \overset{\text{утв. 2.1.1}}{\Longrightarrow}$$

$$x \in B(a_{n(x,r)}, 1/m(r)) \subset B(x, 2/m(r)) \subset B(x, r).$$

2. $\forall\, x \in G \in \tau(\rho)\, \exists r(x) > 0\; B(x, r(x)) \subset G \overset{1}{\Longrightarrow}$

$$\exists\, m(x), n(x)\; x \in B(a_{n(x)}, 1/m(x)) \subset B(x, r(x)) \subset G \Longrightarrow$$

$$G = \bigcup_{x \in G} B(a_{n(x)}, 1/m(x)). \;\; \blacksquare$$

Следствие. *Подпространство сепарабельного метрического пространства само сепарабельно.*

5. Полные метрические пространства

Определение. Последовательность $\{\, x_n \,\}$ в метрическом пространстве называется *фундаментальной*, или *последовательностью Коши*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m > N \;\; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Утверждение 5.1. *В метрическом пространстве справедливы следующие утверждения:*

1. $x_n \to x_0 \Longrightarrow \{ x_n \}$ *фундаментальна.*
2. $\{ x_n \}$ *фундаментальна* $\Longrightarrow \{ x_n \}$ *— ограничена.*
3. $(\{ x_n \}$ *фундаментальна* $\wedge\, x_{n_k} \to x_0) \Longrightarrow x_n \to x_0$.
4. $\{ x_n \}$ *фундаментальна* $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n,m\to+\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$.

Определения. 1. Метрическое пространство называется *полным метрическим пространством*, если в нем любая фундаментальная последовательность является сходящейся (т. е. в этом пространстве справедлив критерий Коши).

2. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

3. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым пространством.*

Пример 5.1. l_p^k, l_p, m, c^k, c и c_0 — банаховы пространства.

Пример 5.2. $C^k[a;b]$ и $L_p[a;b]$ — банаховы пространства.

Пример 5.3. $< \mathbb{Q}, |\cdot| >$ не является полным метрическим пространством, так как $\{ (1 + 1/n)^n \}$ фундаментальна, но не сходится в $\mathbb{Q}$.

Пример 5.4. $\widetilde{L}_1[-1;1]$ не является полным метрическим пространством, так как $\{ x_n(\cdot) \}$:

$$x_n(t) := \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t \leqslant -1/n, \\ nt, & -1/n \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1, & 1/n \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

фундаментальна, но не сходится в $\widetilde{L}_1[-1;1]$.

Утверждение 5.2. *Пусть* $< X, \rho >$ *— полное метрическое пространство и* $M \subset X$. *Тогда* $< M, \rho >$ *— полное метрическое пространство* $\Longleftrightarrow M$ *замкнуто.*

Замечание. Полнота не является топологическим свойством, например, метрики $\rho_1(x,y) := |x - y|$ и $\rho_2(x,y) := |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ эквивалентны на $\mathbb{R}$, но $< \mathbb{R}, \rho_1 >$ — полное, а $< \mathbb{R}, \rho_2 >$ — нет.

Теорема 5.1 (о вложенных и стягивающихся шарах — критерий полноты метрического пространства). *Метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных, замкнутых и стягивающихся шаров имеет непустое пересечение, т. е.*

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}\ B[a_{n+1}, r_{n+1}] \subset B[a_n, r_n]) \wedge (r_n \to 0) \Longrightarrow$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B[a_n, r_n] \neq \varnothing.$$

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Так как $\rho(a_{n+p}, a_n) \leqslant r_n$ и $r_n \to 0$, то $\{ a_n \}$ фундаментальна $\Longrightarrow \exists\, a_0 : \ a_n \to a_0 \Longrightarrow \rho(a_{n+p}, a_n) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \rho(a_0, a_n) \leqslant r_n \Longrightarrow a_0 \in B[a_n, r_n]$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $\{ x_n \}$ фундаментальна. По определению фундаментальности

$$\exists\, \{ x_{n_k} \}\, \forall\, n \geqslant n_k \ \ \rho(x_n, x_{n_k}) \leqslant 2^{-k}.$$

Тогда в силу утв. 2.1.2 $\{ B[x_{n_k}, 2 \cdot 2^{-k}] \}$ — последовательность вложенных, замкнутых и стягивающихся шаров $\Longrightarrow \exists\, x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B[x_{n_k}, 2 \cdot 2^{-k}]$. Отсюда следует, что $x_{n_k} \to x_0 \Longrightarrow x_n \to x_0$. ∎

Замечание. В общем случае в теореме 5.1 нельзя отказаться от условия $r_n \to 0$ (см. [12, § 3.2, замечание], [15, задача 6.10]).

Задание 5.1. Покажите, что в нормированном пространстве можно отказаться от условия $r_n \to 0$.

Теорема 5.2 (Бэр). *Пусть X — полное метрическое пространство, $\{X_n\}$ — счетное семейство нигде не плотных множеств. Тогда*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \neq X.$$

Доказательство. Возьмем произвольные $a_1 \in X$ и $r_1 > 0$. Так как X_1 нигде не плотно, то $\varnothing \neq B(a_1, r_1) \setminus \overline{X}_1$ — открыто $\Longrightarrow \exists\, a_2 \in X, r_2 < r_1/2;\ \ B[a_2, r_2] \subset B(a_1, r_1) \setminus \overline{X}_1$.

По индукции строим последовательность $\{B[a_n, r_n]\}$:

$$B[a_{n+1}, r_{n+1}] \subset B(a_n, r_n) \setminus \overline{X}_n,\ r_n \to 0 \Longrightarrow$$

$$\exists\, a_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] \Longrightarrow \forall\, n\ \ a_0 \notin X_n. \ \blacksquare$$

Следствие. Полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.

Теорема 5.3 (о пополнении). *Для любого метрического пространства X существует полное метрическое пространство Y и его подпространство Y_1 такие, что $X \cong Y_1$ и $\overline{Y_1} = Y$.*

Доказательство. 1. Y — это множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей из X по следующему отношению эквивалентности:

$$\{x_n\} \sim \{x'_n\} := \rho(x_n, x'_n) \to 0.$$

2. Метрика на Y задается следующим образом:

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{\{x_n\}}, \widetilde{\{z_n\}}) := \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n).$$

3. Пусть $\{x\}_c := \{x_n = x\}$. Возьмем $Y_1 := \left\{\widetilde{\{x\}}_c \,:\, x \in X\right\}$, тогда $f(x) := \widetilde{\{x\}}_c$ есть изометрия X на Y_1.

4. Пусть $y = \widetilde{\{x_n\}} \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $y' := \widetilde{\{x_{N(\varepsilon/2)}\}}_c \in Y_1$ и $\widetilde{\rho}(y, y') < \varepsilon$, т. е. $\overline{Y_1} = Y$.

5. Пусть $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность в Y. В силу плотности Y_1 в Y $\exists\{y'_n\} \subset Y_1 :\quad \widetilde{\rho}(y_n, y'_n) < 1/n$ $\Longrightarrow \exists\{x_n\} \subset X :\quad y'_n = \widetilde{\{x_n\}}_c$, при этом $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в X.

Пусть $y_0 := \widetilde{\{x_n\}}$. Тогда

$$0 \leqslant \widetilde{\rho}(y_0, y'_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_m, x_n) \overset{n>N(\varepsilon)}{\leqslant} \varepsilon \Longrightarrow$$

$\widetilde{\rho}(y_0, y'_n) \to 0$. Но $0 \leqslant \widetilde{\rho}(y_0, y_n) \leqslant \widetilde{\rho}(y_0, y'_n) + \widetilde{\rho}(y'_n, y_n) \to 0$, т. е. $y_n \to y_0$. $\blacksquare$

Определение. Полное метрическое пространство Y из теоремы 5.3 называется *пополнением метрического пространства* X.

Замечания. 1. Пополнение единственно (с точностью до изометрии).

2. Если X — подпространство полного метрического пространства Z, то пополнение X — это просто замыкание X в Z.

3. Если X — нормированное пространство, то его пополнение есть банахово пространство над тем же полем (на классах эквивалентности естественным образом вводятся операции сложения и умножения на скаляр).

4. Если X — евклидово пространство, то его пополнение есть гильбертово пространство над тем же полем (на классах эквивалентности естественным образом вводится скалярное произведение).

5. Всегда можно считать, что любое метрическое пространство есть всюду плотное подпространство полного метрического пространства.

Пример 5.5. Пополнение метрического пространства $<\mathbb{Q}, |\cdot|>$ есть $<\mathbb{R}, |\cdot|>$.

Пример 5.6. Пополнение нормированного пространства $\widetilde{L}_p[a;b]$ есть $L_p[a;b]$.

Задание 5.2. Покажите, что если $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ — две эквивалентные нормы на X и $< X, ||\cdot||_1 >$ — банахово пространство, то и $< X, ||\cdot||_2 >$ — банахово пространство.

6. Компактность в метрических пространствах

Определения. 1. Метрическое пространство X называется *компактным* (*счетно компактным*), если из любого (счетного) открытого покрытия X можно выделить конечное подпокрытие.

2. Множество в метрическом пространстве называется *компактным* (*счетно компактным*), если компактно (счетно компактно) подпространство, им порожденное.

Утверждение 6.1. *Пусть $< X, \rho >$ — метрическое пространство и $M \subset X$. Тогда M компактно* $\Longleftrightarrow$

$$G_\alpha \in \tau(\rho) \wedge \bigcup_\alpha G_\alpha \supset M \Longrightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \ \ \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i} \supset M.$$

Замечание. Из компактности X следует его счетная компактность.

Утверждение 6.2. *Сепарабельное счето компактное метрическое пространство является компактным*

Действительно, это следует из утверждения 4.2 и определений компактности и счетной компактности. ■

Теорема 6.1. *Пусть $f : X \to Y$, X, Y — метрические пространства, f непрерывно на X и $X \supset M$ компактно. Тогда $f(M)$ компактно.*

Теорема 6.2 (обобщенная теорема Вейерштрасса). *Пусть X — метрическое пространство, $f : X \to \mathbb{R}$, f непрерывно на X и $X \supset M$ — компактно. Тогда f ограничено на M и достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.*

Доказательство. $f(M)$ компактно в $\mathbb{R} \Longrightarrow f(M)$ ограничено и замкнуто. ■

Определение. Семейство множеств $\{F_\alpha\}$ называется *центрированным в множестве M*, если

$$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \ \ \bigcap_{i=1}^{k} (F_{\alpha_i} \cap M) \neq \varnothing.$$

Теорема 6.3 (критерий компактности). *Пусть X — метрическое пространство и $M \subset X$. Тогда M компактно (счетно компактно) тогда и только тогда, когда любое (любое счетное) центрированное в M семейство замкнутых множеств имеет непустое пересечение с M.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $\{\, F_\alpha \,\}$ — центрированное в M семейство замкнутых множеств $\Longrightarrow G_\alpha := X \setminus F_\alpha$ открыты. В силу центрируемости семейства $\{\, F_\alpha \,\}$

$$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \ \ M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (F_{\alpha_i} \cap M) \neq \varnothing \Longrightarrow$$

$\{\, G_\alpha \,\}$ — не покрытие $M \Longrightarrow \varnothing \neq M \setminus \bigcup\limits_\alpha G_\alpha = \Big(\bigcap\limits_\alpha F_\alpha\Big) \cap M.$

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $G_\alpha \in \tau$ и $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha \supset M$. Тогда $F_\alpha := X \setminus G_\alpha$ замкнуты. Так как $\varnothing = M \setminus \bigcup\limits_\alpha G_\alpha = \Big(\bigcap\limits_\alpha F_\alpha\Big) \cap M$, то $\{\, F_\alpha \,\}$ не центрированное в M семейство $\Longrightarrow$

$$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \ \ \varnothing = \Big(\bigcap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i}\Big) \cap M = M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i}. \ \blacksquare$$

Определение. Подмножество M метрического пространства X называется *секвенциально компактным*, если

$$\forall \{ x_n \} \subset M \, \exists \{ x_{n_k} \}, x_0 \in M \quad x_{n_k} \to x_0.$$

Теорема 6.4. *Пусть X — метрическое пространство и $M \subset X$. Тогда*

M — счетно компактно $\Longleftrightarrow$ M — секвенциально компактно.

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $\{ x_n \} \subset M$. Тогда $F_k := \overline{\{ x_n : n \geqslant k \}}$ — счетное центрированное в M семейство замкнутых множеств и по теореме 6.3 $\exists \, x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (F_k \cap M)$.

Так как $x_0 \in F_1$, то $\exists \, n_1 : \ \rho(x_{n_1}, x_0) < 1$.

Аналогично $x_0 \in F_{n_1+1} \Longrightarrow \exists \, n_2 : \ n_2 > n_1 \wedge \rho(x_{n_2}, x_0) < 2^{-1}$.

Далее индукционно строится подпоследовательность $\{ x_{n_k} \} : \ \rho(x_{n_k}, x_0) < 2^{-k}$, т. е. $x_{n_k} \to x_0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $\{ F_n \}$ — счетное центрированное в M семейство замкнутых множеств. Тогда $\{ \widetilde{F}_n \} : \ \widetilde{F}_n := \bigcap\limits_{k=1}^{n} F_k$ — тоже счетное центрированное в M семейство замкнутых множеств и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{F}_k$.

Возьмем $\{ x_n \} : \ x_n \in \widetilde{F}_n \cap M$, тогда $\exists \{ x_{n_k} \}, x_0 \in M$: $x_{n_k} \to x_0$. Но $x_{n_k} \in \widetilde{F}_n$ при $n_k > n \overset{\text{утв.3.3}}{\Longrightarrow} x_0 \in \widetilde{F}_n \Longrightarrow$ $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (F_n \cap M)$. ■

Следствие. *Если метрическое пространство компактно, то оно и секвенциально компактно.*

Утверждение 6.3. *Пусть $F, K \subset X$ — метрическое пространство, F замкнуто, K компактно и $F \cap K = \varnothing$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $F \cap U_\varepsilon(K) = \varnothing$, где $U_\varepsilon(K) := \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \varepsilon)$ — ε-окрестность множества K.*

Утверждение 6.4 (необходимые условия секвенциальной компактности). *Пусть M — подмножество метрического пространства $< X, \rho >$. Если M секвенциально компактно, то M ограничено и замкнуто, а $< M, \rho >$ — полное метрическое пространство.*

Замечания. 1. Если X — полное метрическое пространство, то в силу утв. 5.2 полнота $< M, \rho >$ и замкнутость M — одно и то же.

2. Ограниченность — плохое свойство с точки зрения компактности, поскольку в эквивалентных метриках секвенциальная компактность сохраняется, а ограниченность — нет.

Определения. Пусть X — метрическое пространство.

1. Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью для множества* $M \subset X$, если $M \subset U_\varepsilon(A)$, т. е. $\forall \, x \in M \, \exists \, a \in A : \ \rho(x, a) < \varepsilon$.

2. Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для M.

Утверждение 6.5. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\{a_1, \ldots, a_k\}$ — ε-сеть для M, то найдется множество $\{\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_k\} \subset M$, являющееся 2ε-сетью для M. Таким образом, "вполне ограниченность" есть внутреннее свойство множества M.*

2. *Пусть $< X, \rho_1 >, < X, \rho_2 >$ — полные метрические пространства, метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны и $M \subset X$. Тогда*

$$M \text{ вполне ограничено в } < X, \rho_1 > \Longleftrightarrow$$
$$M \text{ вполне ограничено в } < X, \rho_2 >.$$

3. *M вполне ограничено $\Longleftrightarrow$ $\overline{M}$ вполне ограничено.*

Замечание. В общем случае при переходе к эквивалентным метрикам свойство множества быть вполне ограниченным может не сохраняться. Например, метрики $\rho_1(x, y) := |x - y|$ и $\rho_2(x, y) := |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ эквивалентны на $\mathbb{R}$, (см. замечание на стр. 29), но $\mathbb{R}$ неограничено в $< \mathbb{R}, \rho_1 >$, а в $< \mathbb{R}, \rho_2 >$ — вполне ограничено.

Пример 6.1. Конечное множество в метрическом пространстве всегда вполне ограничено.

Пример 6.2. В метрическом пространстве $< X, \rho_T >$ вполне ограничены только конечные множества.

Пример 6.3. В нормированном пространстве l_p^k, c^k (M ограничено $\Longleftrightarrow$ M вполне ограничено).

Теорема 6.5 (Хаусдорф) (критерий компактности в метрическом пространстве). *Пусть $< X, \rho >$ — метрическое пространство и $M \subset X$. Тогда M компактно $\Longleftrightarrow$ M вполне ограничено и $< M, \rho >$ — полное метрическое пространство.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. $M \subset \bigcup\limits_{x \in M} B(x, \varepsilon) \Longrightarrow$

$$\exists\, x_1, \ldots, x_k : \quad M \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть A_n — конечная 2^{-n}-сеть для M и $A_n \subset M$. Тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — счетное всюду плотное в $< M, \rho >$ множество $\Longrightarrow$ $< M, \rho >$ — сепарабельно $\Longrightarrow$ компактность в $< M, \rho >$ эквивалентна секвенциальной компактности.

Покажем, что $< M, \rho >$ секвенциально компактно.

Пусть $\{ x_n \} \subset M$. Так как $\{ x_n \} \subset U_{1/2}(A_1)$, то $\exists\, a_1 \in A_1$: в $B[a_1, 1/2]$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{ x_n \}$. Так как $B[a_1, 1/2] \subset U_{1/4}(A_2)$, то $\exists\, a_2 \in A_2$: в $B[a_1, 1/2] \cap B[a_2, 1/4]$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{ x_n \}$. По индукции построим $\{ a_n \}$: в $B[a_{k+1}, 2^{-k-1}] \cap B[a_k, 2^{-k}]$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{ x_n \}$.

Тогда (в силу утверждения **??**.2) $\{ B[a_k, 3 \cdot 2^{-k}] \}$ является системой вложенных, замкнутых и стягивающихся шаров. Так как $< M, \rho >$ — полное метрическое пространство, то $\exists\, x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B[a_k, 3 \cdot 2^{-k}]$. Но в каждом $B[a_k, 3 \cdot 2^{-k}]$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{ x_n \}$, поэтому $\exists \{ x_{n_k} \}$: $x_{n_k} \in B[a_k, 3 \cdot 2^{-k}]$ и $0 \leqslant \rho(x_{n_k}, x_0) \leqslant \rho(x_{n_k}, a_k) + \rho(a_k, x_0) \to 0$. ∎

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *В метрическом пространстве все три понятия — "компактность "счетная компактность" и "секвенциальная компактность" — эквивалентны.*

2. *Если X — полное метрическое пространство и $M \subset X$, то (M компактно $\Longleftrightarrow$ M вполне ограничено и замкнуто).*

3. *Если X — компактное метрическое пространство и $M \subset X$, то (M компактно $\Longleftrightarrow$ M замкнуто).*

Теорема 6.6. *Пусть биекция $f : X \to Y$ компактного метрического пространства X на компактное метрическое пространство Y непрерывна на X. Тогда f^{-1} непрерывна на Y.*

Доказательство. Достаточно показать, что прообраз любого замкнутого множества $F \subset X$ относительно отображения f^{-1} есть замкнутое множество. Пусть $F \subset X$ и F — замкнуто. Тогда в силу предыдущего следствия F — компактно, поэтому по теореме 8.3 $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ тоже компактно, а, значит, и замкнуто. ∎

Определение. Множество M в метрическом пространстве X называется *предкомпактным*, если $\overline{M}$ компактно.

Утверждение 6.6. *Пусть X — метрическое пространство и $M \subset X$. M предкомпактно $\Longleftrightarrow$*

$$\forall \{ x_n \} \subset M \;\exists \{ x_{n_k} \}, x_0 \in X : \;\; x_{n_k} \to x_0.$$

Утверждение 6.7. *Пусть X — полное метрическое пространство и $M \subset X$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *M предкомпактно.*
2. *M вполне ограничено.*
3. *$\forall \{ x_n \} \subset M \exists \{ x_{n_k} \}$ — фундаментальная последовательность.*

Теорема 6.7 (обобщенная теорема Кантора). *Пусть X, Y — метрические пространства. Если $f : X \to Y$ непрерывно на компакте $M \subset X$, то f равномерно непрерывно на M.*

Утверждение 6.8. *Пусть $f : X \to Y$ и X, Y — метрические пространства. Если f равномерно непрерывно на вполне ограниченном множестве $M \subset X$, то и $f(M)$ — вполне ограниченное множество.*

Определение. $M(X) :=$ нормированное пространство ограниченных на X отображений из X в $\mathbb{P}$ с нормой $||f(\cdot)|| := \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$.

Задание 6.1. Покажите, что $M(X)$ — банахово пространство.

Определение. Пусть X — компактное метрическое пространство. $C(X) :=$ нормированное пространство непрерывных на X отображений из X в $\mathbb{P}$ с нормой $||f(\cdot)|| := \max\limits_{x \in X} |f(x)|$ (является подпространством метрического пространства $M(X)$).

Задание 6.2. Покажите, что $C(X)$ — банахово пространство.

Замечание. $C[a;b]$ есть частный случай пространств $C(X)$ ($X = [a;b]$).

Определения. 1. Семейство Φ отображений из X в $\mathbb{P}$ называется *равномерно ограниченным*, если оно есть ограниченное множество в банаховом пространстве $M(X)$, т. е.

$$\exists K > 0 \, \forall f \in \Phi \, \forall x \in X \ \ |f(x)| \leqslant K.$$

2. Семейство непрерывных на X отображений из метрического пространства $< X, \rho >$ в $\mathbb{P}$ называется *равностепенно непрерывным*, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall f \in \Phi \, \forall x_1, x_2 \in X$ $(\rho(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$.

Теорема 6.8 (Арцела) (критерий предкомпактности в $C[a;b]$)*. $C[a;b] \supset \Phi$ — предкомпактно $\Longleftrightarrow$ Φ — равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

Теорема 6.9 (Арцела — Асколи) (критерий предкомпактности в $C(X)$). *Пусть X — компактное метрическое пространство. $C(X) \supset \Phi$ — предкомпактно $\Longleftrightarrow$ Φ — равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. 1. Пусть $\{\overset{1}{g}_1, \ldots, \overset{1}{g}_{n(1)}\}$ — 1-сеть для $\Phi \Longrightarrow$ по теореме 8.4 $\overset{1}{g}_k$ ограничены на $X \Longrightarrow$

$$\exists K > 0 \, \forall k \in \overline{1, n(1)} \, \forall x \in X \ \ |\overset{1}{g}_k(x)| \leqslant K \ \Longrightarrow$$

$$\forall f \in \Phi \ \ |f(x)| \leqslant |f(x) - \overset{1}{g}_{k(f)}(x)| + |\overset{1}{g}_{k(f)}(x)| \leqslant 1 + K.$$

Здесь $k(f) : \ ||f - \overset{1}{g}_{k(f)}|| < 1$.

2. Пусть $\{\overset{\varepsilon}{g}_1, \ldots, \overset{\varepsilon}{g}_{n(\varepsilon)}\}$ — ε-сеть для Φ. По теореме 6.7 все $\overset{\varepsilon}{g}_k$ равномерно непрерывны на X. Так как для $f \in \Phi$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - \overset{\varepsilon}{g}_{k(f)}(x_1)| + |\overset{\varepsilon}{g}_{k(f)}(x_1) - \overset{\varepsilon}{g}_{k(f)}(x_2)| +$$

$$+ |\overset{\varepsilon}{g}_{k(f)}(x_2) - f(x_2)| < 2\varepsilon + |\overset{\varepsilon}{g}_{k(f)}(x_1) - \overset{\varepsilon}{g}_{k(f)}(x_2)|,$$

то $\delta_{(\text{равностеп. непр.})}(\varepsilon) := \min\limits_{k \in \overline{1, n(\varepsilon/3)}} \delta_{(\text{равномер. непр.})}(\varepsilon/3; \overset{\varepsilon}{g}_k)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Докажем для случая $\mathbb{P} = \mathbb{R}$.

В силу следствия из теоремы 6.5 и полноты $C(X)$ предкомпактность Φ равносильна его вполне ограниченности. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

1. Пусть $\delta = \delta_{(\text{равностеп. непр.})}(\varepsilon)/2$.

Поскольку $X = \bigcup\limits_{x \in X} B(x, \delta)$, а X — компактно, то $\exists\, x_1, \ldots, x_n : X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(x_k, \delta)$.

Положим $X_1 := B(x_1, \delta), X_{k+1} := B(x_{k+1}, \delta) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} X_j$. Отметим, что если $x, x' \in X_k$, то $\rho(x, x') < 2\delta = \delta_{(\text{равностеп. непр.})}(\varepsilon)$.

2. Разобьем отрезок $[-K, K]$ на m равных отрезков $-K = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = K$ таких, что $|y_{l+1} - y_l| < \varepsilon$.

Рассмотрим

$$A := \{g(\cdot) : \forall\, k \in \overline{1,n}\, \exists\, j \in \overline{1,m}\, \forall\, x \in X_k\ g(x) = y_j\}.$$

Это — конечное семейство ограниченных на X отображений из X в $\mathbb{R}$. Возьмем $x_1', \ldots, x_n' : x_k' \in X_k$. Пусть $y_{m+1} := K + \varepsilon/2$.

Зададим отображение $\pi : \Phi \to A$ следующей формулой:

$$\pi(f)(x) = \{y_l,\ x \in X_k, \text{ где } l :\ f(x_k') \in [y_l; y_{l+1}).$$

Тогда $|f(x) - \pi(f)(x)| \overset{x \in X_k}{\leqslant} |f(x) - f(x_k')| + |f(x_k') - y_l| < 2\varepsilon$, т. е. A — 2ε-сеть для Φ в $M(X) \Longrightarrow \exists\, \widetilde{A}$ — конечная 4ε-сеть для Φ в $C(X)$. ■

Утверждение 6.9. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда $M(X) \supset \Phi$ равностепенно непрерывно $\Longleftrightarrow$ $\sup\limits_{\varphi \in \Phi} \omega(\delta; \varphi, X) \underset{\delta \to +0}{\longrightarrow} 0$.*

Утверждение 6.10. *Пусть $\mathbb{R} \supset X$ — промежуток, $C^1(X) \supset \Phi$, и $\{\varphi' : \varphi \in \Phi\}$ равномерно ограничено. Тогда Φ равностепенно непрерывно.*

7. Равномерно непрерывные отображения метрических пространств

Определения. Пусть $f : X \to Y$, X и Y — метрические пространства и $M \subset X$.

1. Отображение f называется *равномерно непрерывным на M*, если $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x_1, x_2 \in M \quad (\rho_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon)$.

2. *Модулем непрерывности отображения f на множестве M* называется величина

$$\omega(\delta; f, M) := \sup\{\, \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) :\ x_1, x_2 \in M,\ \rho_X(x_1, x_2) \leqslant \delta\,\}.$$

Утверждение 7.1. *Пусть $f : X \to Y$, X и Y — метрические пространства и $M \subset X$. Следующие свойства эквивалентны:*

1. *Отображение f равномерно непрерывно на M.*
2. $\omega(\delta; f, M) \to 0$ *при* $\delta \to +0$.
3. $\forall\, \{\, x_n\,\}, \{\, x_n'\,\} \subset M$

$$(\rho_X(x_n, x_n') \to 0 \Longrightarrow \rho_Y(f(x_n), f(x_n')) \to 0).$$

Утверждение 7.2. *Пусть $f : X \to Y$, X и Y — метрические пространства, f равномерно непрерывно на X и $X \supset \{\, x_n\,\}$ фундаментальна. Тогда $\{\, f(x_n)\,\}$ фундаментальна.*

Действительно, это следует из соотношения

$$0 \leqslant \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) \leqslant \omega(\rho_X(x_n, x_m); f, X) \underset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} 0. \ ■$$

Теорема 7.1 (о продолжении равномерно непрерывного отображения на пополнение). *Пусть X_1 — подпространство метрического пространства X: $\overline{X_1} = X$, Y — полное метрическое пространство и $f : X_1 \to Y$ равномерно непрерывно на X_1. Тогда существует $\widetilde{f} : X \to Y$ — продолжение отображения f, равномерно непрерывное на X.*

При этом $\omega(\delta; \widetilde{f}, X) \leqslant \omega(\delta + 0; f, X_1)$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$. Тогда $\exists \{ x_n \} \subset X_1 : x_n \to x_0 \Longrightarrow \{ x_n \}$ фундаментальна. Поэтому по утверждению 7.2 $\{ f(x_n) \}$ фундаментальна в полном метрическом пространстве $Y \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) =: \widetilde{f}(x_0)$. ■

Определение. Пусть X — метрическое пространство. Отображение $f : X \to X$ называется *сжимающим*, если

$$\exists\, \alpha \in [0;1)\, \forall\, x_1, x_2 \in X \quad \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \alpha \rho_X(x_1, x_2).$$

Утверждение 7.3. *Сжимающее отображение $f : X \to X$ равномерно непрерывно на X и $\omega(\delta; f, X) \leqslant \alpha \cdot \delta$.*

Определение. Пусть $f : X \to X$. Точка x^* называется *неподвижной точкой отображения* f, если $f(x^*) = x^*$.

Теорема 7.2 (Банах). *Пусть X — полное метрическое пространство, а $f : X \to X$ сжимающее. Тогда существует единственная неподвижная точка отображения f.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$. Рассмотрим $\{ x_n \} : x_{n+1} := f(x_n)$.

1. $\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha^n \rho(x_1, x_0)$.

2. $\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant \alpha^n \rho(x_1, x_0)/(1-\alpha)$. $\Longrightarrow \{ x_n \}$ фундаментальна $\Longrightarrow \exists\, x^* \in X : \ x_n \to x^*$.

3. Переходя в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$ к пределу, получим $x^* = f(x^*)$.

4. Пусть x^* и x_*: $x^* = f(x^*)$ и $x_* = f(x_*)$. Тогда

$$\rho(x^*, x_*) = \rho(f(x^*), f(x_*)) \leqslant \alpha \rho(x^*, x_*) \Longrightarrow$$

$$\rho(x^*, x_*) = 0 \Longrightarrow x^* = x_*. \ ■$$

Замечание. Если x^* — неподвижная точка отображения $f : X \to X$, то она есть неподвижная точка любой степени f^k этого отображения ($f^0 := f$, $f^{n+1}(\cdot) := f(f^n(\cdot))$.

Утверждение 7.4. *Пусть $f : X \to X$. Если некоторая степень f^k этого отображения имеет единственную неподвижную точку, то и само отображение f имеет единственную неподвижную точку.*

Следствие. *Если некоторая степень f^k отображения $f : X \to X$ является сжимающим отображением, то f имеет единственную неподвижную точку.*

Замечания. 1. Теорема Банаха о сжимающем отображении дает достаточные условия разрешимости уравнений вида $f(x) = x$ и метод нахождения приближенных решений этого уравнения — *метод простой итерации.*

2. Полнота метрического пространства X существенна.

Например, если x^* — неподвижная точка сжимающего отображения $f : X \to X$, а $X_1 := X \setminus \{x^*\}$, то $f : X_1 \to X_1$ и f сжимающее на X_1, но у f на X_1 неподвижной точки нет.

3. Если $f : X \to X$ сжимающее, а X не является полным метрическим пространством, то $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ — продолжение f на пополнение X — будет сжимающим (см. теорему 7.1). Поэтому уравнение $\widetilde{f}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$ уже разрешимо в $\widetilde{X}$. Его решение есть "обобщенное решение уравнения $f(x) = x$".

Определение. Отображение $f : X \to X$ метрического пространства в себя назовем *почти сжимающим* если

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \ \ (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \rho(x_1, x_2)).$$

Замечание. У почти сжимающего отбражения неподвижной точки может и не быть. Например, отображение $f : [1; +\infty) \to [1; +\infty)$, заданное формулой $f(x) = x + 1/x$, удовлетворяет этому условию, но не имеет на $[1; +\infty)$ неподвижной точки.

Теорема 7.3. *Пусть X — компактное метрическое пространство, а $f : X \to X$ почти сжимающее. Тогда существует единственная неподвижная точка отображения f.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : X \to \mathbb{R}$, определенное формулой $\varphi(x) = \rho(x, f(x))$. Это отображение непрерывно, поэтому в силу обобщенной теоремы Вейерштрасса существует x^* такое, что $\varphi(x^*) = \min\limits_{x \in X} \varphi(x)$. Предположение $x^* \neq f(x^*)$ сразу приводит к противоречию с определением точки x^*: $\rho(f(x^*), f(f(x^*))) < \rho(x^*, f(x^*))$. ∎

Пример 7.1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\exists\, \alpha \in [0;1)\, \forall\, x \in \mathbb{R}\; |f'(x)| \leqslant \leqslant \alpha < 1$. Тогда f — сжимающее отображение в силу формулы конечных приращений Лагранжа.

Пример 7.2. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}^2$ и липшицева по второму аргументу, т. е.

$$\exists\, K > 0\, \forall\, x\, \forall\, y_1, y_2 \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2|.$$

Тогда отображение $\mathcal{A} : C[x_0 - \gamma; x_0 + \gamma] \to C[x_0 - \gamma; x_0 + \gamma]$, определенное формулой $(\mathcal{A}(y(\cdot))(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi$, будет сжимающим при $2\gamma K < 1$.

8. Топологические пространства

Общие понятия

Определение. $\mathcal{B}(X) \supset \tau$ — *топология на* X, если
1. $X, \varnothing \in \tau$.
2. $G_\alpha \in \tau \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha \in \tau$.
3. $G_1, \ldots, G_k \in \tau \Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{k} G_i \in \tau$.

Определение. Множества из τ называются *открытыми* множествами, их дополнения — *замкнутыми* множествами, а $< X, \tau >$ — *топологическим пространством.*

Пример 8.1. Метрическое пространство является топологическим пространством с $\tau = \tau(\rho)$.

Пример 8.2. $\tau_d := \mathcal{B}(X) = \tau(\rho_T)$ — *дискретная топология на* X.

Пример 8.3. $\tau_a := \{X, \varnothing\}$ — *антидискретная топология на* X.

Пример 8.4. $X := \mathbb{R}$ (любое более чем счетное множество),

$$\tau_c := \{\, G \subset X : G = \varnothing \vee X \setminus G \text{ — не более чем счетно}\}.$$

Пример 8.5. $X := \mathbb{R}$ (любое бесконечное множество),

$$\tau_f := \{\, G \subset X : G = \varnothing \vee X \setminus G \text{ — конечно}\}.$$

Пример 8.6. Пусть $< X, \tau >$ — топологическое пространство, а $M \subset X$. Тогда $\tau \cap M := \{G \cap M : G \in \tau\}$ — топология на M. $< M, \tau \cap M >$ — *подпространство топологического пространства* X.

Замечание. Если $< X, \rho >$ — метрическое пространство, а $M \subset X$, то $< M, \rho >$, рассматриваемое как топологическое пространство, является подпространством топологического пространства $< X, \tau(\rho) >$.

Определения. Пусть $< X, \tau >$ — топологическое пространство, а $x_0 \in X$.

1. $U(x_0)$ — *окрестность точки* x_0 :=

$$\exists\, G \in \tau \;\; x_0 \in G \subset U(x_0).$$

2. Окрестность точки, являющаяся открытым множеством, называется *открытой окрестностью точки.*

3. Понятия "предельная точка "внутренняя точка "внутренность "замыкание "предел последовательности в топологическом пространстве "предел отображения одного топологического пространства в другое "непрерывность отображения в

точке "непрерывность отображения на множестве" определяются в топологическом пространстве дословно, как в случае метрических пространств с заменой $B(x_0, \delta)$ на $U(x_0)$.

Например, x_0 — *предельная точка множества* M, если

$$\forall\, U(x_0) \;\; M \cap (U(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing,$$

а $U(M)$ есть *окрестность множества* M, если

$$\exists\, G \in \tau : \;\; M \subset G \subset U(M).$$

Доказанные ранее свойства непрерывных функций в метрических пространствах носят топологический характер.

Теорема 8.1. 1. *Пусть* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, X, Y, Z *— топологические пространства,* f *непрерывно в точке* x_0, *а* g *непрерывно в точке* $f(x_0)$. *Тогда* $g(f(\cdot))$ *непрерывно в точке* x_0.

2. *Пусть* $f : X \to Y$, X, Y *— топологические пространства. Тогда* f *непрерывно на* $X \Longleftrightarrow \forall\, G \in \tau_Y \;\; f^{-1}(G) \in \tau_X$.

Следствие. Пусть $f : X \to Y$, X, Y — топологические пространства. f непрерывно на $X \Longleftrightarrow \forall\, F \subset Y \;\; (F$ — замкнуто $\Longrightarrow$ $f^{-1}(F)$ — замкнуто$)$.

Замечания. 1. Предел в топологическом пространстве может быть не единственным, например, в топологическом пространстве $< X, \tau_a > \forall \{ x_n \} \subset X \, \forall\, x_0 \in X \quad x_n \to x_0$, так как $U(x_0) = X$.

2. Предел последовательности в топологическом пространстве может не характеризовать открытые и замкнутые множества (топологию), предел и непрерывность отображений.

Пример 8.7. В топологическом пространстве $< \mathbb{R}, \tau_c >$ $(x_n \to x_0) \Longleftrightarrow \exists\, n_0 \,\forall\, n > n_0 \; x_n = x_0$. Поэтому свойство

$$(x_n \to x_0 \in M \Longrightarrow \exists\, n_0 \,\forall\, n > n_0 \;\; x_n \in M)$$

выполняется для любого множества M, а не только для открытого, как это было в метрических пространствах, хотя в $< \mathbb{R}, \tau_c >$ есть не открытые множества, например, $\{1, 2\}$.

Определение. Топологические пространства $< X, \tau_X >$ и $< Y, \tau_Y >$ называются *гомеоморфными*, если существует биекция $f : X \to Y$ такая, что f и f^{-1} непрерывны на X и Y соответственно.

Замечания. 1. Гомеоморфизм — это изоморфизм топологических структур.

2. Неизометрические метрические пространства могут быть гомеоморфными топологическими пространствами.

Утверждение 8.1. *Пусть* ρ_1 *и* ρ_2 *— метрики на* X. *Тогда* $\rho_1 \sim \rho_2 \Longleftrightarrow I : X \to X$ *есть гомеоморфизм* $< X, \tau(\rho_1) >$ *на* $< X, \tau(\rho_2) >$.

Здесь I *— тождественное отображение множества* X, *т. е.* $\forall\, x \in X \;\; I(x) = x$.

Аксиомы отделимости

Определения. Перечисленные ниже свойства T_1 — T_4 топологических пространств называются *аксиомами отделимости.*

$T_1 : \forall\, x, y \;\; (x \neq y \Longrightarrow \exists\, U(x) \;\; y \notin U(x))$.

T_2 (аксиома Хаусдорфа):

$$\forall\, x, y \;\; (x \neq y \Longrightarrow \exists\, U(x), U(y) \;\; U(x) \cap U(y) = \varnothing).$$

$T_3 : x_0 \notin F \wedge F$ — замкнуто $\Longrightarrow$

$$\exists\, U(x_0), U(F) \;\; U(x_0) \cap U(F) = \varnothing.$$

$T_4 : F_1 \cap F_2 = \varnothing \wedge F_1$, F_2 — замкнуты $\Longrightarrow$

$$\exists\, U(F_1), U(F_2) \;\; U(F_1) \cap U(F_2) = \varnothing.$$

Определения. 1. Топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме T_2, называется *хаусдорфовым.*

2. Топологическое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_3, называется *регулярным.*

3. Топологическое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4, называется *нормальным.*

Пример 8.8. $< X, \tau_a >$ не удовлетворяет аксиоме T_1.

Пример 8.9. $< X, \tau_a >$ и $< X, \tau_c >$ не удовлетворяют аксиоме T_2.

Утверждение 8.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *В T_1-пространстве $\{x_0\}$ замкнуто.*
2. $T_3 \Longleftrightarrow \forall\, U(x_0)\, \exists\, U_1(x_0)\ \ \overline{U_1(x_0)} \subset U(x_0)$.
3. *Всякое нормальное пространство регулярно, всякое регулярное пространство хаусдорфово.*

Доказательство. $\boxed{1}$. $y \in X \setminus \{x_0\} \stackrel{T_1}{\Longrightarrow}$

$$\exists\, U(y):\ x_0 \notin U(y) \Longrightarrow U(y) \subset X \setminus \{x_0\}.$$

$\boxed{1. \Longrightarrow}$. $x_0 \notin F := X \setminus \overset{o}{U}(x_0) \stackrel{T_3}{\Longrightarrow} \exists\, U_1(x_0),\, U(F):$

$$U_1(x_0) \cap U(F) = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad U_1(x_0) \subset X \setminus U(F) \quad \Longrightarrow$$

$$\overline{U_1(x_0)} \subset X \setminus U(F) \subset X \setminus F = \overset{o}{U}(x_0) \subset U(x_0).$$

$\boxed{1. \Longleftarrow}$. $x_0 \notin F \Longrightarrow \exists\, U(x_0):\ U(x_0) \cap F = \varnothing \Longrightarrow \exists\, U_1(x_0):$ $\overline{U_1(x_0)} \subset U(x_0) \Longrightarrow \overline{U_1(x_0)} \cap F = \varnothing \Longrightarrow F \subset X \setminus \overline{U_1(x_0)} =: U(F)$ и $U_1(x_0) \cap U(F) = \varnothing$. ■

Утверждение 2.4 показывает, что метрическое пространство есть нормальное топологическое пространство.

Базы топологии и точки, аксиомы счетности

Определение. $\tau \supset \beta$ — *база топологии* τ, если

$$\forall\, G \in \tau : G \neq \varnothing\, \exists\, \{W_\alpha\} \subset \beta\ \ G = \bigcup_\alpha W_\alpha.$$

Пример 8.10. В метрическом пространстве X семейство $\{\, B(a,r);\ a \in X,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0 \,\}$ есть база топологии.

Пример 8.11. В l_p^k и c^k ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) семейство $\{\, B(a,r)\ :\ a \in \mathbb{Q}^k,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0 \,\}$ есть база топологии, и она счетна.

Теорема 8.2. $\mathcal{B}(X) \supset \beta$ *есть база некоторой топологии на* X *тогда и только тогда, когда*

1. $\forall\, x \in X\, \exists\, W \in \beta\ \ x \in W$.
2. $\forall\, W_1, W_2 \in \beta\, \forall\, x \in W_1 \cap W_2\, \exists\, W_3 \in \beta\ \ x \in W_3 \subset W_1 \cap W_2$.

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. $\tau := \left\{ \bigcup_\alpha W_\alpha\ :\ W_\alpha \in \beta \right\} \bigcup \{\varnothing\}$, поскольку в силу второго условия

$$W_1 \cap W_2 = \bigcup_{W_\gamma \subset W_1 \cap W_2} W_\gamma. \quad ■$$

Пример 8.12. Пусть $X = \mathbb{P}^M$ и $W(f, t_1, \ldots, t_k, \varepsilon) := \{g(\cdot) \in \mathbb{P}^M\ :\ \forall\, i \in \overline{1,k}\quad |g(t_i) - f(t_i)| < \varepsilon\}$. Тогда $\beta := \{W(f, t_1, \ldots, t_k, \varepsilon)\ :\ f \in \mathbb{P}^M, k \in \mathbb{N}, t_i \in M, \varepsilon > 0\}$ — база топологии "поточечной сходимости" отображений из M в $\mathbb{P}$.

Пример 8.13. $\beta := \{[a; b)\ :\ a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b\}$ — база топологии "стрелки" на $\mathbb{R}$.

Определение. $\mathcal{B}(X) \supset \omega(x_0)$ — *база окрестностей точки* x_0 (или *определяющая система окрестностей точки* x_0) в топологическом пространстве $< X, \tau >$, если

1. $W \in \omega(x_0) \Longrightarrow W$ — окрестность точки x_0.
2. $\forall\, U(x_0)\, \exists\, W \in \omega(x_0)\ \ W \subset U(x_0)$.

Пример 8.14. В метрическом пространстве X семейство $\{ B(x_0, r) : r \in \mathbb{Q}, r > 0 \}$ есть база окрестностей точки x_0, и эта база не более чем счетна.

Пример 8.15. Если $\omega(x_0)$ — база окрестностей точки x_0, то и $\overset{\circ}{\omega}(x_0) := \{\overset{\circ}{W} : W \in \omega(x_0)\}$ — база окрестностей точки x_0, причем состоящая из открытых окрестностей (*открытая база окрестностей точки* $\omega(x_0)$).

Замечание. В определении топологических понятий вместо произвольных окрестностей точек можно было обойтись окрестностями из открытых баз рассматриваемых точек.

Утверждение 8.3. 1. *Если* β *— база топологии* τ*, то* $\omega(x_0) := \{W \in \beta : x_0 \in W\}$ *— открытая база окрестностей точки* x_0.

2. *Если* $\forall x \in X \quad \omega(x)$ *— база открытых окрестностей точки* x *в топологическом пространстве* $< X, \tau >$*, то* $\beta := \bigcup\limits_{x \in X} \omega(x)$ *— база топологии* τ.

Утверждение 8.4. *Пусть* X *— хаусдорфово пространство,* $x_0 \in X$ *и* $\omega(x_0)$ *— база окрестностей точки* x_0*. Тогда* $\bigcap\limits_{W \in \omega(x_0)} \overline{W} = \{x_0\}$.

Доказательство. $y \neq x_0 \Longrightarrow \exists U(y) \in \tau, W \in \omega(x_0) : U(y) \cap W = \emptyset \Longrightarrow W \subset X \setminus U(y) \Longrightarrow \overline{W} \subset X \setminus U(y) \Longrightarrow U(y) \cap \overline{W} = \emptyset \Longrightarrow y \notin \overline{W}$. ∎

Определения. 1. Говорят, что *топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности*, если каждая точка этого пространства имеет не более чем счетную базу окрестностей.

2. Говорят, что *топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности*, если топология этого пространства имеет не более чем счетную базу.

Пример 8.16. Метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Пример 8.17. l_p^k, c^k удовлетворяют второй аксиоме счетности.

Замечания. 1. В топологическом пространстве с первой аксиомой счетности сходящиеся последовательности полностью характеризуют топологию, т. е. в этих пространствах справедливы характеристические свойства открытых и замкнутых множеств (см. утверждение 3.3).

2. Если $f : X \to Y$, X и Y — топологические пространства, причем X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то понятия "предел функции по Коши" и "предел функции по Гейне" эквивалентны, т. е. справедливы утверждения 3.1.5 и 3.1.7.

Утверждение 8.5. 1. *Если топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно удовлетворяет и первой аксиоме счетности.*

2. *Если топологическое пространство удовлетворяет первой (второй) аксиоме счетности, то и любое его подпространство удовлетворяет этой же аксиоме счетности.*

Сепарабельность

Определения. 1. Множество M в топологическом пространстве X называется *всюду плотным*, если $\overline{M} = X$, т. е. если

$$\forall x \in X \, \forall U(x) \; U(x) \cap M \neq \emptyset.$$

2. Множество M в топологическом пространстве X называется *нигде не плотным*, если в $\overline{M}$ нет внутренних точек ($\overset{\circ}{\overline{M}} = \emptyset$).

Утверждение 8.6. *Пусть* $< X, \tau >$ *— топологическое пространство.*

Тогда M *всюду плотно* $\Longleftrightarrow \forall G \in \tau \setminus \{\emptyset\} \;\; M \cap G \neq \emptyset$.

Пример 8.18. В $< X, \tau_a >$ любое непустое множество всюду плотно.

Пример 8.19. В l_p^k и c^k над $\mathbb{R}$ множество $\mathbb{Q}^k$ всюду плотно. В l_p^k и c^k над $\mathbb{C}$ множество $\mathbb{Q}^k + i\mathbb{Q}^k$ всюду плотно.

Пример 8.20. Конечное множество предельных точек топологического пространства, удовлетворяющего аксиоме T_1, — нигде не плотное множество.

Определение. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем есть не более чем счетное всюду плотное множество.

Замечание. В топологии часто сепарабельным называют топологическое пространство со второй аксиомой счетности.

Пример 8.21. l_p^k и c^k сепарабельны.

Пример 8.22. $C[a;b]$, l_p, c и c_0 сепарабельны.

Пример 8.23. m не сепарабельно, так как $M := \Big\{ \{ x_n \} : x_n \in \{0, 1\} \Big\}$ континуально и $\forall\, x, y \in M \ \ (x \neq y \Longrightarrow ||x - y|| = 1)$.

Утверждение 8.7. *Если топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно сепарабельно.*

Утверждение 4.2 показывает, что сепарабельное метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности. В общем случае, "сепарабельност" не является наследуемым свойством.

Задание 8.1. Постройте сепарабельное топологическое пространство с несепарабельным подпространством.

Задание 8.2. Постройте сепарабельное топологическое пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности.

Компактность и счетная компактность

Определение компактности в метрических пространствах, данное через открытые покрытия, показывает, что и это понятие является топологическим.

Определения. 1. Топологическое пространство X называется *компактным* (*счетно компактным*), если из любого (счетного) открытого покрытия X можно выделить конечное подпокрытие.

2. Множество в топологическом пространстве называется *компактным* (*счетно компактным*), если компактно (счетно компактно) подпространство, им порожденное.

Утверждение 8.8. *Пусть $< X, \tau >$ — топологическое пространство и $M \subset X$. Тогда M компактно $\Longleftrightarrow$*

$$G_\alpha \in \tau \wedge \bigcup_\alpha G_\alpha \supset M \Longrightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \ \ \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i} \supset M.$$

Замечание. Если топологическое пространство X компактно, то оно и счетно компактно.

Утверждение 8.9. *Если X — счетно компактное топологическое пространство со второй аксиомой счетности, то X компактно.*

Общетопологическими являются и теорема об образе компакта и обобщенная теорема Вейерштрасса.

Теорема 8.3. *Пусть $f : X \to Y$, X, Y — топологические пространства, f непрерывно на X и $X \supset M$ компактно. Тогда $f(M)$ компактно.*

Теорема 8.4 (обобщенная теорема Вейерштрасса). *Пусть X — топологическое пространство, $f : X \to \mathbb{R}$, f непрерывно на X и $X \supset M$ — компактно. Тогда f ограничено на M и достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.*

Критерий компактности в терминах центрированных множеств (теорема 6.3) справедлив и в топологических пространствах.

Определение. Семейство множеств $\{F_\alpha\}$ называется *центрированным в множестве* M, если

$$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \quad \bigcap_{i=1}^{k} (F_{\alpha_i} \cap M) \neq \varnothing.$$

Теорема 8.5 (критерий компактности в топологическом пространстве). *Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$. Тогда M компактно (счетно компактно) тогда и только тогда, когда любое (любое счетное) центрированное в M семейство замкнутых множеств имеет непустое пересечение с M.*

В отличие от метрических пространств компактное множество может не быть замкнутым (постройте соответствующий пример). Но в хаусдорфовых пространствах это свойство сохраняется.

Утверждение 8.10. *Если X — хаусдорфово топологическое пространство, а $X \supset M$ компактно, то M замкнуто.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется x_0 — предельная точка множества M такая, что $x_0 \notin M$. Пусть $\omega(x_0)$ — некоторая база окрестностей точки x_0. Тогда в силу утверждения 8.4 $\bigcup\limits_{W \in \omega(x_0)} X \setminus \overline{W} = X \setminus \{x_0\} \supset M$, т. е. $\{\, X \setminus \overline{W}\,\}_{W \in \omega(x_0)}$ есть открытое покрытие компакта M. Однако $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X \setminus \overline{W_i} = X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{W_i} \not\supset M$, так как $M \cap \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{W_i}\Big) \neq \varnothing$. ■

Глава 2

Линейные нормированные и топологические пространства

9. Выпуклые и абсолютно выпуклые множества

Определения. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $M_1, M_2 \subset X$, $\Lambda \subset \mathbb{P}$, $a \in X$, $\mu \in \mathbb{P}$.

1. $M_1 + M_2 := \{\, x_1 + x_2 : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2 \,\}$.
2. $M_1 - M_2 := \{\, x_1 - x_2 : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2 \,\}$.
3. $M_1 + a := M_1 + \{a\}$.
4. $\Lambda \cdot M_1 := \{\, \lambda x : \lambda \in \Lambda, x \in M_1 \,\}$.
5. $\mu \cdot M_1 := \{\mu\} \cdot M_1$.

Утверждение 9.1. *Пусть X — нормированное пространство, $r > 0$, $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$. Тогда справедливы следующие равенства:*

1. $B(a, r) + b = B(a + b, r)$, $B[a, r] + b = B[a + b, r]$.

2. $B(a_1, r_1) + B(a_2, r_2) = B(a_1, r_1) + B[a_2, r_2]$;
$B(a_1, r_1) + B[a_2, r_2] = B(a_1 + a_2, r_1 + r_2)$; $B[a_1, r_1) + B[a_2, r_2] = B[a_1 + a_2, r_1 + r_2]$.

3. $\lambda \cdot B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r)$, $\lambda \cdot B[a, r] = B[\lambda a, |\lambda| r]$.

Следствие. $B(a, r) - B(a, r) = B(0, 2r)$

Утверждение 9.2. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $A, B \subset X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $(\lambda + \mu) A \subset \lambda A + \mu B$.
2. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
3. $A + B = \bigcup\limits_{x \in B} (A + x)$.

Следствие. Если X — нормированное пространство, а $X \supset A$ — открытое множество, то для любого $B \subset X$ множество $A + B$ — открыто.

Определение. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $M \subset X$.

M называется *уравновешенным*, если

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{P}\ \ (|\lambda| \leqslant 1 \Longrightarrow \lambda \cdot M \subset M).$$

Пример 9.1. В нормированном пространсте любой шар с центром в нуле есть уравновешенное множество.

Утверждение 9.3 (свойства уравновешенных множеств). *Пусть M — уравновешенное множество в линейном пространстве X и $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $|\lambda| \leqslant |\mu| \quad \Longrightarrow \quad \lambda M \subset \mu M.$
2. $0 \in M.$
3. $|\lambda| = |\mu| \quad \Longrightarrow \quad \lambda M = \mu M.$
4. $|\lambda| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda M = M.$
5. $-M = M.$

Определения. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $M \subset X$.

1. M называется *выпуклым*, если

$$\forall\, a, b \in M \quad [a; b] := \{\, (1-\lambda)\cdot a + \lambda \cdot b :\ \lambda \in [0;1]\,\} \subset M.$$

2. M называется *абсолютно выпуклым*, если

$$\forall\, a, b \in M\, \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{P}\ \ (|\lambda| + |\mu| \leqslant 1 \Longrightarrow \lambda a + \mu b \in M).$$

Утверждение 9.4. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $M \subset X$.*

M — выпуклое множество $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \lambda \in [0;1]\ \ (1-\lambda)M + \lambda M = M.$$

Утверждение 9.5. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, $M \subset X$. Если M — абсолютно выпуклое множество, то M — выпуклое и уравновешенное множество.*

Утверждение 9.6 (свойства выпуклых и абсолютно выпуклых множеств). *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$.*

1. *Пересечение любого семейства выпуклых (абсолютно выпуклых) множеств есть выпуклое (абсолютно выпуклое) множество.*
2. *Если M — выпуклое (абсолютно выпуклое) множество, то $\lambda \cdot M$ — выпуклое (абсолютно выпуклое) множество.*
3. *Сумма двух выпуклых (абсолютно выпуклых) множеств есть выпуклое (абсолютно выпуклое) множество.*
4. *Если M — выпуклое множество, $0 \in M$ и $\alpha \in [0;1]$, то $\alpha \cdot M \subset M$.*
5. *Если M — абсолютно выпуклое множество, то*

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{P}\ \ \lambda M + \mu M = (|\lambda| + |\mu|)M.$$

Доказательство. $\boxed{5}$. Если $\lambda = 0 \vee \mu = 0$, то утверждение есть следствие свойст уравновешенных множеств. Если $\lambda \neq 0 \wedge \mu \neq 0$, то

$$(|\lambda|+|\mu|)^{-1}(|\lambda|+|\mu|)M = \frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|}\frac{\lambda}{|\lambda|}M + \frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|}\frac{\mu}{|\mu|}M \overset{\text{утв. 9.3.4}}{=}$$

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|}M + \frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|}M \overset{\text{утв. 9.4}}{=} M \quad \blacksquare$$

Пример 9.2. В нормированном пространстве $B(a,r)$, $B[a,r]$ — выпуклые множества, а $B(0,r)$, $B[0,r]$ — абсолютно выпуклые множества.

Утверждение 9.7. *Пусть X — нормированное пространство и $M \subset X$. Если M — выпуклое (абсолютно выпуклое) множество, то $\overset{\circ}{M}$ и $\overline{M}$ — выпуклые (абсолютно выпуклые) множества.*

Утверждение 9.8. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *M абсолютно выпукло.*
2. *M выпукло и уравновешенно.*

Утверждение 9.9. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *M абсолютно выпукло.*
2. *M выпукло и симметрично относительно нуля.*

10. Поглощающие множества и псевдовнутренние точки

Определения. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $M \subset X$.

1. M называется *поглощающим*, если

$$\forall x \in X \, \exists \lambda \geqslant 0 \, \forall \mu \in \mathbb{P} \ \ (|\mu| \geqslant \lambda \Longrightarrow x \in \mu \cdot M).$$

2. Точка x_0 называется *псевдовнутренней точкой множества M*, если

$$\forall y \in X \, \exists \varepsilon > 0 \, \forall \lambda \in \mathbb{P} \ \ (|\lambda| < \varepsilon \Longrightarrow x_0 + \lambda y \in M).$$

3. Множество всех псевдовнутренних точек множества M называется *ядром множества M* и обозначается следующим образом: $\overset{\bullet}{M}$.

3. Если $\overset{\bullet}{M} \neq \varnothing$, то множество M называется *телом.*

Утверждение 10.1. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $M \subset X$.*

(M — поглощающее множество) $\Longleftrightarrow 0 \in \overset{\bullet}{M}$.

Утверждение 10.2. *В линейном пространстве над полем $\mathbb{P}$ справедливы следующие соотношения:*

1. $\overset{\bullet}{M} \subset M$.
2. $(M \overset{\bullet}{+} x) = \overset{\bullet}{M} + x$.
3. $\left(\bigcup\limits_{\alpha} M_\alpha\right)^{\bullet} \supset \bigcup\limits_{\alpha} \overset{\bullet}{M}_\alpha$.

Утверждение 10.3. *В нормированном пространстве $\overset{\circ}{M} \subset \overset{\bullet}{M}$.*

Задание 10.1. Приведите пример множества, для которого $\left(\overset{\bullet}{M}\right)^{\bullet} \neq \overset{\bullet}{M}$.

Утверждение 10.4. 1. *Если M — выпуклое множество в линейном пространстве над полем $\mathbb{P}$, $x_0 \in \overset{\bullet}{M}$, а $x_1 \in M$, то $[x_0, x_1) := [x_0; x_1] \setminus \{x_1\} \subset \overset{\bullet}{M}$.*

2. *Если M — выпуклое множество в нормированном пространстве, $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, а $x_1 \in M$, то $[x_0; x_1) \subset \overset{\circ}{M}$.*

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если M — выпуклое множество в линейном пространстве над полем $\mathbb{P}$, то $\overset{\bullet}{M}$ — выпуклое множество и $\left(\overset{\bullet}{M}\right)^{\bullet} = \overset{\bullet}{M}$.*

2. *Если M — выпуклое множество в нормированном пространстве и $\overset{\circ}{M} \neq \varnothing$, то $\overset{\circ}{M} = \overset{\bullet}{M}$.*

Доказательство. $\boxed{1}$. Поскольку $\left(\overset{\bullet}{M}\right)^{\bullet} \subset \overset{\bullet}{M}$, то осталось показать справедливость обратного включения. Пусть $x_0 \in \overset{\bullet}{M}$ и $e \in X$, тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \, \forall \lambda \in \mathbb{P} \ \ (|\lambda| < \varepsilon_0 \Longrightarrow x_0 + \lambda y \in M).$$

В силу утверждения 10.4.1 $[x_0, x_0 + \lambda e) \subset \overset{\bullet}{M}$. Поэтому $x_0/2 + (x_0 + \lambda e)/2 = x_0 + (\lambda/2)e \in \overset{\bullet}{M}$, т. е. $x_0 \in \left(\overset{\bullet}{M}\right)^{\bullet}$.

$\boxed{2}$. Поскольку $\overset{\circ}{M} \subset \overset{\bullet}{M}$, то осталось показать справедливость обратного включения. Пусть $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, а $x_1 \in \overset{\bullet}{M}$, тогда найдется $\lambda > 0$ такое, что $x_1 + \lambda(x_1 - x_0) \in M$. В силу утверждения 10.4.2 $[x_0, (1+\lambda)x_1 - \lambda x_0) \subset \overset{\circ}{M}$. Возьмем $\alpha := 1/(1+\lambda)$. Поскольку $\alpha \in (0; 1)$, то

$$(1 - \alpha)x_0 + \alpha((1 + \lambda)x_1 - \lambda x_0) = x_1 \in \overset{\circ}{M}. \quad \blacksquare$$

11. Полунормы и фукционал Минковского

Определение. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $p : X \to \mathbb{R}$ называется *полунормой* (или *преднормой*), если

1. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.
2. $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$.

Определение. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $p : X \to \mathbb{R}$ называется *положительно однородным функционалом*, если $\forall\, \lambda \geqslant 0\ \ p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

Определение. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $p : X \to \mathbb{R}$ называется *выпуклым функционалом*, если

$$\forall\, \alpha \in [0; 1]\, \forall\, x_1, x_2 \in X\ \ p((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leqslant (1-\alpha)p(x_1) + \alpha p(x_2).$$

Утверждение 11.1. *Если $p(\cdot)$ — полунорма на линейном пространстве, то $p(0) = 0$, $p(-x) = p(x)$, $p(x) \geqslant 0$ и $p(\cdot)$ — положительно однородный функционал.*

Следствие. *Если $p(\cdot)$ — полунорма на линейном пространстве, то $p(\cdot)$ — выпуклый функционал.*

Утверждение 11.2. *Если $p(\cdot)$ — полунорма на линейном пространстве X, то $V := \{\, x \in X : p(x) \leqslant 1 \,\}$ — абсолютно выпуклое и поглощающее множество.*

Определение. Пусть V — поглощающее множество в линейном пространстве X. Отображение $p_V : X \to \mathbb{R}$, определенное формулой

$$p_V(x) := \inf\{\, \mu > 0 : x \in \mu \cdot V \,\},$$

называется *функционалом Минковского, порожденным множеством V (соответствующим множеству V)*.

Замечание. Функционал Минковского можно определить и для не поглощающих множеств V, тогда при некоторых аргументах (не поглощаемых множеством V) значения функционала будут равны $+\infty$.

Теорема 11.1 *Пусть $V \subset X$ — линейное пространство.*

1. *Функционал Минковского $p_V(\cdot)$ — положительно однородный функционал.*
2. *Если V уравновешенно, то $p_V(\lambda x) = |\lambda| p_V(x)$.*
3. *Если V выпукло, то $p_V(\cdot)$ — выпуклый функционал.*
4. *Если V поглощающее множество, то $\forall\, x \in X\ p_V(x) \in \mathbb{R}$.*
5. *Если V абсолютно выпуклое поглощающее множество, $p_V(\cdot)$ — то полунорма на X и*

$$\{\, x : p_V(x) < 1 \,\} \subset V \subset \{\, x : p_V(x) \leqslant 1 \,\}.$$

.

6. *Если $p(\cdot)$ — полунорма на линейном пространстве X, то найдется такое абсолютно выпуклое поглощающее множество $V \subset X$, что $p(\cdot) = p_V(\cdot)$*

Доказательство. $\boxed{2}$. Если $\lambda \neq 0$, то

$$p_V(\lambda x) = \inf\left\{\mu > 0 : x \in \frac{\mu}{|\lambda|} \cdot \frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot V\right\} =$$

$$= [\nu := \mu/|\lambda|, V\text{— уравн.}] = \inf\{|\lambda|\nu : x \in \nu \cdot V\} = |\lambda| p_V(x).$$

$\boxed{3}$. Пусть $\mu_i := p_V(x_i)$ $(i = 1,2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\overset{\varepsilon}{\mu}_i$, что $\mu_i \leqslant \overset{\varepsilon}{\mu}_i \leqslant \mu_i + \varepsilon$ и $x_i \in \overset{\varepsilon}{\mu} V$. Тогда

$$\frac{x_1 + x_2}{\overset{\varepsilon}{\mu}_1 + \overset{\varepsilon}{\mu}_2} = \left(\frac{\overset{\varepsilon}{\mu}_1}{\overset{\varepsilon}{\mu}_1 + \overset{\varepsilon}{\mu}_2}\right) \frac{x_1}{\overset{\varepsilon}{\mu}_1} + \left(\frac{\overset{\varepsilon}{\mu}_2}{\overset{\varepsilon}{\mu}_1 + \overset{\varepsilon}{\mu}_2}\right) \frac{x_2}{\overset{\varepsilon}{\mu}_2} \in [V \text{выпуклое}] \in V.$$

Поэтому $p_V(x_1 + x_2) \leqslant \overset{\varepsilon}{\mu}_1 + \overset{\varepsilon}{\mu}_2 \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} p_V(x_1) + p_V(x_2)$.

$\boxed{5}$. То, что $p_V(\cdot)$ — полунорма, следует из утверждений 2 и 3 этой теоремы.

$p_V(x) < 1 \Longrightarrow \exists\, \mu \in (0;1)\ :\ x \in \mu \cdot V \subset V;$

$x \in V = 1 \cdot V \Longrightarrow p_V(x) \leqslant 1.$

$\boxed{6}$. По утверждению 11.2 $V := \{\, x \in X\ :\ p(x) \leqslant 1 \,\}$ — абсолютно выпуклое поглощающее множество. При этом

$$p_V(x) = \inf\{\, \mu > 0 : x \in \mu{\cdot}V \,\} = \inf\{\, \mu > 0 : p(x) \leqslant \mu \,\} = p(x). \quad \blacksquare$$

Утверждение 11.3. *Если V — абсолютно выпуклое поглощающее множество в линейном пространстве X, то*

$$p_V(\cdot) \ \textit{норма} \Longleftrightarrow \forall\, x \neq 0 \ \ \mathbb{R} \cdot x \not\subset V.$$

12. Общие свойства нормированных пространств

Теорема 12.1. *Пусть $e_1, \ldots, e_m$ линейно независимы в нормированном пространстве X. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,n} e_k \to 0 \Longleftrightarrow \forall\, k \in \overline{1,m} \quad \lambda_{k,n} \to 0 \ \textit{при}\ n \to \infty.$$

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $z_n := \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_{k,n} e_k \to 0$.

Предположим противное. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что $\mu_n := \sum\limits_{k=1}^{m} |\lambda_{k,n}| \geqslant \alpha > 0$.

В силу ограниченности $\gamma_{k,n} := \lambda_{k,n}/\mu_n$ опять можно считать, что $\gamma_{k,n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma_{k,0} \Longrightarrow$

$$\frac{z_n}{\mu_n} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,n} e_k \to \sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,0} e_k = 0 \Longrightarrow \forall\, k \in \overline{1,m} \ \ \gamma_{k,0} = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,0} = 0. \tag{12.1}$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{m} |\gamma_{k,n}| = 1$, то и $\sum\limits_{k=1}^{m} |\gamma_{k,0}| = 1$. Но это противоречит равенству (12.1). $\blacksquare$

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *В конечномерном нормированном пространстве сходимость покоординатная.*

2. *Все конечномерные пространства одинаковой размерности и над одним полем изоморфны как линейные топологические пространства.*

3. *Любые две нормы на конечномерном линейном пространстве эквивалентны.*

4. *В конечномерном нормированном пространстве любое ограниченное множество предкомпактно.*

Замечание. Любое абсолютно выпуклое тело в $\mathbb{R}^k$, не содержащее прямой, может быть единичным шаром в некотором нормированном пространстве $< \mathbb{R}^k, ||\cdot|| >$.

Определение. *Подпространством нормированного пространства* называется замкнутое линейное многообразие.

Утверждение 12.1. *Любое конечномерное многообразие в нормированном пространстве замкнуто, т. е. является подпространством нормированного пространства.*

Утверждение 12.2. *Пусть X — нормированное пространство, X_1 — его конечномерное подпространство. Тогда*

$$\forall\, x \in X\, \exists\, x_1 \in X_1\ \rho(x, X_1) = ||x - x_1||.$$

Утверждение 12.3. *Пусть X — нормированное пространство, X_1, X_2 — его подпространства, причем X_2 конечномерно. Тогда $X_1 + X_2$ — подпространство.*

Доказательство. Требуется доказать только замкнутость $X_1 + X_2$ и лишь в случае, когда $X_2 =< e >$ и $e \notin X_1$.

Пусть $x_n + \lambda_n e \to x_0,\ \{\, x_n \,\} \subset X_1$.

1. Если $\{\, \lambda_n \,\}$ ограничена, то $\exists \{\, \lambda_{n_k} \,\}\ :\ \lambda_{n_k} \to \lambda_0 \Longrightarrow$

$$x_{n_k} = -\lambda_{n_k} e + (x_{n_k} + \lambda_{n_k} e) \to -\lambda_0 e + x_0 \in X_1 \Longrightarrow$$

$$x_0 = (x_0 - \lambda_0 e) + \lambda_0 e \in X_1 + < e > .$$

2. Если $\{\, \lambda_n \,\}$ неограничена, то $\exists \{\, \lambda_{n_k} \,\}\ :\ \lambda_{n_k} \to \infty \Longrightarrow$

$$\frac{1}{\lambda_{n_k}} (x_{n_k} + \lambda_{n_k} e) = \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k} + e \to 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k} \to -e \in X_1 \text{ — противоречие. } \blacksquare$$

Лемма 12.1 (Ф. Рисс) (о почти перпендикуляре). *Пусть X — нормированное пространство, X_1 — его подпространство и $x_0 \notin X_1$. Тогда*

$$\forall\, \alpha \in (0;1)\, \exists\, e_\alpha\ :\ ||e_\alpha|| = 1 \wedge e_\alpha \in < x_0, X_1 > \ \wedge\ \rho(e_\alpha, X_1) \geqslant \alpha.$$

Доказательство. Так как $x_0 \notin X_1$ и X_1 замкнуто, то $\beta := \rho(x_0, X_1) > 0$. По определению $\rho(x_0, X_1)$ существует $x_\alpha \in X_1 :\ 0 \neq ||x_0 - x_\alpha|| < \beta/\alpha$.

Пусть $e_\alpha := \dfrac{x_0 - x_\alpha}{||x_0 - x_\alpha||} \in < x_0, X_1 >$. Тогда $\forall\, x \in X_1$

$$||e_\alpha - x|| = \frac{||x_0 - (x_\alpha + ||x_0 - x_\alpha|| \cdot x)||}{||x_0 - x_\alpha||} \geqslant \frac{\beta}{||x_0 - x_\alpha||} \geqslant \alpha. \quad \blacksquare$$

Замечание. Если $\exists\, x_1 \in X_1\ :\ ||x_0 - x_1|| = \rho(x_0, X_1)$, то

$$\exists\, e\ :\ ||e|| = 1 \wedge e \in < x_0, X_1 > \ \wedge\ \rho(e, X_1) = 1.$$

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть X — нормированное пространство, X_1 — его конечномерное подпространство и $x_0 \notin X_1$. Тогда*

$$\exists\, e\ :\ ||e|| = 1 \wedge e \in < x_0, X_1 > \ \wedge\ \rho(e, X_1) = 1.$$

2. *Для любой линейно независимой системы $\{\, x_n \,\}$ в нормированном пространстве найдется линейно независимая система $\{\, e_n \,\}$ такая, что*

$$\forall\, n\ ||e_n|| = 1,\ < e_1, \ldots, e_n > = < x_1, \ldots, x_n > \text{ и}$$
$$\rho(e_n, < e_1, \ldots, e_{n-1} >) = 1.$$

3. *В бесконечномерном нормированном пространстве шар $B[a, r]$ при $r > 0$ некомпактен.*

13. Ряды в нормированных пространствах

Определение. Пусть $\{\, x_n \,\} \subset X$ — нормированное пространство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ называется *сходящимся*, если

$$\exists\, \widehat{x} \in X\ :\quad \sum_{n=1}^{m} x_n \xrightarrow[m \to \infty]{} \widehat{x}.$$

Утверждение 13.1 (свойства рядов в нормированном пространстве).

1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *в нормированном пространстве* X *сходится, то* $x_n \to 0$.

2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *в нормированном пространстве* X *сходится, то* $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} x_n \to 0$ *при* $N \to \infty$.

3. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *в нормированном пространстве* X *сходятся, то* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{P}$ $\sum\limits_{n=4}^{\infty} (\lambda x_n + \mu y_n)$ *сходится и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \mu \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

4. *В банаховом пространстве для рядов справедлив критерий Коши.*

5. *В банаховом пространстве, если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ *сходится, то и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится, при этом*

$$\left|\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right|\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||.$$

Доказательство. $\boxed{5}$. $\left|\left|\sum\limits_{n=N+1}^{N+p} x_n\right|\right| \leqslant \sum\limits_{n=N+1}^{N+p} x_n$. ■

Замечание. Утверждение 13.1.5 для $X = C[a;b]$ есть признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ в нормированном пространстве X называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||$.

Теорема 13.1 (критерий банаховости пространства). *Нормированное пространство является банаховым тогда и только тогда, когда в нем любой абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Это утверждение 13.1.5.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $X \supset \{ x_n \}$— фундаментальная последовательность в нормированном пространстве X. Тогда найдется такая ее подпоследовательность $\{ x_{n_k} \}$, что $||x_{n_k} - x_{n_{k+1}}|| \leqslant 2^{-k}$. Поэтому ряд $x_{n_1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ абсолютно сходится, а, значит он является сходящимся. Но $x_{n_1} + \sum\limits_{n=1}^{k} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_{k+1}}$, поэтому $\{ x_{n_k} \}$ и $\{ x_n \}$ — сходящиеся последовательности. ■

14. Базисы и полные системы в нормированных пространствах

Определения . Пусть X – нормированное пространство.

1. Система векторов $\{ e_\alpha \}$ в X называется *нормированной*, если $\forall \alpha$ $||e_\alpha|| = 1$.

2. Система векторов $\{ e_\alpha \}$ в X называется *полной*, если $\overline{< \{ e_\alpha \} >} = X$.

3. Система векторов $\{ e_n \}\Big|_1^{\infty}$ в бесконечномерном нормированном пространстве X называется базисом, если

$$\forall x \in X \; \exists! \{ \lambda_n \} : \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Замечание. Всегда можно считать, что базис в нормированном пространстве есть нормированная система.

Утверждение 14.1. *Нормированное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда существует линейно независимая полная не более чем счетная система векторов.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $X_1 = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ счетное всюду плотное множество в нормированном пространстве X. Рассмотрим множество $X_2 := \{ x_m : x_m \in < x_1, \ldots, x_{m-1} > \}$. Тогда $X_1 \setminus X_2$ – полная линейно независимая система в X и она не более, чем счетна. ■

Утверждение 14.2. *Пусть $\{ e_n \}$ — базис в нормированном пространстве X. Тогда*
1. *$\{ e_n \}$ — линейно независимая система;*
2. *$\{ e_n \}$ — полная система;*
3. *X — сепарабельно.*

Следствие. *В нормированных пространствах m и $M[a;b]$ нет базисов.*

Утверждение 14.3. *Пусть X бесконечно мерное банаховом пространство с базисом $\{ e_n \}$. Тогда $\{ e_n \}$ не является алгебраическим базисом линейного пространства X.*

Действительно, $< \{ e_n \} > \not\ni \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e_n}{n^2 ||e_n||} \in X$. ■

Пример 14.1. В нормированных пространствах l_p и c_0 в качестве базиса можно взять

$$\{ e_n \} : \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots).$$

Задание 14.1. Найдите базис в нормированном пространстве c.

15. Евклидовы и гильбертовы пространства

Утверждение 15.1 (равенство параллелограмма). *Нормированное пространство X является евклидовым пространством тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, x, y \in X \quad ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2. \qquad (15.1)$$

Определения. Пусть X — евклидово пространство.
1. $x \perp y := (x, y) = 0$.
2. Система векторов $\{ e_\alpha \}$ называется *ортогональной*, если

$$\forall\, \alpha, \beta \;\; (\alpha \neq \beta \Longrightarrow e_\alpha \perp e_\beta).$$

3. Система векторов называется *ортонормированной*, если она ортогональна и нормированна.
4. Система векторов $\{ e_\alpha \}$ называется *тотальной*, если

$$(\forall\, \alpha \;\; x \perp e_\alpha) \Longrightarrow x = 0.$$

5. Множество $\{ x \in X : \forall\, y \in M \;\; x \perp y \}$ ортогональных элементов к множеству M обозначается следующим образом: $M^\perp$.
6. $x \perp M := x \in M^\perp$.

Теорема 15.1 (Пифагор). *Пусть X — евклидово пространство, x, $y \in X$. Если $x \perp y$, то $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.*

Замечания. 1. В вещественном евклидовом пространстве справедлива теорема, обратная теореме Пифагора.

2. В комплексном евклидовом пространстве теорема, обратная теореме Пифагора, несправедлива. Например, в $X = \mathbb{C}$ $|1+i|^2 = 2 = |1|^2 + |i|^2$, но $(i, 1) = i \neq 0$.

Следствие. *Если система векторов $\{ x_k \}\big|_1^m$ в евклидовом пространстве ортогональна, то* $\left|\left| \sum\limits_{k=1}^{m} x_k \right|\right|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} ||x_k||^2$.

Утверждение 15.2. *В сепарабельном евклидовом пространстве всякая ортонормированная система векторов не более чем счетна.*

Утверждение 15.3. *Если система ненулевых векторов в евклидовом пространстве ортогональна, то она линейно независима.*

Утверждение 15.4. *Пусть X — евклидово пространство, $\{ e_\alpha \} \subset X$, $x \in X$. Если $\forall\, \alpha\ x \perp e_\alpha$, то $x \perp \overline{\{ e_\alpha \}}$.*

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть X — евклидово пространство, $M \subset X$. Тогда $M^\perp$ — подпространство.*

2. *Если система векторов в евклидовом пространстве полна, то она и тотальна.*

Теорема 15.2 (Шмидт) (об ортогонализации). *Для любой линейно независимой системы векторов $\{ x_n \}$ в евклидовом пространстве X существует ортонормированная система векторов $\{ e_n \}$ такая, что*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \ < x_1, \ldots, x_n > = < e_1, \ldots, e_n > .$$

Доказательство. $e_1 := x_1/||x_1||$.

$$\widetilde{e}_{n+1} := x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (x_{n+1}, e_j) e_j, \quad e_{n+1} := \widetilde{e}_{n+1}/||\widetilde{e}_{n+1}||. \ \blacksquare$$

Следствие. *В сепарабельном евклидовом пространстве существует не более чем счетная полная ортонормированная система векторов.*

Определения. 1. Пусть L — линейное многообразие в евклидовом пространстве X. *Ортогональной проекцией вектора x на L* называется вектор $\widehat{x} \in L : (x - \widehat{x}) \perp L$.

2. Пусть X — метрическое пространство и $M \subset X$. *Метрической проекцией элемента x на множество M* называется элемент $\widehat{x} \in M : \rho(x, \widehat{x}) = \rho(x, M)$.

Теорема 15.3. *Пусть L — линейное многообразие в евклидовом пространстве X и $x_0 \in X$.*

1. *Если $\widehat{x}_0$ — ортогональная проекция вектора x_0 на линейное многообразие L в евклидовом пространстве S существует, то она единственна и $||\widehat{x}_0|| \leqslant ||x_0||$.*

2. *Пусть L — линейное многообразие в евклидовом пространстве X.*

($\widehat{x}$ — ортогональная проекция x_0 на L) $\Longleftrightarrow$ ($\widehat{x}$ — метрическая проекция x_0 на L).

Доказательство. $\boxed{2, \Longrightarrow}$. Если $x \in L$, то $(x_0 - \widehat{x}) \perp L$, а $(x - \widehat{x}) \in L$. Поэтому

$$||x_0 - x||^2 = ||x_0 - \widehat{x}||^2 + ||(\widehat{x} - x)||^2 \geqslant ||(x_0 - \widehat{x})||^2.$$

$\boxed{2, \Longleftarrow}$. Если $\widehat{x} \in L$ и $(x_0 - \widehat{x}) \notin L^\perp$, то $\exists\, e \in L : \ (e, \widehat{x} - x_0) = 1$. Но для любого $\alpha > 0$

$$||(\widehat{x} - x_0) - \alpha e||^2 = ||\widehat{x} - x_0||^2 - 2\alpha + \alpha^2 ||e||^2 \overset{\alpha < 2/||e||^2}{<} ||\widehat{x} - x_0||^2. \ \blacksquare$$

Определение. Ортогональную проекцию вектора x на линейное многообразие L в евклидовом пространстве (если она существует) будем обозначать $Pr_L(x)$.

Задание 15.1. Постройте пример евклидова пространства X, линейного многообразия L в X и элемента $x \in X$, для которого не существует ортогональной проекции x на L.

Теорема 15.4. *Пусть M — выпуклое и замкнутое множество в гильбертовом пространстве X. Тогда для любого $x_0 \in X$ существует метрическая проекция x_0 на M.*

Доказательство. Пусть $\{ x_n \} \subset M$ и

$$||x_n - x_0|| \to \alpha := \rho(x_0, M).$$

Тогда $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \alpha \leqslant ||x_n - x_0||$ и

$$\alpha^2 \leqslant ||(x_n + x_m)/2 - x_0||^2 \overset{(15.1)}{=}$$

$$= 2||(x_m - x_0)/2||^2 + 2||(x_n - x_0)/2||^2 -$$

$$-\,||(x_m - x_0)/2 - (x_n - x_0)/2||^2 =$$

$$= ||x_m - x_0||^2/2 + ||x_n - x_0||^2/2 - ||x_m - x_n||^2/4.$$

Поэтому

$$0 \leqslant ||x_m - x_n||^2 \leqslant 2||x_m - x_0||^2 + 2||x_m - x_0||^2 - 4\alpha^2 \to 0$$

при $m, n \to \infty$. Тем самым $\{\, x_n \,\}$ фундаментальна и $\widehat{x} := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in M$. ■

Теорема 15.5. *Пусть M — подпространство гильбертова пространства X. Тогда $\forall\, x \in X\ \exists\, Pr_M(x)$ и $X = M \oplus M^{\perp}$.*

Замечание. В евклидовом пространстве, если M — подпространство, то $M^{\perp}$ называют также *ортогональным дополнением* (*до* M).

Утверждение 15.5. *Пусть $M \subset X$ — евклидово пространство. Тогда $M^{\perp} = \left(\overline{< M >}\right)^{\perp}$ и $M^{\perp\perp\perp} = M^{\perp}$.*

Утверждение 15.6. *Пусть $M \subset X$ — гильбертово пространство. Тогда $M^{\perp\perp} = \overline{< M >}$.*

Задание 15.2. Постройте пример евклидова пространства X и множества $M \subset X$, для которого $M^{\perp\perp} \neq \overline{< M >}$.

16. Ряды Фурье в евклидовых и гильбертовых пространствах

Утверждение 16.1. *Пусть $\{\, e_n \,\}$ — ортонормированная система в евклидовом пространстве X и $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Тогда $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \lambda_n = (x, e_n)$ и $||x||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$.*

Следствие. *Разложение элемента евклидова пространства в ряд по ортономированной системе единственно.*

Определение. Пусть $\{\, e_n \,\}$ — ортонормированная система в евклидовом пространстве X. *Рядом Фурье элемента $x \in X$ (по ортонормированной системе $\{\, e_n \,\}$)* называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n)e_n := \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n$.

Теорема 16.1 (экстремальное свойство коэффициентов ряда Фурье). *Если $\{\, e_n \,\}$ — ортонормированная система в евклидовом пространстве X, то*

$$\widehat{x}_m := \sum_{n=1}^{m} c_n(x)e_n = Pr_{<e_1,\dots,e_m>}(x).$$

Таким образом, $\widehat{x}_m$ — элемент наилучшего приближения вектора x элементами из $< e_1, \dots, e_m >$.

Доказательство. $(x - \widehat{x}_m) \perp < e_1, \dots, e_m >$. ■

Следствие. *Если L — конечномерное подпространство евклидова пространства, то $\forall\, x \in X\ \exists\, Pr_L(x)$.*

Теорема 16.2 (неравенство Бесселя). *Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n$ — ряд Фурье элемента $x \in X$ евклидова пространства X, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c(x)|^2 \leqslant ||x||^2. \tag{16.1}$$

Доказательство. $||x||^2 = ||(x - \widehat{x}_m) + \widehat{x}_m||^2 =$

$$= ||x - \widehat{x}_m||^2 + ||\widehat{x}_m||^2 \geqslant ||\widehat{x}_m||^2 = \sum_{n=1}^{m} |c_n(x)|^2. \quad \blacksquare$$

Следствие. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n$ *— ряд Фурье элемента* x *евклидова пространства* X. *Тогда*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c(x)|^2$ *сходится.*

2. $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{m} c_n(x)e_n \right\}$ *— фундаментальная последовательность.*

3. *В гильбертовом пространстве любой ряд Фурье является сходящимся.*

4. (Теорема Рисса — Фишера). *Если* X *— гильбертово пространство, то*

$$\forall \{ \alpha_n \} \subset \mathbb{P} \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 - \text{сходится} \Longrightarrow \exists\, x \in X \ : x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right).$$

5. *Если* X *— гильбертово пространство, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n = Pr_{\overline{<\{ e_n \}>}}(x).$$

6. *В гильбертовом пространстве ортонормированная система полна тогда и только тогда, когда она тотальна.*

Задание 16.1. Постройте пример тотальной в евклидовом пространстве, но не полной системы.

Определение. Ортонормированная система $\{ e_n \}$ называется *замкнутой*, если

$$\forall\, x \quad ||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2. \tag{16.2}$$

Равенство (16.2) называется *равенством Парсеваля — Стеклова.*

Теорема 16.3. *Пусть* $\{ e_n \}$ *— ортонормированная система в евклидовом пространстве. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\{ e_n \}$ *замкнута.* 2. $\{ e_n \}$ *— базис.* 3. $\{ e_n \}$ *полна.*

Доказательство. $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$. Пусть $\widehat{x}_m = \sum\limits_{n=1}^{m}$. Поскольку

$$||x||^2 = ||x - \widehat{x}_m||^2 + \sum_{n=1}^{m} |c_n(x)|^2, \tag{16.3}$$

то в силу равенства (16.2) получим $x_m \to x$, т. е.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n.$$

Единственность этого представления уже доказана (см. следствие утверждения 16.1).

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ есть утверждение 14.2.

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$. Пусть $\{ e_n \}$ полна. Тогда

$$\forall\, x\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, y_{x,\varepsilon} \in < \{ e_n \} >: \ ||x - y_{x,\varepsilon}|| < \varepsilon.$$

Так как $y_{x,\varepsilon} \in < \{ e_n \} >$, то

$$\exists\, m_0 \ : \ y_{x,\varepsilon} \in < e_1, \ldots, e_{m_0} > =: X_{m_0},$$

поэтому $\forall\, m \geqslant m_0 \ y_{x,\varepsilon} \in X_m$ и

$$\varepsilon^2 > ||x - y_{x,\varepsilon}||^2 \geqslant \rho^2(x, < e_1, \ldots, e_m >) = \rho^2(x, \widehat{x}_m) \overset{(16.3)}{=}$$

$$= ||x||^2 - \sum_{n=1}^{m} |c_n(x)|^2 \overset{(16.1)}{\geqslant} 0.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\varepsilon^2 \geqslant ||x||^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \geqslant 0 \underset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} ||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2. \quad \blacksquare$$

Следствие. *В сепарабельном евклидовом пространстве всегда есть ортонормированный базис.*

Утверждение 16.2. *Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства над одним полем изоморфны.*

Доказательство. Пусть X и $\widetilde{X}$ — бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства над полем $\mathbb{P}$, $\{\, e_n \,\}$ — базис в X, а $\{\, \widetilde{e}_n \,\}$ — базис в $\widetilde{X}$. Тогда отображение $f : X \to \widetilde{X}$, определенное формулой $f(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \widetilde{e}_n$, линейно, биективно и сохраняет скалярное произведение. ■

Задание 16.2. Постройте пример евклидова пространства X, ортонормированной системы $\{\, e_n \,\}$ в нем и элемента x_0 такого, что его ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x_0) e_n$ расходится.

17. Несепарабельные гильбертовы пространства

Лемма 17.1. *Если* $\{\, \alpha_\gamma \,\}_{\gamma \in \Gamma} \subset (0; +\infty)$ *и* $|\gamma \in \Gamma| > |\mathbb{N}|$, *то*

$$\exists \{\, \gamma_n \,\}\ \exists \beta > 0\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{\gamma_n} \geqslant \beta,$$

и, в частности, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{\gamma_n}$ *расходится.*

Доказательство. Предположим противное:

$$\forall \beta > 0 \ \ \{\, \gamma : \alpha_\gamma \geqslant \beta \,\} \text{ — конечно.}$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\Gamma_n := \{\, \gamma : \alpha_\gamma \geqslant 1/n \,\}$ конечно. Но $\Gamma = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n \implies |\gamma \in \Gamma| \leqslant |\mathbb{N}|$ — противоречие с условием. ■

Утверждение 17.1. *В любом евклидовом пространстве существуют максимальные (по включению) ортонормированные системы.*

Действительно, достаточно применить лемму Цорна. ■

Теорема 17.1. *Пусть* $\{\, e_\gamma \,\}$ *— максимальная ортонормированная система в гильтертовом пространстве* X*. Тогда*

1. $\{\, e_\gamma \,\}$ *— тотальная в* X *(и, следовательно, полная).*
2. $\forall x \in X\ \Gamma(x) := \{\, \gamma : (x, e_\gamma) \neq 0 \,\}$ *не более чем счетно.*
3. $\forall x \in X\ x = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma(x)} (x, e_\gamma) e_\gamma$.

Доказательство. $\boxed{1}$. Если есть такой $e \neq 0$, что $\forall \gamma$ $(e, e_\gamma) = 0$, то $\{\, e_\gamma \,\} \neq \{\, e_\gamma \,\} \cup \{e/||e||\}$ — ортонормированная система и, тем самым, $\{\, e_\gamma \,\}$ не максимальна.

$\boxed{2}$. Если $|\Gamma(x)| > |\mathbb{N}|$, то по лемме 17.1 $\exists \gamma_n :\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_{\gamma_n})|^2$ расходится, что в силу неравенства Бесселя, справедливой для любой счетной ортонормированной системы, невозможно.

$\boxed{3}$. Пусть $x \in X$ и $H := \overline{<\{\, e_\gamma \,\}_{\gamma \in \Gamma(x)}>}$. Тогда $H^\perp = \overline{<\{\, e_\gamma \,\}_{\gamma \notin \Gamma(x)}>}$ и $x \in H$, поскольку $X = H \oplus H^\perp$. Но в H система полна $\{\, e_\gamma \,\}_{\gamma \in \Gamma(x)}$ и, тем самым, является базисом. ■

18. Линейные топологические пространства

Определение. Линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ X с заданной на нем топологией τ называется *линейным топологическим пространством*, если операции сложения и умножения на скаляр непрерывны в этой топологии, т. е.

1. $\forall x_1, x_2 \in X\, \forall U(x_1 + x_2)\, \exists U(x_1), U(x_2) :$
$$U(x_1) + U(x_2) \subset U(x_1 + x_2).$$
2. $\forall x \in X\, \forall \lambda \in \mathbb{P}\, \forall U(\lambda x)\, \exists U(x), U(\lambda) :$
$$U(\lambda) \cdot U(x) \subset U(\lambda x).$$

Определение. *Подпространством линейного топологического пространства* называется замкнутое линейное многообразие.

Пример 18.1. Всякое нормированное пространство есть линейное топологическое пространство.

Пример 18.2. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $X \neq \{0\}$. Тогда $< X, \tau_a >$ — линейное топологическое пространство, а $< X, \tau_d >$ не является линейным топологическим пространством.

Утверждение 18.1. *Пусть* $< X, \tau >$ *— линейное топологическое пространство,* $a \in X$ *и* $0 \neq \lambda \in \mathbb{P}$.

1. $G \in \tau \Longleftrightarrow G + a \in \tau$.
2. $G \in \tau \Longleftrightarrow \lambda \cdot G \in \tau$.

Следствие. *Топология линейного топологического пространства полностью определяется окрестностями нуля.*

Утверждение 18.2 (свойства окрестностей нуля в линейном топологическом пространстве).

1. $\forall\, U(0)\, \exists\, U_1(0) \quad U_1(0) + U_1(0) \subset U(0)$.
2. *Всякая окрестность нуля — поглощающее множество.*
3. *Существует база окрестностей нуля, состоящая из уравновешенных множеств.*

Доказательство. $\boxed{3}$. Так как $0 \cdot 0 = 0$, то

$$\forall\, U(0)\, \exists\, U_1(0), \delta > 0\, \forall\, \lambda \in \mathbb{P} \quad (|\lambda| < \delta \Longrightarrow \lambda \cdot U_1(0) \subset U(0)).$$

Тогда $U_2(0) := \bigcup\limits_{|\lambda| < \delta} (\lambda \cdot U_1(0)) \subset U(0)$ и уравновешенно. ■

Пример 18.3. В нормированном пространстве $B(0, r)$ — уравновешенное множество, а $\{\, B(0, r) : r > 0 \,\}$ — база окрестностей нуля из уравновешенных множеств.

Определение. Множество M в линейном топологическом пространстве называется *ограниченным*, если оно поглощается любой окрестностью нуля, т. е.

$$\forall\, U(0)\, \exists\, \lambda > 0\, \forall\, \mu \ (|\mu| \geqslant \lambda \Longrightarrow M \subset \mu \cdot U(0)).$$

Задание 18.1. Пусть X — линейное топологическое пространство и $M \subset X$. Покажите, что M ограничено $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \{\, x_n \,\} \subset M\, \forall\, \{\, \lambda_n \,\} \subset \mathbb{P} \quad (\lambda_n \to 0 \Longrightarrow \lambda_n x_n \to 0).$$

Утверждение 18.3. *Если* U *— выпуклая окрестность нуля в линейном топологическом пространстве, то существует* U_{ac} *— абсолютно выпуклая окрестность нуля такая, что* $U_{ac} \subset U$.

Доказательство. По утверждению 18.2.3 существует уравновешенная окрестность нуля $U_0 \subset U$. В силу утверждения **??** при $|\lambda| = 1$ будем иметь $U_0 = \lambda \cdot U_0 \subset \lambda \cdot U$, поэтому $U_0 \subset \bigcap\limits_{|\lambda|=1} (\lambda \cdot U) \;=:\; U_{ac}$ — выпуклая окрестность нуля и $U_{ac} \subset U$. Покажем, что U_{ac} — уравновешенное множество.

Пусть $0 < |\mu| \leq 1$. Тогда

$$\mu \cdot U_{ac} = |\mu| \left(\frac{\mu}{|\mu|} \cdot U_{ac} \right) = |\mu| \cdot \bigcap_{|\lambda|=1} \left(\frac{\mu\lambda}{|\mu|} \cdot U \right) = \left[\beta := \frac{\mu\lambda}{|\mu|} \right] =$$

$$= |\mu| \cdot \bigcap_{|\beta|=1} (\beta \cdot U) = |\mu| \cdot U_{ac} \overset{\text{утв.9.6.4}}{\subset} U_{ac}. \ ■$$

Определение. Линейное топологическое пространство называется *локально выпуклым пространством*, если в нем существует база окрестностей нуля, состояшая из выпуклых множеств.

Замечание. В силу утверждения 18.3 в локально выпуклом пространстве существует база окрестностей нуля, состояшая из абсолютно выпуклых множеств.

Пример 18.4. Всякое нормированное пространство есть отделимое локально выпуклое пространство.

Теорема 18.1 (Колмогоров) (критерий нормируемости). *Отделимое линейное топологическое пространство*

$< X,\tau >$ нормируемо (его топология τ порождается некоторой нормой на X) тогда и только тогда, когда в нем существует выпуклая ограниченная окрестность нуля.

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. $B(0,1)$ — выпуклая и ограниченная окрестность нуля.

$\boxed{\Longleftarrow}$. 1. Пусть U_0 — выпуклая ограниченная окрестность нуля. По утверждению 18.3 существует абсолютно выпуклая окрестность нуля V такая, что $V \subset U_0$. Покажем, что $p_V(\cdot)$ — норма.

Если $p_V(\cdot)$ — не норма, то $\exists\, x_0 \neq 0 \;:\; \mathbb{R}\cdot x_0 \subset V$. Но V ограничено, поэтому $\forall\, U(0)\,\exists\,\lambda > 0 \;:\; V \subset \lambda\cdot U(0) \Longrightarrow \mathbb{R}\cdot x_0 \subset \lambda\cdot U(0) \Longrightarrow \mathbb{R}\cdot x_0 \subset U(0)$ и тем самым X — не отделимое пространство.

2. Покажем, что эта норма порождает исходную топологию. Пусть $U(0)$ — произвольная окрестность нуля.

В силу ограниченности V $\forall\, U(0)\,\exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, V \subset n\cdot U(0)$.

Но $B(0;1) \subset V \subset n\cdot U(0)$, поэтому $B(0;1/n) \subset U(0)$, т. е. $\{\, B(0;1/n);\; n \in \mathbb{N}\,\}$ — база окрестностей нуля исходной топологии τ. ■

Замечание. Любая система полунорм $\{\, p_\alpha(\cdot)\,\}$ на линейном пространстве X задает локально выпуклую топологию следующим образом: система множеств вида

$$U(0;\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\varepsilon) := \Big\{\, x \in X \,:\, \max_{i\in\overline{1,k}} p_{\alpha_i}(x) < \varepsilon \,\Big\} (\varepsilon > 0)$$

образует базу абсолютно выпуклых окрестностей нуля.

Эта топология отделима $\Longleftrightarrow (\forall\,\alpha\, p_\alpha(x) = 0 \Longrightarrow x = 0)$.

Все p_α непрерывны в этой топологии и

M ограничено $\Longleftrightarrow \forall\,\alpha\, p_\alpha(M)$ ограничено.

Утверждение 18.4. *На любом конечномерном отделимом линейном топологическом пространстве $< X,\tau >$ можно ввести норму, порождающую топологию τ.*

Глава 3

Линейные операторы и линейные функционалы

19. Ограниченные линейные операторы и их нормы

Определение. Пусть X и Y — линейные пространства над полем $\mathbb{P}$. Оператор (отображение) $A : D(A) \subset X \to Y$ называется *линейным*, если $D(A)$ — линейное многообразие и

$$\forall\, x_1, x_2 \in D(A)\,\forall\,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{P} \quad A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2).$$

Замечание. Часто вместо $A(x)$ мы будем писать Ax.

Утверждение 19.1. *Пусть X и Y — нормированные пространства, а $A : X \to Y$ линейный. Следующие условия эквивалентны:*

1. *A непрерывен на X.*
2. *A непрерывен в точке $x = 0$.*
3. *A ограничен, т. е. переводит любое ограниченное множество в ограниченное.*
4. $\exists\, K \geqslant 0\,\forall\, x \in X \;\; (||x|| \leqslant 1 \Longrightarrow ||Ax|| \leqslant K)$.
5. *A равномерно непрерывен на X.*

Доказательство. $\boxed{2 \Longrightarrow 3}$. Поскольку A непрерывен в нуле, то для $\varepsilon_0 = 1$ найдется такое $\delta_0 > 0$, что

$$||x|| < \delta_0 \Longrightarrow ||Ax|| < 1.$$

Пусть $X \supset M$ ограничено. Тогда $\exists\, R > 0 \;\; M \subset B(0,R) \Longrightarrow A(M) \subset B(0, R/\delta_0)$. ■

Замечание. Соотношения $\boxed{1 \Longleftrightarrow 2}$ и $\boxed{1 \Longrightarrow 3}$ справедливы для линейных отображений в любых линейных топологических пространствах.

Определение. Пусть X и Y — нормированные пространства над одним и тем же полем. Тогда $\mathcal{L}(X,Y) :=$ множество всех линейных непрерывных на X (ограниченных) операторов из X в Y. Используется также обозначение $\mathcal{B}(X,Y)$.

Утверждение 19.2. *Пусть X и Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Тогда $\mathcal{L}(X,Y)$ — линейное пространство над тем же полем относительно операций*

$$(A_1 + A_2)(x) := A_1 x + A_2 x, \ \ (\lambda A)(x) := \lambda A x.$$

Утверждение 19.3. *Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то*

$$Ker A := A^{-1}(0) = \{\, x \in X :\ Ax = 0 \,\} \ -$$

подпространство нормированного пространства X.

Утверждение 19.4. *Если X и Y — нормированные пространства, X конечномерно, а $A : X \to Y$ линейный, то $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Пример 19.1. Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство, $\{\, e_\alpha \,\}$ — его нормированный алгебраический базис, а $\{\, e_n \,\}$ — счетное подмножество этого базиса.

Определим $\varphi : X \to \mathbb{P}$ следующим образом:

$$\varphi(e_n) := n, \ \ \forall\, e_\alpha \notin \{\, e_n \,\} \ \varphi(e_\alpha) := 0,$$

$$\varphi\Big(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_{\alpha_k}\Big) := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi(e_{\alpha_k}).$$

Тогда φ линейный, но не ограниченный, поскольку $||e_n|| = 1$, а $\varphi(e_n) = n \to \infty$.

Определение. Пусть X и Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то

$$||A|| := \sup_{||x|| \leqslant 1} ||Ax||.$$

Утверждение 19.5. *Пусть X и Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Тогда $< \mathcal{L}(X,Y), ||\cdot|| >$ — нормированное пространство.*

Утверждение 19.6. *Пусть X и Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$ и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

1. $$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{x \neq 0}(||Ax||/||x||) = \inf\{\, K \geqslant 0 :\ \forall\, x \in X \ ||Ax|| \leqslant K||x|| \,\}.$$
2. $\omega(\delta; A, X) = \delta ||A||$.

Утверждение 19.7. *Пусть X — нормированное пространство, X_1 — всюду плотное линейное многообразие, Y — банахово пространство и $A_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y)$. Тогда существует единственный $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, продолжающий A_0 с X_1 на X, т. е. $\forall\, x \in X_1 \ Ax = A_0 x$. При этом $||A|| = ||A_0||$.*

Доказательство следует из теоремы 7.1. ∎

Пример 19.2. Пусть $A : C[0;1] \to C[a;b]$ задан формулой $(Ax(\cdot))(t) := \int\limits_0^t \tau x(\tau)\, d\tau$. Тогда $|(Ax(\cdot))(t)| \leqslant \int\limits_0^t |\tau x(\tau)|\, d\tau \leqslant$ $\leqslant ||x(\cdot)||_{C[0;1]} t^2/2 \leqslant \frac{1}{2} ||x(\cdot)||_{C[0;1]}$. Но при $x_0(t) \equiv 1$ получим $||x_0(\cdot)||_{C[0;1]} = 1$ и $||Ax_0(\cdot)||_{C[0;1]} = 1/2$, т. е. $||A|| = 1/2$.

Пример 19.3. Пусть $A \in \mathcal{L}(C[-1;1], \mathbb{R})$ задан формулой

$$(Ax(\cdot))(t) := \int\limits_{-1}^{t} \operatorname{sign}(\tau) x(\tau)\, d\tau.$$

Тогда $||A|| = 2$, но не существует такого $x_0(\cdot) \in C[-1;1]$, что $||x_0(\cdot)|| = 1$ и $|Ax_0(\cdot)| = 2$. В данном случае говорят, что норма $||A||$ *недостижима.*

Пример 19.4. Пусть $A : D(A) \subset X \to Y$, где $X = Y = C[0;1]$ и $D(A) = C^1[-1;1]$, задан формулой

$$(Ax(\cdot))(t) := x'(t).$$

Тогда для $x_n(t) = \sin(nt)$ получим, что $||x_n(\cdot)|| \leqslant 1$ и $||Ax_n(\cdot)|| = n$, т. е. A — неограниченный линейный оператор.

Утверждение 19.8 (свойства операторной нормы). *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Тогда*

1. $\forall\, x \in X \quad ||Ax|| \leqslant ||A|| \cdot ||x||$.
2. $||B \cdot A|| \leqslant ||B|| \cdot ||A||$.

Теорема 19.1. *Пусть X — нормированное пространство, а Y — банахово пространство над полем $\mathbb{P}$. Тогда $\mathcal{L}(X,Y)$ — банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\{ A_n \}$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{L}(X,Y)$, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m > N(\varepsilon) \quad ||A_n - A_m|| < \varepsilon. \tag{19.1}$$

1. В силу (19.1) для любого $x \in X$ последовательность $\{ A_n x \}$ — фундаментальна в $Y \Longrightarrow \exists\, y \in Y : \ A_n x \to y =: A_0 x$. Оператор $A_0 : X \to Y$ и линеен.

2. Так как $\{ A_n \}$ — фундаментальная последовательность, то она ограничена (см. утверждение 5.1.2), т. е.

$$\exists\, K \geqslant 0\, \forall\, n \ ||A_n|| \leqslant K \Longrightarrow \forall\, x \in X : ||x|| \leqslant 1 \ ||A_n x|| \leqslant K \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}$$

$$||A_0 x|| \leqslant K.$$

3. Соотношение (19.1) при $x : ||x|| \leqslant 1$ превращается в

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m > N(\varepsilon) \quad ||A_n x - A_m x|| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$||A_n x - A_0 x|| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow ||A_n - A_0|| \leqslant \varepsilon, \text{ т. е. } ||A_n - A_0|| \to 0. \ \blacksquare$$

Замечание. Пусть X — банахово пространство. Тогда банаховым будет и нормированное пространство $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$. Но в $\mathcal{L}(X)$ есть еще умножение, поэтому там можно рассматривать степенные ряды.

Утверждение 19.9. *Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X)$ и $\overline{\lim} \sqrt[n]{|\lambda_n| ||A^n||} < 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n A^n$ сходится в $\mathcal{L}(X)$.*

Пример 19.5. Пусть X — банахово пространство и A из $\mathcal{L}(X)$. Тогда $e^A := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} A^n$, $\sin A := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$, $\cos A := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$.

Пример 19.6. Пусть X — банахово пространство и A из $\mathcal{L}(X)$. Тогда решение задачи Коши $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ имеет вид $x(t) = e^{tA} x_0$.

Определения. Пусть X, Y — нормированные пространства.

1. Сходимость $\{ A_n \} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ к A_0 в смысле операторной нормы (в пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$) называется *равномерной сходимостью* (поскольку это действительно равномерная сходимость на каждом ограниченном множестве) и обозначается $A_n \rightrightarrows A_0$.

2. Говорят, что $\{ A_n \} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *сходится поточечно* (или *сильно*) к A_0, если $\forall\, x \in X \quad A_n x \to A_0 x$. Поточечная (сильная) сходимость обозначается $A_n \to A_0$ или $A_n \underset{X}{\longrightarrow} A_0$.

Утверждение 19.10. *Пусть X, Y — нормированные пространства. Если $\{ A_n \} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ и $A_n \rightrightarrows A_0$, то $A_n \to A_0$.*

Теорема 19.2 (Достаточное условие поточечной сходимости). *Пусть X, Y — нормированные пространства, $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, $\{||A_n||\}$ ограничено, $A_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $A_n \xrightarrow[X_1]{} A_0$, где X_1 — полная в X система. Тогда $A_n \xrightarrow[X]{} A_0$.*

Доказательство. В силу линейности A_n из сходимости на X_1 следует сходимость и на $< X_1 >$.

Пусть $x_0 \in X = \overline{< X_1 >}$. Тогда найдется $\{x_m\} \subset < X_1 >$: $x_m \to x_0$.

Поэтому $||A_n x_0 - A_0 x_0|| \leqslant$

$$\leqslant ||A_n x_0 - A_n x_m|| + ||A_n x_m - A_0 x_m|| + ||A_0 x_m - A_0 x_0|| \leqslant$$

$$\leqslant ||x_m - x_0||(||A_n|| + ||A_0||) + ||A_n x_m - A_0 x_m|| \leqslant$$

$$\leqslant [\exists K > 0\, \forall n\ (||A_n|| + ||A_0||) \leqslant K] \leqslant$$

$$\leqslant K||x_m - x_0|| + ||A_n x_m - A_0 x_m||.$$

Отсюда $0 \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} ||A_n x_0 - A_0 x_0|| \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} ||A_n x_0 - A_0 x_0|| \leqslant \leqslant K||x_m - x_0|| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. ■

20. Принцип равномерной ограниченности

Лемма 20.1. *Пусть X и Y — нормированные пространства. Если $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ равномерно ограничена на некотором шаре $B[x_0, r]$ $(r > 0)$, то $\{||A_n||\}$ ограничена.*

Доказательство. Пусть $\exists K > 0\, \forall x \in B[x_0, r]\, \forall n \in \mathbb{N}$ $||A_n x|| \leqslant K$. Тогда $\forall x, y \in B[x_0, r]\, \forall n \in \mathbb{N}$ $||A_n(x - y)|| \leqslant 2K$ Поэтому $\forall x : ||x|| \leqslant 1$ $||A_n(2rx)|| \leqslant 2K$ или $||A_n x|| \leqslant K/r$. ■

Теорема 20.1 (Банах — Штейнгауз) (принцип равномерной ограниченности). *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство, а $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда, если для любого $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}$ ограничена, то ограничена и последовательность $\{||A_n||\}$.*

Доказательство. Предположим противное: $\{||A_n||\}$ не ограничена. Тогда $\{A_n\}$ не ограничена на любом шаре ненулевого радиуса.

Возьмем произвольные x_0 и $r_0 > 0$.

Тогда $\exists\, x_1 \in B[x_0, r_0/2]\, \exists\, n_1 : ||A_{n_1} x_1|| > 1$.

Так как A_{n_1} непрерывен в точке x_1, то

$$\exists\, r_1 < r_0/2\, \forall x \in B[x_1, r_1] : ||A_{n_1} x|| > 1 \text{ и } B[x_1, r_1] \subset B[x_0, r_0].$$

Потом найдем

$$x_2 \in B[x_1, r_1/2],\ n_2 > n_1 : ||A_{n_2} x_2|| > 2 \text{ и } B[x_2, r_2] \subset B[x_1, r_1],$$

$$\forall x \in B[x_2, r_2] : ||A_{n_2} x|| > 2.$$

Таким образом индукционно построим последовательность вложенных и стягивающихся шаров $\{B[x_k, r_k]\}$ таких, что $\forall x \in B[x_k, r_k]$ $||A_{n_k} x|| > k$.

Так как X полно, то $\exists\, \widetilde{x} \in \bigcap\limits_k B[x_k, r_k] \Longrightarrow \forall k\ ||A_{n_k} \widetilde{x}|| > k$. Таким образом, $\{A_n \widetilde{x}\}$ не ограничена. ■

Следствие. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$.*

1. *Если $A_n \xrightarrow[X]{} A_0$, то $\{||A_n||\}$ — ограничена и $A_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$.*
2. *Если $A_n \xrightarrow[X]{} A_0$ и $x_n \to x_0$, то $A_n x_n \to A_0 x_0$.*

Доказательство. $\boxed{2}$.

$$||A_n x_n - A_0 x_0|| \leqslant ||A_n|| \cdot ||x_n - x_0|| + ||A_n x_0 - A_0 x_0||. \ ■$$

Теорема 20.2 (критерий поточечной сходимости). *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство. $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ и $A_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$. В этом случае $A_n \xrightarrow[X]{} A_0$ тогда и только тогда, когда $\{||A_n||\}$ ограничена и $A_n \xrightarrow[X_1]{} A_0$, где X_1 — полная в X система.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Есть первое следствие теоремы Банаха — Штейнгауза.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Есть теорема 19.2. ■

Замечание. В [14] (в отличие от других монографий и учебников) именно теорема 20.2 называется теоремой Банаха — Штейнгауза.

21. Линейные функционалы

Определения. 1. Линейные операторы из линейного пространства над полем $\mathbb{P}$ в $\mathbb{P}$ называются *линейными функционалами.*

2. Множество всех линейных функционалов, определенных на всем линейном пространстве X, обозначается следующим образом: $X^{\#}$ (отметим, что оно само есть линейное пространство над полем $\mathbb{P}$).

3. Пусть X — нормированное пространство над полем $\mathbb{P}$. Линейное пространство $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{P})$ называется *сопряженным к нормированному пространству* X.

Замечание. Пример 19.1 показывает, что $X^* \neq X^{\#}$ для бесконечномерного нормированного пространства X.

Утверждение 21.1. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда $< X^*, ||\cdot|| >$ — банахово пространство.*

Действительно, это частный случай теоремы 19.1, поскольку $\mathbb{P}$ — банахово пространство. ■

Замечание. В дальнейшем под X^* будем понимать именно это банахово пространство.

Пример 21.1. 1. $\varphi(x(\cdot)) := \int\limits_a^b \widetilde{\varphi}(t)x(t)\,dt$. Если $\widetilde{\varphi}$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, то $\varphi \in (C[a;b])^*$.

2. $\delta(x(\cdot)) := x(0)$, $0 \in [a;b] \Longrightarrow \delta \in (C[a;b])^*$.

3. В евклидовом пространстве X $\varphi_a(\cdot) := (\cdot, a) \in X^*$.

Утверждение 21.2. *Пусть X — нормированное пространство.*

1. *Если $0 \neq \varphi \in X^{\#}$, то $Ker\,\varphi = \varphi^{-1}(0)$ — гиперподмногообразие пространства X, т. е. существует $e \in X$: $Ker\,\varphi \oplus < e >= X$.*

2. *$\varphi \in X^* \Longleftrightarrow Ker\,\varphi$ — замкнуто.*

3. *Если $0 \neq \varphi \in X^*$ и $0 \neq \lambda$, то $\varphi^{-1}(\lambda)$ — гиперплоскость.*

4. *$X^{\#} \supset \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ линейно независимы $\Longleftrightarrow$ $\exists\{e_1, \ldots, e_n\} \subset X : \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$.*

5. *$\varphi_0 \in < \varphi_1, \ldots, \varphi_n > \subset X^{\#} \Longleftrightarrow Ker\,\varphi_0 \supset \bigcap\limits_{i=1}^n Ker\,\varphi_i$.*

6. *Если $\varphi_1, \varphi_1 \in X^*$, то*

$$Ker\,\varphi_1 = Ker\,\varphi_2 \Longleftrightarrow \exists\, 0 \neq \lambda \in \mathbb{P}\ \ \varphi_1 = \lambda\varphi_2.$$

Доказательство. $\boxed{1}$. Пусть e: $\varphi(e) = 1$, тогда $x - \varphi(x)e \in Ker\,\varphi$.

$\boxed{2, \Longrightarrow}$. Есть частный случай утверждения 19.3.

$\boxed{2, \Longleftarrow}$. Пусть $\varphi \notin X^*$ тогда $\exists\{e_n\}$: $||e_n|| = 1$ и $\varphi(e_n) \to \infty$. Пусть e_0: $\varphi(e_0) = 1$, тогда $x_n := e_n - \varphi(e_n)e_0 \in Ker\,\varphi \Longrightarrow$

$$\frac{x_n}{\varphi(e_n)} = \frac{e_n}{\varphi(e_n)} - e_0 \in Ker\,\varphi, \text{ а } \frac{x_n}{\varphi(e_n)} \to -e_0 \notin Ker\,\varphi.$$

$\boxed{3, \Longrightarrow}$. 1. Индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно справедливо. Сделаем шаг индукции. Пусть $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ линейно независимы, тогда по предположению индукции $\exists\{e_n\}$: $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$.

2. Рассмотрим множество $X_0 := \{x - \sum\limits_{i=1}^n \varphi_i(x)e_i : x \in X\}$.

Очевидно, что $X_0 \subset \bigcap\limits_{i=1}^n Ker\,\varphi_i$. Пусть $x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^n Ker\,\varphi_i$, тогда $x_0 - \sum\limits_{i=1}^n \varphi_i(x_0)e_i = x_0, \Longrightarrow x_0 \in X_0$, тем самым

$$\left\{x - \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)e_i : x \in X\right\} = \bigcap_{i=1}^n Ker\,\varphi_i. \qquad (21.1)$$

3. Если $Ker\,\varphi_{n+1} \supset X_0$, то $\forall\, x \in X$

$$0 = \varphi_{n+1}\Big\{x - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i \,:\, x \in X\Big\} = \varphi_{n+1}(x) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\varphi_{n+1}(e_i),$$

тем самым $\varphi_{n+1}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)$, $\lambda_i := \varphi_{n+1}(e_i)$, что противоречит предположению.

4. В противном случае $\exists\, \widetilde{e}_{n+1} : \varphi_{n+1}(\widetilde{e}_{n+1}) = 1$, а $\varphi_i(\widetilde{e}_{n+1}) = 0$, $i \in \overline{1,n}$. Определим новые вектора $\widetilde{e}_i$, $i \in \overline{1,n}$ по формуле $\widetilde{e}_i := e_i - \varphi_{n+1}(e_i)\widetilde{e}_{n+1}$. Тогда $\varphi_i(\widetilde{e}_j) = \delta_{ij}$, $i,j \in \overline{1,n+1}$.

$\boxed{4}$. Есть следствие формулы (21.1). ■

Теорема 21.1 (геометрический смысл нормы линейного функционала). *Пусть X — нормированное пространство. Если $0 \neq \varphi \in X^*$, то $||\varphi|| = (\rho(0, \varphi^{-1}(1)))^{-1}$.*

Доказательство. 1. $\forall\, x \in \varphi^{-1}(1)$ $1 = |\varphi(x)| \leqslant ||\varphi|| \cdot ||x||$. Поэтому $||x|| \geqslant 1/||\varphi|| \Longrightarrow \rho(0, \varphi^{-1}(1)) \geqslant 1/||\varphi||$.

2. По определению $||\varphi||$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x_\varepsilon \,:\, ||x_\varepsilon|| = 1 \wedge 0 < ||\varphi|| - \varepsilon < |\varphi(x_\varepsilon)|.$$

Но $\dfrac{x_\varepsilon}{\varphi(x_\varepsilon)} \in \varphi^{-1}(1) \Longrightarrow \left|\left|\dfrac{x_\varepsilon}{\varphi(x_\varepsilon)}\right|\right| = \dfrac{1}{|\varphi(x_\varepsilon)|} \geqslant \rho(0, \varphi^{-1}(1)) \Longrightarrow \rho(0, \varphi^{-1}(1)) \leqslant \dfrac{1}{||\varphi|| - \varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{||\varphi||}$. ■

22. Сопряженные пространства

Пример 22.1. В $\mathbb{P}^k$, взяв базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$, получим, что каждый $\varphi \in (\mathbb{P}^k)^\#$ однозначно задается набором значений $\mu_n := \varphi(e_n), n \in \overline{1,k}$. Отображение $J : (\mathbb{P}^k)^\# \to \mathbb{P}^k$, $J(\varphi) := \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ есть линейная биекция. Таким образом можно "отождествить" $(\mathbb{P}^k)^\#$ с $\mathbb{P}^k$. Различные нормы в $\mathbb{P}^k$ порождают соответствующие нормы в $(\mathbb{P}^k)^\#$. Например, $(l_p^k)^* \cong l_q^k$ при $p,q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$; $(l_1^k)^* \cong c^k$; $(c^k)^* \cong l_1^k$. ■

Пусть X — нормированное пространство с базисом $\{\, e_n \,\}$. Рассмотрим отображение $J : X^* \to \mathbb{P}^{\mathbb{N}}$, заданное формулой

$$J(\varphi) := \{\, \varphi(e_n)\, \}. \qquad (22.1)$$

Тогда для $\varphi \in X^*$, $\{\, \mu_n \,\} := J(\varphi)$ и $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ в силу непрерывности φ

$$\varphi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n \text{ — сходится.} \qquad (22.2)$$

Тем самым отображение J есть отображение в некоторое пространство последовательностей, норма в котором индуцируется нормой соответствующего функционала: $||\{\, \varphi(e_n)\, \}|| = ||\varphi||$.

Теорема 22.1. *Имеют место следующие изометрии:*
1. $(c_0)^* \cong l_1$.
2. $(l_1)^* \cong m$.
3. *Если* $p, q > 1$ *и* $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *то* $(l_p)^* \cong l_q$.

Доказательство. Во всех указанных в теореме пространствах X: c_0, l_1 и l_p последовательность $\{\, e_n \,\} : \; e_n := \{\, \delta_{nk} \,\}$, где δ_{nk} — символ Кронекера — является базисом. Пусть $\varphi \in X^*$ и $0 \neq y_\varphi := \{\, \mu_n \,\} := J(\varphi)$.

$\boxed{1}$. Рассмотрим $x_m := \sum\limits_{n=1}^{m} \alpha(\mu_n) e_n$, где $\alpha(\mu) := |\mu|/\mu$ при $\mu \neq 0$ и $\alpha(0) = 0$. Тогда $||x_m|| \leqslant 1$, а $\varphi(x_m) = \sum\limits_{n=1}^{m} |\mu_n| \leqslant ||\varphi||$ $\Longrightarrow y_\varphi \in l_1$ и $||y_\varphi||_{l_1} \leqslant ||\varphi||$.

С другой стороны, если $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ и $||x|| \leqslant 1$, то

$$\forall\, n\; |\lambda_n| \leqslant 1 \overset{(22.2)}{\Longrightarrow} |\varphi(x)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \cdot |\mu_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|,$$

т. е. $||\varphi|| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_n| = ||y_\varphi||_{l_1}$. Тем самым отображение J, определенное формулой (22.1), есть изометрическое отображение

$J : c_0^* \to l_1$, и эта изометрия "на" все l_1, поскольку

$$\forall\, y = \{\,\mu_n\,\} \in l_1 \;\; \varphi_y\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n\Big) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n \in (c_0)^* \text{ и } J(\varphi_y) = y.$$

$\boxed{2}$. Так как $\forall\, n \;\; ||e_n|| = 1$, то $|\varphi(e_n)| = |\mu_n| \leqslant ||\varphi|| \Longrightarrow \sup\limits_n |\mu_n| \leqslant ||\varphi|| \Longrightarrow y_\varphi \in m$ и $||y_\varphi||_m \leqslant ||\varphi||$.

С другой стороны, если $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, то

$$|\varphi(x)| \overset{(22.2)}{=} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \cdot |\mu_n| \leqslant ||x|| \cdot \sup_n |\mu_n| = ||x|| \cdot ||y_\varphi||_m,$$

т. е. $||\varphi|| = ||y_\varphi||_m$. И опять

$$\forall\, y = \{\,\mu_n\,\} \in m \;\; \varphi_y\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n\Big) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n \in (l_1)^* \text{ и } J(\varphi_y) = y.$$

$\boxed{3}$. Рассмотрим $x_m := \sum\limits_{n=1}^{m} \beta(\mu_n) e_n$, где $\beta(\mu) := |\mu|^q/\mu$ при $\mu \neq 0$ и $\beta(0) = 0$. Тогда $\varphi(x_m) = \sum\limits_{n=1}^{m} |\mu_n|^q \leqslant ||\varphi|| \cdot ||x_m||_{l_p} = ||\varphi|| \cdot \Big(\sum\limits_{n=1}^{m} |\mu_n|^q\Big)^{1/p} \Longrightarrow \Big(\sum\limits_{n=1}^{m} |\mu_n|^q\Big)^{1/q} \leqslant ||\varphi|| \Longrightarrow y_\varphi \in l_q$ и $||y_\varphi||_{l_q} \leqslant ||\varphi||$.

С другой стороны, если $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, то

$$|\varphi(x)| \overset{(22.2)}{=} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n\Big| \overset{(1.5)}{\leqslant} ||x||_{l_p} \cdot ||y_\varphi||_{l_q} \Longrightarrow ||\varphi|| \leqslant ||y_\varphi||_{l_q}.$$

Наконец

$$\forall\, y = \{\,\mu_n\,\} \in l_q \;\; \varphi_y\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n\Big) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n \overset{(1.5)}{\in} (l_p)^* \text{ и } J(\varphi_y) = y. \;\blacksquare$$

Утверждение 22.1. *Пусть $p, q > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда отображение $J : L_q[a;b] \to (L_p[a;b])^*$, определенное формулой $(J(\psi))(x(\cdot)) := \int\limits_a^b x(t)\psi(t)\,dt$, есть линейная изометрия $L_q[a;b]$ на $(L_p[a;b])^*$, т. е. $(L_p[a;b])^* \cong L_q[a;b]$.*

Теорема 22.2 (вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве). *Пусть X — гильбертово пространство. Тогда $\forall\, \varphi \in X^* \;\exists\, a \in X \;\forall\, x \in X \;\; \varphi(x) = (x, a)$. При этом $||\varphi|| = ||a||$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq \varphi \in X^*$. Тогда

$$\exists\, e : 0 \neq e \perp Ker\,\varphi \Longrightarrow \forall\, x \in X \;\; x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}\, e \in Ker\,\varphi \Longrightarrow$$

$$0 = \Big(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}\, e, e\Big) = (x, e) - \frac{\varphi(x)||e||^2}{\varphi(e)} \Longrightarrow \varphi(x) = \Big(x, \frac{\overline{\varphi(e)}}{||e||^2}\, e\Big). \;\blacksquare$$

Следствие. *Пусть X — гильбертово пространство. Тогда $X^* \cong X$.*

Замечание. Иногда при отождествлении $(l_p)^*$ с l_q ($(L_p[a;b])^*$ с $L_q[a;b]$) берут комплексно сопряженное отображение $\widetilde{J}(\varphi) := \{\,\overline{\varphi(e_n)}\,\}$, чтобы в случае $p = q = 2$ получилось скалярное произведение.

Теорема 22.3 (Ф. Рисс) (вид линейного функционала в $C[a;b]$). *Для любого $\varphi \in (C[a;b])^*$ существует функция ограниченной вариации Φ такая, что*

$$\forall\, x(\cdot) \in C[a;b] \;\; \varphi(x(\cdot)) = \int_a^b x(t)\, d\Phi(t).$$

При этом $||\varphi|| = \bigvee\limits_a^b [\Phi]$.

Доказательство см., например, в [6, гл. 6, § 6, п. 6]. $\blacksquare$

Теорема 22.4 (вид линейного функционала в $C^1[a;b]$). *Для любого $\varphi \in (C^1[a;b])^*$ существуют константа α и функция ограниченной вариации Φ такие, что*

$$\forall\, x(\cdot) \in C[a;b] \quad \varphi(x(\cdot)) = \alpha x(a) + \int\limits_a^b x'(t)\, d\Phi(t).$$

Доказательство см., например, в [6, гл. 6, § 6, п. 6]. ■

23. Теорема Хана — Банаха и ее следствия

Теорема 23.1 (Хан — Банах). *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $p : X \to \mathbb{R}$ — полуаддитивный ($p(x+y) \le p(x) + p(y)$) и положительно однородный (т. е. $\lambda > 0 \Longrightarrow p(\lambda x) = \lambda p(x)$) функционал, L_0 — линейное многообразие в X, $\varphi_0 \in L_0^{\#}$ и*

$$\forall\, x \in L_0 \quad \varphi_0(x) \le p(x). \tag{23.1}$$

Тогда существует $\varphi \in X^{\#}$, продолжающий φ_0 с сохранением неравенства (23.1), *т. е.*

$$(\forall\, x \in L_0 \quad \varphi(x) = \varphi_0(x)) \ \wedge \ (\forall\, x \in X \quad \varphi(x) \le p(x)).$$

Доказательство. 1. Пусть $L_0 \neq X$, тогда найдется $e \notin L_0$. Рассмотрим $L_1 := L_0 + < e >$ и продолжим φ_0 на L_1: $\varphi_1(x_0 + \lambda e) := \varphi_0(x_0) + \lambda\alpha$. Надо задать α так, чтобы выполнялось соотношение (23.1), т. е. $\forall\, x_0 \in L_0\, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi_1(x_0 + \lambda e) = \varphi_0(x_0) + \lambda\alpha \le p(x_0 + \lambda e). \tag{23.2}$$

При $\lambda > 0$ неравенство из (23.2) равносильно

$$\varphi_0(x_0/\lambda) + \alpha \le p(e + x_0/\lambda),$$

а при $\lambda < 0$ — неравенству

$$\varphi_0(-x_0/\lambda) - \alpha \le p(-e - x_0/\lambda).$$

Таким образом, для выполнения (23.2) достаточно взять α, удовлетворяющее соотношению

$$\forall\, y_1, y_2 \in L_0 \quad \varphi_0(y_1) - p(y_1 - e) \le \alpha \le p(e + y_2) - \varphi_0(y_2).$$

2. Поскольку $\forall\, y_1,\ y_2 \in L_0$

$$\varphi_0(y_2) + \varphi_0(y_1) = \varphi_0(y_2 + y_1) \le p(y_2 + y_1 \pm e) \le p(e + y_2) + p(y_1 - e),$$

т. е. $\sup\limits_{y_1 \in L_0} (\varphi_0(y_1) - p(y_1 - e)) \le \inf\limits_{y_2 \in L_0} (p(e + y_2) - \varphi_0(y_2))$, то такое α существует.

3. На множестве всех продолжений $\Phi = \{(L, \varphi)\}$, сохраняющих неравенство (23.1), введем отношение порядка:

$$(L_1, \varphi_1) \prec (L_2, \varphi_2) := (L_1 \subset L_2) \ \wedge \ (\forall\, x \in L_1 \ \ \varphi_2(x) = \varphi_1(x)).$$

Тогда любая цепь $\{(L_\gamma, \varphi_\gamma)\}$ имеет максимальный элемент $(\widetilde{L}, \widetilde{\varphi})$, где $\widetilde{L} := \bigcup\limits_\gamma L_\gamma$, $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi_\gamma(x)$ при $x \in L_\gamma$. Поэтому по лемме Цорна есть максимальный элемент (L, φ) и в Φ. Но тогда $L = X$. ■

Замечания. 1. Любая полунорма является полуаддитивным и положительно однородным функционалом.

2. Если $p(\cdot)$ — полунорма на линейном пространстве X над полем $\mathbb{R}$, то (23.1) равносильно условию

$$\forall\, x \in L_0 \quad |\varphi_0(x)| \le p(x).$$

Лемма 23.1. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$.*

1. *Если $\varphi \in X^{\#}$, то $\forall\, x \in X \quad \varphi(x) = \overset{r}{\varphi}(x) - i\overset{r}{\varphi}(ix)$, где $\overset{r}{\varphi}(x) := Re(\varphi(x)) \in X_{\mathbb{R}}^{\#}$, а $X_{\mathbb{R}}$ — X, рассматриваемое над полем $\mathbb{R}$.*

2. *Если $\overset{r}{\varphi}(x) \in X_{\mathbb{R}}^{\#}$, то $\varphi(x) := \overset{r}{\varphi}(x) - i\overset{r}{\varphi}(ix) \in X^{\#}$.*

Теорема 23.2 (комплексный вариант теоремы Хана — Банаха). *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $p(\cdot)$ — полунорма на X, L_0 — линейное многообразие в X, $\varphi_0 \in L_0^{\#}$ и* $\forall\, x \in L_0 \ \ |\varphi_0(x)| \le p(x)$.

Тогда существует такой $\varphi \in X^{\#}$, что

$$(\forall\, x \in L_0 \quad \varphi(x) = \varphi_0(x)) \ \wedge \ (\forall\, x \in X \quad |\varphi(x)| \le p(x)).$$

Доказательство. 1. Пусть $\varphi_0(x) = \overset{r}{\varphi}_0(x) - i\overset{r}{\varphi}_0(ix)$. Тогда

$$\forall\, x \in L_0 \ \ \overset{r}{\varphi}_0(x) \le |\overset{r}{\varphi}_0(x)| \le |\varphi_0(x)| \le p(x).$$

По теореме 23.1

$$\exists\, \overset{r}{\varphi} \in X_{\mathbb{R}}^{\#}\, (\forall\, x \in L_0 \quad (\overset{r}{\varphi}(x) = \overset{r}{\varphi}_0(x)) \ \wedge \ (\forall\, x \in X \quad \overset{r}{\varphi}(x) \le p(x)).$$

Тогда в силу замечания

$$\forall\, x \in X \quad |\overset{r}{\varphi}(x)| \le p(x). \tag{23.3}$$

Возьмем $\varphi(x) := \overset{r}{\varphi}(x) - i\overset{r}{\varphi}(ix)$. В силу леммы 23.1 $\varphi \in X^*$.

2. Покажем, что $\forall\, x \in X \quad |\varphi(x)| \le p(x)$.

Предположим противное: $\exists\, x_0 \, : \, |\varphi(x_0)| > p(x_0)$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ такого, что $\varphi(x_0) = |\varphi(x_0)|e^{i\alpha}$. Рассмотрим $y_0 := e^{-i\alpha}x_0$. Тогда

$$|\overset{r}{\varphi}(y_0)| = |Re(\varphi(e^{-i\alpha}x_0))| = |Re(|\varphi(x_0)|)| = |\varphi(x_0)| > p(x_0).$$

Но $p(y_0) = |e^{-i\alpha}|p(x_0) = p(x_0)$. Отсюда

$$|\overset{r}{\varphi}(y_0)| = |\varphi(x_0)| > p(x_0) = p(y_0),$$

что противоречит (23.3). ■

Следствие. *Пусть $< X, ||\cdot|| >$ — нормированное пространство.*

1. (Продолжение линейного непрерывного функционала с сохранением нормы). *Если X_0 — линейное многообразие и $\varphi_0 \in (< X_0, ||\cdot|| >)^*$, то*

$$\exists\, \varphi \in X^* \ (\forall\, x \in X_0 \quad \varphi(x) = \varphi_0(x)) \ \wedge \ (||\varphi||_{X^*} = ||\varphi_0||_{X_0^*}).$$

2. $\forall\, x_0 \ne 0\, \exists\, \varphi \in X^* \quad (\varphi(x_0) = ||x_0||) \ \wedge \ (||\varphi|| = 1)$.

3. $\forall\, x_1, x_2 : x_1 \ne x_2\, \exists\, \varphi \in X^* \quad \varphi(x_1) \ne \varphi(x_2)$.

4. *Если X_1 — конечномерное подпространство нормированного пространства X, то существует такое подпространство X_2, что $X = X_1 \oplus X_2$, т. е. в нормированном пространстве любое конечномерное подпространство дополняемо.*

5. *Если X_0 — собственное подпространство нормированного пространства X, то*

$$\forall\, x_0 \notin X_0\, \exists\, \varphi \in X^* \ \ (X_0 \subset Ker\, \varphi \ \wedge \ \varphi(x_0) = 1).$$

Доказательство. $\boxed{1}$. $p(x) := ||\varphi_0||_{X_0^*} \cdot ||x||$.

$\boxed{2}$. На $L_0 := < x_0 >$ определим $\varphi_0(\lambda x_0) := \lambda ||x_0||$ и продолжим φ_0 на X с сохранением нормы.

$\boxed{4}$. Пусть $X_1 =< e_1, \dots, e_n >$, а $\overset{o}{\varphi}_j \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) =: \lambda_j$, тогда $\overset{o}{\varphi}_j(\cdot) \in X_1^*$, $j \in \overline{1,n}$. Пусть $\varphi_j(\cdot)$ — продолжение $\overset{o}{\varphi}_j(\cdot)$ на X с сохранением нормы.

Тогда $X_2 := \left\{ x - \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(x)e_j \ : \ x \in X \right\} \overset{(21.1)}{=} \bigcap\limits_{j=1}^{n} Ker\, \varphi_j$ — подпространство и $\forall\, x \in X \ \ x = \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(x)e_j + \left(x - \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_i(x)e_j\right)$.

$\boxed{5}$. 1. На подпространстве $X_1 := X_0 + < x_0 >$ определим

$$\varphi_0 : \ \forall\, x \in X_0\, \forall\, \lambda \in \mathbb{P} \ \ \varphi_0(x + \lambda x_0) := \lambda.$$

Тогда $\varphi_0(x) \equiv 0$ на X_0.

2. Покажем, что φ_0 ограничен на X_1. В противном случае получим, что

$$\exists\, \{\, \lambda_n \,\}\, \exists\, \{\, x_n \,\} \subset X_0 \, : \ \ (\lambda_n \to \infty) \wedge (||x_n + \lambda_n x_0|| \le 1).$$

Тогда $(x_n + \lambda_n x_0)/\lambda_n = x_0 + x_n/\lambda_n \to 0 \Longrightarrow x_n/\lambda_n \to -x_0 \in X_0$ — противоречие с условием $x_0 \notin X_0$.

3. Теперь продолжим φ_0 на X с сохранением нормы. ■

24. Отделимость выпуклых множеств

Замечание. Здесь мы будем рассматривать линейные пространства только над полем $\mathbb{R}$.

Определение. Говорят, что $0 \neq \varphi \in X^{\#}$ *разделяет* (*строго разделяет*) множества M и N в линейном пространстве X, если $\inf \varphi(M) \geqslant \sup \varphi(N)$ $(\inf \varphi(M) > \sup \varphi(N))$.

Замечание. Если φ разделяет M и N, то $(-\varphi)$ разделяет N и M.

Утверждение 24.1. *Пусть X — линейное пространство, $M \subset X$, $N \subset X$, $\varphi \in X^{\#}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *φ (строго) разделяет M и N.*
2. *φ (строго) разделяет $M - N$ и $\{0\}$.*
3. *$\forall\, x_0 \in X$ φ (строго) разделяет $M - x_0$ и $N - x_0$.*

Утверждение 24.2. *Если M — выпуклое тело в линейном пространстве X и $\varphi \in X^{\#}$, то*

$$\sup \varphi(M) = \sup \varphi(\overset{\bullet}{M}), \ \ \inf \varphi(M) = \inf \varphi(\overset{\bullet}{M}).$$

Доказательство. $\overset{\bullet}{M} \subset M \Longrightarrow$

$$S_* := \sup \varphi(\overset{\bullet}{M}) \leqslant \sup \varphi(M) \ =: \ S.$$

Возьмем $x_0 \in \overset{\bullet}{M}$ и произвольный $x_1 \in M$. В силу утверждения 10.4.1 $[x_0; x_1) \subset \overset{\bullet}{M}$, поэтому

$$S_* \geqslant \sup \varphi([x_0; x_1)) = \sup_{\alpha \in [0;1)} ((1-\alpha)\varphi(x_0) + \alpha\varphi(x_1)) \geqslant$$

$$\geqslant \ (1-\alpha)\varphi(x_0) + \alpha\varphi(x_1) \underset{\alpha \to 1}{\longrightarrow} \varphi(x_1),$$

т. е. $S_* \geqslant \sup\limits_{x_1 \in M} \varphi(x_1) = S.$ ■

Следствие. *Если M — выпуклое тело в линейном пространстве X, $N \subset X$ и φ (строго) разделяет $\overset{\bullet}{M}$ и N, то φ (строго) разделяет M и N.*

Лемма 24.1. *Пусть M — выпуклое тело в линейном пространстве X, $0 \in \overset{\bullet}{M}$ и $y_0 \notin \overset{\bullet}{M}$. Тогда существует $\varphi \in X^{\#}$, разделяющий M и $\{y_0\}$.*

Доказательство. Так как $0 \in \overset{\bullet}{M}$, то M поглощающее. Поэтому $p_M(\cdot)$ конечен. Поскольку M выпукло, то и $p_M(\cdot)$ — выпуклый функционал, а в силу его положительной однородности $p_M(\cdot)$ полуаддитивен. Рассмотрим на $< y_0 >$ линейный функционал $\varphi_0(\lambda y_0) := \lambda p_M(y_0)$. Тогда $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ $\ \varphi_0(\lambda y_0) \leqslant p_M(\lambda y_0)$, поэтому по теореме Хана — Банаха

$$\exists\, \varphi \in X^{\#}\, \forall\, x \in X \ \ \varphi(x) \leqslant p_M(x)$$

и $\varphi(y_0) = \varphi_0(y_0) = p_M(y_0)$. Тем самым

$$\forall\, x \in M \ \ \varphi(x) \leqslant p_M(x) \leqslant 1 \Longrightarrow \sup \varphi(M) \leqslant 1.$$

Наконец, если $p_M(x_1) < 1$, то $x_1 \in \mu \cdot M$, где μ из $(0;1)$. Следовательно, $x_1/\mu \in M$ и в силу утверждения 10.4 $x_1 \in [0; x_1/\mu) \subset \overset{\bullet}{M}$. Поэтому из условия $y_0 \notin \overset{\bullet}{M}$ следует, что $p_M(y_0) \geqslant 1$. ■

Теорема 24.1 (об отделимости выпуклых множеств). *Если M, N — выпуклые множества в линейном пространстве X, $\overset{\bullet}{M} \neq \varnothing$ и $\overset{\bullet}{M} \cap N = \varnothing$, то существует $\varphi \in X^{\#}$, разделяющий M и N.*

Доказательство. 1. Пусть $x_0 \in \overset{\bullet}{M}$, $M_1 := M - x_0$, $N_1 := N - x_0$. Тогда $0 \in M_1 = \overset{\bullet}{M}_1$.

2. Пусть $y_0 \in N_1$, а $K := M_1 - N_1 + y_0$. Тогда K выпукло и

$$\overset{\bullet}{K} = \Big(\bigcup_{y \in N_1} (M_1 - y + y_0)\Big)^{\bullet} \supset \bigcup_{y \in N_1} (M_1 - y + y_0)^{\bullet} =$$

$$= \bigcup_{y\in N_1} (\overset{\bullet}{M}_1 - y + y_0) \ni 0.$$

3. $\overset{\bullet}{M} \cap N = \varnothing \Longrightarrow M_1 \cap N_1 = \varnothing \Longrightarrow 0 \notin M_1 - N_1 \Longrightarrow y_0 \notin M_1 - N_1 + y_0 = K \Longrightarrow y_0 \notin \overset{\bullet}{K}$.

4. По лемме 24.1 существует φ, разделяющий K и y_0 $\Longrightarrow$ φ разделяет $M_1 - N_1$ и $\{0\}$ $\Longrightarrow$ φ разделяет M_1 и N_1 $\Longrightarrow$ φ разделяет M и N. ∎

Утверждение 24.3. *Если M, N — выпуклые множества в нормированном пространстве X, $\mathring{M} \neq \varnothing$ и $\mathring{M} \cap N = \varnothing$, то существует $\varphi \in X^*$, разделяющий M и N.*

Доказательство. 1. В силу следствия утверждения 10.4 $\mathring{M} = \overset{\bullet}{M}$, поэтому $\exists\, \varphi \in X^\#$: $\sup \varphi(M) \leqslant \inf \varphi(N) =: K$.

2. Покажем, что φ ограниченный.

Пусть $x_0 \in \mathring{M}$. Тогда $\exists\, \delta > 0$; $B(x_0, \delta) \subset M$. Поэтому

$$\sup \varphi(B(x_0,\delta)) = \varphi(x_0) + \sup \varphi(B(0,\delta)) \leqslant \sup \varphi(M) \leqslant K \Longrightarrow$$

$$\sup \varphi(B(0,\delta)) \leqslant K - \varphi(x_0).$$

Но множество $B(0,\delta)$ симметрично относительно нуля, поэтому $\sup |\varphi(B(0,\delta))| \leqslant K - \varphi(x_0)$. ∎

Утверждение 24.4. *Если M, N — выпуклые множества в нормированном пространстве X, $M \cap N = \varnothing$, M комапктно, а N замкнуто, то существует $\varphi \in X^*$, строго разделяющий M и N.*

Доказательство. 1. В силу компактности M и замкнутости N (см. утверждение 6.3) $\exists\, \delta > 0$: $U_\delta(M) \cap N = \varnothing$. Применив предыдущее утверждение к множествам $U_\delta(M)$ и N, найдем

$$\varphi \in X^* : \ \sup \varphi(U_\delta(M)) = \sup \varphi(M + B(0,\delta)) \leqslant \inf \varphi(N).$$

2. В силу компактности M $\exists\, x_0 \in M$: $\varphi(x_0) = \sup \varphi(M)$. Тогда для e : $\|e\| < \delta \wedge \varphi(e) > 0$ будем иметь

$$x_0 + e \in M + B(0,\delta) \Longrightarrow$$

$$\sup \varphi(M) = \varphi(x_0) < \varphi(x_0 + e) \leqslant \sup \varphi(M + B(0,\delta)) \leqslant \inf \varphi(N). \ ∎$$

25. Двойственность и рефлексивность

Определение. Пусть X — нормированное пространство.

$$X^{**} := (X^*)^*, \ X^{***} := (X^{**})^*, \ \ldots$$

Утверждение 25.1. *Пусть X — нормированное пространство, $x \in X$ и $[x] : X^* \to \mathbb{P}$ определен формулой*

$$\forall\, \varphi \in X^* \quad [x](\varphi) := \varphi(x).$$

Тогда $[x] \in X^{**}$ и $\|[x]\|_{X^{**}} = \|x\|_X$.

Следствие. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда отображение $[\cdot] : X \to X^{**}$ линейно и изометрично. При этом, если X — банахово, то $[X]$ — подпространство банахова пространства X^{**}.*

Определение. Если $[X] = X^{**}$, то X называется *рефлексивным.*

Утверждение 25.2. *Если X рефлексивно, то $X \cong X^{**}$ и X — банахово пространство.*

Замечание. Существуют нерефлексивные банаховы пространства X такие, что $X \cong X^{**}$. Соответствующий пример построен в работе [22].

Пример 25.1. 1. Если X — конечномерное нормированное пространство, то X рефлексивно.

2. c_0 и c нерефлексивны.

Теорема 25.1. *Если $p > 1$, то l_p рефлексивно.*

Доказательство. В силу теоремы 22.1 отображение $J_{pq} : (l_p)^* \to l_q$, определенное формулой $J_{pq}(\varphi) := \{\, \varphi(e_n) \,\}$, есть изоморфизм $(l_p)^*$ на l_q. Здесь $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

1. Для данной пары p, q и $x \in l_p$, $y \in l_q$ введем следующее обозначение: $< x, y > := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Тогда $\forall\, x \in l_p \;\; \forall\, y \in l_q \;\; \forall\, \varphi \in l_p^* \;\; \forall\, \psi \in l_q^* \;\; \varphi(x) =< x, J_{pq}(\varphi) >$, $\psi(y) =< J_{qp}(\psi), y >$.

Для обратных отображений справедливо равенство $\forall\, x \in l_p$ $\forall\, y \in l_q$ $(J_{qp}^{-1}(x))(y) = (J_{pq}^{-1}(y))(x) =< x, y >$.

2. Пусть $\Psi \in l_p^{**}$. Тогда $\Psi(J_{pq}^{-1}(\cdot)) \in l_q^*$, а $J_{qp}(\Psi(J_{pq}^{-1}(\cdot))) \in l_p$. Покажем, что $[J_{qp}(\Psi(J_{pq}^{-1}(\cdot)))] = \Psi$.

3. Поскольку $J_{pq}^{-1}(l_q) = l_p^*$, то это равенство можно проверять на элементах вида $J_{pq}^{-1}(y)$.

$$[J_{qp}(\Psi(J_{pq}^{-1}(\cdot)))](J_{pq}^{-1}(y)) = (J_{pq}^{-1}(y))(J_{qp}(\Psi(J_{pq}^{-1}(\cdot)))) =$$

$$=< J_{qp}(\Psi(J_{pq}^{-1}(\cdot))), y >= (\Psi(J_{pq}^{-1}(\cdot)))(y) = \Psi(J_{pq}^{-1}(y)). \quad \blacksquare$$

Теорема 25.2. *Гильбертово пространство рефлексивно.*

1. В силу теоремы 22.2 у нас есть отображение $J : X^* \to X$, заданное формулой $\varphi(\cdot) = (\cdot, J(\varphi))$. Это отображение — изометрия X^* на X и удовлетворяет соотношениям

$$J(\varphi_1 + \varphi_2) = J(\varphi_1) + J(\varphi_2), \;\; J(\lambda\varphi) = \overline{\lambda} J(\varphi).$$

2. Определим в X^* скалярное произведение по формуле $(\varphi_1, \varphi_2)_* := (J(\varphi_2), J(\varphi_1))$.

Тогда $(\varphi, \varphi)_* = (J(\varphi), J(\varphi)) = ||J(\varphi)||^2 = ||\varphi||^2$, т. е. стандартная норма в X^* совпадает с нормой, порожденной этим скалярным произведением. Таким образом, у нас снова есть отображение $J_* : X^{**} \to X^*$ такое, что

$$\forall\, \Psi \in X^{**} \;\; \Psi(\cdot) = (\cdot, J_*(\Psi))_*.$$

3. Покажем, что $[x] = J_*^{-1}(J^{-1}(x))$. Действительно, для любого $\varphi \in X^*$

$$(J_*^{-1}(J^{-1}(x)))(\varphi) = (\varphi, J_*(J_*^{-1}(J^{-1}(x))))_* = (\varphi, J^{-1}(x))_* =$$

$$= (J(J^{-1}(x)), J(\varphi)) = (x, J(\varphi)) = \varphi(x) = [x](\varphi). \quad \blacksquare$$

Утверждение 25.3. *Если X рефлексивно, то и X^* рефлексивно.*

Доказательство. Пусть $\Psi \in X^{***}$. Рассмотрим $\varphi \in X^*$, определенный формулой $\varphi(x) := \Psi([x])$. Покажем, что $[\varphi] = \Psi$.

Действительно, $\Psi([x]) = \varphi(x) = [x](\varphi) = [\varphi]([x])$, а в силу рефлексивности $X^{**} = [X]$. $\blacksquare$

Теорема 25.3. *Если X рефлексивно, а X_1 — его подпространство, то и X_1 рефлексивно.*

Доказательство. Рассмотрим следующие отображения:

$J : X^* \to X_1^*$, $J\varphi := \varphi\Big|_{X_1}$, т. е. $\forall\, x_1 \in X_1 \; (J(\varphi))(x_1) = \varphi(x_1)$;

$F : X_1^{**} \to X^{**}$, $\forall\, \Psi_1 \in X_1^{**} \, \forall\, \varphi \in X^* \; (F(\Psi_1))(\varphi) := \Psi_1(J(\varphi))$;

$\pi : X \to X^{**}$ — каноническое вложение X в X^{**}, т. е. $\forall\, x \in X \; \pi(x) = [x]$, а π_1 — соответствующее каноническое вложение X_1 в X_1^{**}. Отметим, что в силу рефлексивности пространства X отображение π сюръективно.

1. Покажем, что $\pi^{-1}(F(X_1^{**})) \subset X_1$.

Предположим противное:

$$\exists\, \Psi_1 \in X_1^{**} : \;\; \pi^{-1}(F(\Psi_1)) := \widetilde{x} \notin X_1.$$

Тогда по следствию 5 из теоремы Хана — Банаха $\exists\, \varphi \in X^*$: $\varphi(\widetilde{x}) = 1 \wedge \varphi\Big|_{X_1} = 0$. Поэтому $J(\varphi) = 0 \in X_1^*$. Тогда

$$0 = \Psi_1(J(\varphi)) = (F(\Psi_1))(\varphi) = (\pi(\widetilde{x}))(\varphi) = \varphi(\widetilde{x}) = 1,$$

что противоречиво.

2. Покажем, что $\forall\,\Psi_1 \in X_1^{**}\ \ \pi_1(\pi^{-1}(F(\Psi_1))) = \Psi_1$.

По следствию 1 из теоремы Хана — Банаха

$$\forall\,\varphi_1 \in X_1^*\,\exists\,\varphi \in X^* :\ \ J(\varphi) = \varphi_1.$$

Поэтому $\forall\,\varphi_1 \in X_1^*\ \ x_1 := \pi^{-1}(F(\Psi_1)) \overset{1}{\in} X_1 \Longrightarrow$

$$\pi_1(\pi^{-1}(F(\Psi_1)))(\varphi_1) = \varphi_1(x_1) = (J(\varphi))(x_1) = \varphi(x_1) =$$

$$= (\pi(x_1))(\varphi) = (F(\Psi_1))(\varphi) = \Psi_1(J(\varphi)) = \Psi_1(J(\varphi_1)). \ \blacksquare$$

Теорема 25.4. *Банахово пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда X^* рефлексивно.*

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. Если X^* рефлексивно, то и X^{**} рефлексивно, тогда и $X^{**} \supset [X] \cong X$ рефлексивно. $\blacksquare$

Теорема 25.5. *Пусть X — нормированное пространство. Если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно.*

1. По следствию утверждения 4.2 единичная сфера $S_* := \{\,\varphi \in X^* : \ ||\varphi|| = 1\,\}$ — сепарабельное МП относительно метрики, порожденной нормой в X^*. Поэтому $\exists\,\{\,\varphi_n\,\} \subset S_*$: $\overline{\{\,\varphi_n\,\}} = S_*$.

2. В силу определения нормы $||\varphi_n||$ найдутся такие $x_n \in X$, что $||x_n|| = 1$ и $|\varphi_n(x_n)| \geqslant 1/2$.

3. Покажем, что $\{\,x_n\,\}$ — полная система в X.

Предположим противное: $\overline{<\{\,x_n\,\}>} =:\ X_0 \neq X$.

Тогда по следствию 5 из теоремы Хана — Банаха найдется такой $\varphi_0 \in S_*$, что $X_0 \subset Ker\,\varphi_0$. Поэтому

$$||\varphi_n - \varphi_0|| = \sup_{||x||=1} |(\varphi_n - \varphi_0)(x)| \geqslant |(\varphi_n - \varphi_0)(x_n)| =$$

$$= |\varphi_n(x_n)| \geqslant \frac{1}{2},$$

т. е. $\{\,\varphi_n\,\}$ неплотна в S_*, что противоречит выбору $\{\,\varphi_n\,\}$. $\blacksquare$

Следствие. *Пусть X — нормированное пространство. Если X сепарабельно и рефлексивно, то и X^* сепарабельно и рефлексивно.*

Определение. Удобно ввести следующее обозначение:

$$< x, \varphi > := \varphi(x).$$

Тогда

1. $\forall\,x^* \in X^*\ \ ||x^*|| = \sup\limits_{||x||\leqslant 1} |< x, x^* >|$ (определение нормы линейного функционала).

2. $\forall\,x \in X\ \ ||x|| = \sup\limits_{||x^*||\leqslant 1} |< x, x^* >|$ (2-е следствие теоремы Хана — Банаха).

3. $\forall\,x \in X\,\forall\,x^* \in X^*\ \ \ < x^*, [x] >=< x, x^* >$ (определение $[x]$).

4. $|< x, x^* >| \leqslant ||x|| \cdot ||x^*||$ (свойство нормы линейного функционала).

5. $X \ni x_n \to x_0 \Longrightarrow \forall\,x^* \in X^*\ < x_n, x^* > \to < x_0, x^* >$ (определение непрерывности линейного функционала).

5. $X^* \ni x_n^* \to x_0^* \Longrightarrow \forall\,x \in X\ < x, x_n^* > \to < x_0, x^* >$ (из равномерной сходимости следует поточечная).

Замечание. $< \cdot, \cdot >$ — билинейная форма на $X \times X^*$, похожая на скалярное произведение в евклидовом пространстве, а представление $x^*(x)$ в виде $< \cdot, x^* >$ — на теорему о виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Обозначение $< x, x^* >$ "уравнивает" элементы из X и X^*, фиксируя в $< x, x^* >$ второй аргумент, получаем линейный непрерывный функционал на X, а фиксируя первый — линейный непрерывный функционал на X^*.

Определение. Пусть X — нормированное пространство и $M \subset X$.

$$M^{\perp} := \{\,x^* \in X^* : \forall\,x \in M\ \ < x, x^* >= 0\,\}.$$

Замечания. 1. Отметим, что (в отличие от евклидова пространства) $M^{\perp}$ лежит в сопряженном пространстве — это множество линейных непрерывных функционалов, обращающихся в нуль на M ($M \subset Ker\, x^*$). Поэтому $M^\perp$ называют *аннулятором множества* M.

2. Если $M \subset X$, то $M^\perp \subset X^*$, а $M^{\perp\perp} \subset X^{**}$. Поэтому "равенство" $M^{\perp\perp} = M$ возможно лишь при отождествлении x с $[x]$ (т. е. как сокращение записи $M^{\perp\perp} = [M]$).

3. В некоторых учебниках и монографиях, например в [6],

$$\varphi(x) =< \varphi, x > .$$

Определение. Пусть $M_* \subset X^*$.

$${}^\perp M_* := \{\, x \in X : \forall\, x^* \in M_* \quad < x, x^* >= 0 \,\}.$$

Замечание. ${}^\perp M_*$ — "общее ядро" множества функционалов из M_*, т. е. ${}^\perp M_* = \bigcap\limits_{x^* \in M_*} Ker\, x^*$.

Утверждение 25.4. *Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$ и $M_* \subset X^*$.*

1. $M^\perp = \overline{< M >}^\perp$ *— подпространство в* X^*.
2. ${}^\perp M_* = {}^\perp(\overline{< M_* >})$ *— подпространство в* X.

Утверждение 25.5. *Пусть X — нормированное пространство, M — подпространство в X и M_* — подпространство в X^*.*

1. ${}^\perp(M^\perp) = M$.
2. ${}^\perp[M] = M^\perp$.
3. ${}^{\perp\perp}[M] = M$.
4. $[{}^\perp M_*] = M_*^\perp \cap [X]$.
5. $[M] = M^{\perp\perp} \cap [X]$.
6. $({}^\perp M_*)^\perp \supset M_*$.

Доказательство. $\boxed{1 \Longrightarrow}$. $x_0 \in M \Longrightarrow$

$$\forall\, x^* \in M^\perp \quad < x_0, x^* >= 0 \Longrightarrow x_0 \in {}^\perp(M^\perp).$$

$\boxed{1 \Longleftarrow}$. Если $x_0 \notin M$, то в силу следствия 5 теоремы Хана — Банаха $\exists\, x_0^* \,:\, < x_0, x_0^* >= 1$ и $M \subset Ker\, x_0^*$, т. е. $x_0^* \in M^\perp$, поэтому $x_0 \notin {}^\perp(M^\perp)$.

$\boxed{2}$. $x^* \in {}^\perp[M] \Longleftrightarrow \forall\, x \in M \;\; 0 =< x^*, [x] >=< x, x^* > \Longleftrightarrow x^* \in M^\perp$.

$\boxed{4}$. $x_0 \in {}^\perp(M_*) \Longleftrightarrow$

$$\forall\, x^* \in M_* \;\; 0 =< x_0, x^* >=< x^*, [x_0] > \;\Longleftrightarrow [x_0] \in M_*^\perp \cap [X].$$

$\boxed{5 \Longrightarrow}$. $x_0 \in M \Longrightarrow$

$$\forall\, x^* \in M^\perp \;\; 0 =< x_0, x^* >=< x^*, [x_0] > \;\Longrightarrow [x_0] \in M^{\perp\perp}.$$

$\boxed{5 \Longleftarrow}$. Если $x_0 \notin M$, то в силу следствия 5 теоремы Хана — Банаха $\exists\, x_0^* \,:\, 1 =< x_0, x_0^* >=< x^*, [x_0] >$ и $x_0^* \in M^\perp$, поэтому $[x_0] \notin M^{\perp\perp}$ ■.

Следствие. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство.*

1. *Если M — подпространство в X, то $M^{\perp\perp} = [M]$.*
2. *Если M_* — подпространство в X^*, то $[{}^\perp M_*] = M_*^\perp$.*
3. *Если M_* — подпространство в X^*, то $({}^\perp M_*)^\perp = M_*$.*

Доказательство. $\boxed{3}$. Пусть $x_0^* \notin M_*$ тогда в силу следствия 5 теоремы Хана — Банаха $\exists\, x_0^{**} \in X^{**} : Ker\, x_0^{**} \supset M_*$ и $< x_0^*, x_0^{**} >\neq 0$. Но в силу рефлексивности X найдется $x_0 \in X$: $x_0^{**} = [x_0]$. Поэтому $\forall\, x^* \in M_* \;\; 0 =< x^*, [x_0] >=< x_0, x^* > \Longrightarrow x_0 \in {}^\perp M_*$. С другой стороны $0 \neq< x_0^*, [x_0] >=< x_0, x_0^* > \Longrightarrow x_0^* \notin ({}^\perp M_*)^\perp$. ■

Задание 25.1. Приведите пример банахова пространства X и подпространства M_* пространства X^* таких, что $({}^\perp M_*)^\perp \neq M_*$.

26. Слабая сходимость в нормированных пространствах

Определение. Пусть X — нормированное пространство. Говорят, что $\{\, x_n \,\} \subset X$ слабо сходится к $x_0 \in X$ и пишут $x_n \xrightarrow{сл} x_0$ (или $x_n \rightharpoonup x_0$), если

$$\forall\, x^* \in X^* \quad < x_n, x^* > \to < x_0, x^* > .$$

Утверждение 26.1. *Пусть X — нормированное пространство, $\{ x_n \} \subset X$ и $x_n \to x_0$. Тогда $x_n \xrightarrow{сл} x_0$.*

Замечания. 1. В гильбертовом пространстве X

$$x_n \xrightarrow{сл} x_0 \iff \forall\, a \in X \quad (x_n, a) \to (x_0, a).$$

2. Топология $\sigma(X)$, порожденная на нормированном пространстве X семейством множеств вида

$$W(\varepsilon, x_1^*, \ldots, x_n^*) = \{ x \in X : \max_{k \in \overline{1,n}} | < x, x_k^* > | < \varepsilon \}$$

(база окрестностей нуля), называется *слабой топологией на* X, поскольку $\sigma(X) \subset s(X)$ — топология, порожденная нормой.

3. Слабая сходимость в X — это сходимость в $\sigma(X)$.

Утверждение 26.2. *Пусть X — нормированное пространство и $\{ x_n \} \subset X$.*

1. $x_n \xrightarrow{сл} x_0 \iff [x_n] \xrightarrow[X^*]{} [x_0]$ (*т. е. поточечно в* X^{**}).
2. $x_n \xrightarrow{сл} x_0 \implies \{ x_n \}$ *ограничена.*
3. $(x_n \xrightarrow{сл} x_0) \wedge (x_n \xrightarrow{сл} x_0') \implies (x_0 = x_0')$.
4. $(x_n \xrightarrow{сл} x_0) \wedge (y_n \xrightarrow{сл} y_0) \implies$

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{P} \quad (\lambda x_n + \mu y_n) \xrightarrow{сл} \lambda x_0 + \mu y_0.$$

Теорема 26.1 (критерий слабой сходимости). *Пусть X — нормированное пространство. $x_n \xrightarrow{сл} x_0 \iff (\{ x_n \}$ ограничена и $\forall\, x^* \in X_1^* \quad < x_n, x^* > \to < x_0, x^* >)$, где X_1^* — некоторая полная в X^* система.*

Действительно, это следует из критерия поточечной сходимости (теорема 20.2), примененного к $\{ [x_n] \}$. ■

Утверждение 26.3 (критерий слабой сходимости в c_0 и l_p). *Пусть $X \in \{c_0, l_p\}$, где $p > 1$. Тогда $x_n \xrightarrow{сл} x_0 \iff (\{ x_n \}$ ограничена и покоординатно сходится к $x_0)$.*

Доказательство. Пусть $X = l_p$ и $e_n = \{ \delta_{kn} \}$ — базис в l_q (здесь $p^{-1} + q^{-1} = 1$). Тогда $\{ e_n^* \}$, где $e_n^* = J^{-1}(e_n)$ (здесь J — отображение из теоремы 22.1), базис в $(l_p)^*$ и, следовательно, полная система. При этом

$$< x_n, e_m^* >= x_{m,n} \to x_{m,0} =< x_0, e_m^* > . \quad ■$$

Пример 26.1. 1. Пусть $p > 1$, $e_n = \{ \delta_{kn} \} \in l_p$. Тогда $e_n \xrightarrow{сл} 0$, но $e_n \not\to 0$.

2. Пусть $\{ e_n \}$ — ортонормированный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда $e_n \xrightarrow{сл} 0$, но $e_n \not\to 0$.

Утверждение 26.4. *В l_1 слабая сходимость совпадает с сильной.*

Доказательство см. [15, задача 13.13].

Утверждение 26.5. *В $C[a;b]$ $x_n(\cdot) \xrightarrow{сл} x_0(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $\{ ||x_n(\cdot)|| \}$ ограничена и $\forall\, t \in [a;b] \quad x_n(t) \to x_0(t)$.*

Доказательство см. [4, гл. 8, § 3, теорема 3].

Утверждение 26.6. *Пусть X — нормированное пространство и $x_n \xrightarrow{сл} x_0$. Тогда $||x_0|| \leqslant \varliminf ||x_n||$.*

Доказательство. В силу следствия 2 теоремы Хана — Банаха существует такой $x_0^* \in X^*$, что $||x_0^*|| = 1$ и $< x_0, x_0^* >= = ||x_0||$. Тогда

$$||x_n|| \geqslant | < x_n, x_0^* > | \to | < x_0, x_0^* > | = ||x_0||. \quad ■$$

Теорема 26.2. *Пусть X — гильбертово пространство, $x_n \xrightarrow{сл} x_0$ и $||x_n|| \to ||x_0||$. Тогда $x_n \to x_0$.*

Доказательство. $||x_n - x_0||^2 = (x_n - x_0, x_n - x_0) = = ||x_n||^2 - (x_0, x_n) - (x_n, x_0) + ||x_0||^2$. ■

Утверждение 26.7. *Если M слабо секвенциально замкнуто в нормированном пространстве X, то M и просто замкнуто.*

Теорема 26.3. *Пусть X — нормированное пространство, а $X \supset M$ выпукло и замкнуто. Тогда M и слабо секвенциально замкнуто.*

Доказательство. Предположим противное:

$$\exists \{ x_n \} \subset M \quad x_n \xrightarrow{сл} x_0 \notin M.$$

1. Если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то по утверждению 24.4

$$\exists\, x_0^* \in X^* \quad < x_0, x_0^* > > \sup_{x \in M} < x, x_0^* > =: S.$$

Тем самым $< x_n, x_0^* > \to < x_0, x_0^* > > S$. Поэтому

$$\exists\, n_0 \,\forall\, n > n_0 \quad < x_n, x_0^* > > S \Longrightarrow x_n \notin M.$$

2. Если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то по утверждению 24.4

$$\exists\, \widetilde{x}_0^* \in (X_{\mathbb{R}})^* \quad < x_0, \widetilde{x}_0^* > > \sup_{x \in M} < x, \widetilde{x}_0^* > =: S.$$

Рассмотрим $x_0^* \in X^*$, определенный формулой из леммы 23.1: $< x, x_0^* > := < x, \widetilde{x}_0^* > - i < ix, \widetilde{x}_0^* >$.

Тогда $< x_n, \widetilde{x}_0^* > = \mathrm{Re}(< x_n, x_0^* >) \to \mathrm{Re}(< x_0, x_0^* >) = \; = < x_0, \widetilde{x}_0^* > > S$. ■

Теорема 26.4 (Мазур). *Пусть X — нормированное пространство и $x_n \xrightarrow{сл} x_0$. Тогда найдется $\{ \widetilde{x}_n \} \subset co(\{ x_n \})$ такая, что $\widetilde{x}_n \to x_0$. Здесь $co(\{ x_n \})$ — выпуклая оболочка множества $\{ x_n \}$.*

Действительно, надо применить теорему 26.3 к выпуклому и замкнутому множеству $\overline{co(\{ x_n \})}$. ■

Утверждение 26.8. *Пусть X — нормированное пространство, X_1 — его подпространство, а $\{ x_n \} \subset X_1$. Тогда $(x_n \xrightarrow{сл} x_0$ в смысле пространства $< X, ||\cdot|| >) \Longleftrightarrow (x_n \xrightarrow{сл} x_0$ в смысле пространства $< X_1, ||\cdot|| >)$.*

Замечание. Поскольку $X^{**} = (X^*)^*$, то в X^{**} определена слабая сходимость, если считать X^* основным пространством. Учитывая, что $[X] \subset X^{**}$, в X^* можно определить еще одну слабую сходимость (слабую топологию), если вместо X^{**} использовать только $[X]$.

Определение. Пусть X — нормированное пространство. Говорят, что $\{ x_n^* \} \subset X^*$ **слабо сходится к* $x_0^* \in X^*$ и пишут $x_n^* \xrightarrow{*сл} x_0^*$, если $\forall\, x \in X \quad < x, x_n^* > \to < x, x_0^* >$.

Замечания. 1. В X^* *слабая сходимость — это просто поточечная сходимость функционалов на X.

2. Если X рефлексивно, то слабая и *слабая сходимости в X^* совпадают.

3. Топология $\sigma^*(X^*)$, порожденная на нормированном пространстве X^* семейством множеств вида

$$W(\varepsilon, x_1, \ldots, x_n) = \{ x^* \in X^* : \max_{k \in \overline{1,n}} | < x_k, x^* > | < \varepsilon \}$$

(база окрестностей нуля), называется **слабой топологией на* X^*, поскольку $\sigma^*(X^*) \subset s(X^*)$ — топология, порожденная нормой.

4. В X^* *слабая сходимость — это сходимость в $\sigma^*(X^*)$.

5. $\sigma^*(X^*) \subset \sigma(X^*)$.

Утверждение 26.9. *Пусть X — нормированное пространство.*

1. $x_n^* \to x_0^* \Longrightarrow x_n^* \xrightarrow{сл} x_0^* \Longrightarrow x_n^* \xrightarrow{*сл} x_0^* \Longrightarrow ||x_0^*|| \leqslant \underline{\lim}\, ||x_n^*||$.

2. (Достаточное условие *слабой сходимости). *Если $\{ x_n^* \}$ ограничена и $\forall\, x \in X_1 \quad < x, x_n^* > \to < x, x_0^* >$, где X_1 — некоторая полная в X система, то $x_n^* \xrightarrow{*сл} x_0^*$.*

3. *Если X — банахово пространство, и $x_n^* \xrightarrow{*сл} x_0^*$, то $\{ x_n^* \}$ ограничена.*

Теорема 26.5 (Банах). *Если X — сепарабельное нормированное пространство, то $X^* \supset B[a^*, r]$ *слабо секвенциально компактен.*

Доказательство. Пусть $\{ e_m \}$ — полная в X нормированная система линейно независимых векторов и $\{ x_n^* \} \subset B[a^*, r]$.

Прежде всего отметим, что

$$\forall\, m, n \quad | < e_m, x_n^* > | \leqslant ||e_m|| \cdot ||x_n^*|| \leqslant K \;=:\; ||a^*|| + r. \quad (26.1)$$

1. В силу соотношений (26.1) найдутся $\alpha_1 \in \mathbb{P}$ и подпоследовательность $\{ x^*_{n_k^{(1)}} \}$ последовательности $\{ x_n^* \}$ такие, что $< e_1, x^*_{n_k^{(1)}} > \to \alpha_1$.

Теперь для e_2 в силу соотношений (26.1) найдутся $\alpha_2 \in \mathbb{P}$ и подпоследовательность $\{ x^*_{n_k^{(2)}} \}$ последовательности $\{ x^*_{n_k^{(1)}} \}$ такие, что $< e_2, x^*_{n_k^{(2)}} > \to \alpha_2$.

Применяя индукционный процесс, для любого m найдем такое $\alpha_m \in \mathbb{P}$ и подпоследовательность $\{ x^*_{n_k^{(m)}} \}$ последовательности $\{ x^*_{n_k^{(m-1)}} \}$, что $< e_m, x^*_{n_k^{(m)}} > \to \alpha_m$.

2. Рассмотрим последовательность $\{ x^*_{n_k^{(k)}} \}$. Поскольку $\forall\, m \in \mathbb{N}$ $\{ x^*_{n_k^{(k)}} \}\big|_{k>m}$ — подпоследовательность последовательности $x^*_{n_k^{(m)}}$, то

$$\forall\, m \quad < e_m, x^*_{n_k^{(k)}} > \to \alpha_m. \quad (26.2)$$

3. Определим x_0^* следующим образом:

$$\forall\, m \;\; < e_m, x_0^* > := \alpha_m$$

и продолжим по линейности на $X_0 := < \{ e_m \} >$ (и оставим для продолжения старое обозначение x_0^*). Тогда

$$\forall\, x \in X_0 \;\; K||x|| \geqslant | < x, x^*_{n_k^{(k)}} > | = \left| \left\langle \sum_{m=1}^{m(x)} \lambda_m e_m, x^*_{n_k^{(k)}} \right\rangle \right| =$$

$$= \left| \sum_{m=1}^{m(x)} < \lambda_m e_m, x^*_{n_k^{(k)}} > \right| \xrightarrow[k\to\infty]{(26.2)} \left| \sum_{m=1}^{m(x)} \lambda_m \alpha_m \right| = | < x, x_0^* > |,$$

т. е. x_0^* ограничен на X_0. Продолжим его с сохранением нормы на $\overline{X_0} = X$.

4. Покажем, что $x^*_{n_k^{(k)}} \xrightarrow{*сл} x_0^*$.

Отметим, что $x^*_{n_k^{(k)}}$ — подпоследовательность последовательности x_n^* и, следовательно, ограничена, а в силу (26.2)

$$\forall\, m \quad < e_m, x^*_{n_k^{(k)}} > \to \alpha_m = < e_m, x_0^* >,$$

т. е. на полной в X системе. В силу достаточного условия *слабой сходимости получим, что $x^*_{n_k^{(k)}} \xrightarrow{*сл} x_0^*$.

5. В силу утверждения 26.9.1

$$||x_0^* - a^*|| \leqslant \underline{\lim}\, ||x^*_{n_k^{(k)}} - a^*|| \leqslant r. \;\; \blacksquare$$

Теорема 26.6. *В рефлексивном пространстве X замкнутый шар слабо секвенциально компактен.*

Доказательство. 1. Пусть X сепарабельно. Тогда и $X^{**} = [X]$ сепарабельно. Поэтому (см. утверждение 25.3) X^* сепарабельно. Теперь применим теорему 26.5 к $[B[a, r]] = B[[a], r] \subset X^{**}$.

2. Пусть X — несепарабельное банахово пространство. Возьмем произвольную последовательность $\{ x_n \} \subset B[a, r]$ и рассмотрим сепарабельное пространство $X_1 := \overline{< \{ x_n \} >}$. Тогда в силу теоремы 25.3 $< X_1, || \cdot || >$ рефлексивно и по

предыдущему пункту $\exists \{x_{n_k}\}, x_0 \in X_1 : \quad x_{n_k} \xrightarrow{сл} x_0$ в смысле пространства $< X_1, ||\cdot|| >$, поэтому (см. утверждение 26.8) $x_{n_k} \xrightarrow{сл} x_0$ в исходном пространстве X. ■

Следствие. *Пусть X — рефлексивно, $X \supset M$ — выпукло и замкнуто. Тогда для любого $x \in X$ существует метрическая проекция x на M.*

Оказывается, секвенциальная компактность замкнутого шара в банаховом пространстве есть критерий рефлексивности.

Теорема 26.7 (Эберлейн — Шмульян) [18, 21]. *Для того чтобы банахово пространство было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы любой замкнутый шар в нем был слабо секвенциально компактен.*

Доказательство см., например, в [3, с. 201—203]. ■

Теоремы, аналогичные теоремам 26.6 и 26.7, справедливы и для слабых и *слабых топологий.

Теорема 26.8 (Алаоглу). *Пусть X — нормированное пространство. Тогда $X^* \supset B[a^*, r]$ *слабо компактен.*

Доказательство см., например, в [11, с. 80]. ■

Замечание. В работе [20] доказано даже более общее утверждение: *если V — окрестность нуля в топологическом векторном пространстве X, то множество*

$$\{x^* \in X^* : \ \forall\, x \in V \ \ | < x, x^* > | \leqslant 1\}$$

*слабо компактно.

Теорема 26.9. *Банахово пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда единичный шар в нем слабо компактен.*

Доказательство см., например, в [4, с. 241—242]. ■

27. Сопряженные операторы

Определение. Пусть X, Y — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда $\forall\, y^* \in Y^* \quad < A(\cdot),\, y^* >$ есть линейный непрерывный функционал на X. Определим $A^* : Y^* \to X^*$ из соотношения

$$\forall\, x \in X\, \forall\, y^* \in Y^* \quad < x, A^* y^* > = < Ax, y^* >.$$

Оператор A^* называется *сопряженным к* A.

Утверждение 27.1. *Пусть X, Y — нормированные пространства. Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ и $||A^*|| = ||A||$.*

Доказательство. $||A^*|| = \sup\limits_{||y^*|| \leqslant 1} ||A^* y^*|| =$

$$= \sup_{||y^*||\leqslant 1} \sup_{||x||\leqslant 1} | < x, A^* y^* > | = \sup_{||x||\leqslant 1} \sup_{||y^*||\leqslant 1} | < Ax, y^* > | =$$

$$= \sup_{||x||\leqslant 1} ||Ax|| = ||A||. \ ■$$

Утверждение 27.2. *Пусть X, Y — нормированные пространства. Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, то*

$$\exists\, (A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*) \ \text{ и } (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Утверждение 27.3. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$ и $C \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Тогда*
1. $(\lambda A + \mu B)^* = \lambda A^* + \mu B^*$.
2. $(CA)^* = A^* C^*$.

Определение. $A^{**} := (A^*)^*$.

Отметим, что если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то $A^{**} \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$.

Утверждение 27.4. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда $\forall\, x \in X \quad A^{**}[x] = [Ax]$.*

Доказательство. Для любого $y^* \in Y^*$ имеем

$$< y^*, A^{**}[x] > = < A^* y^*, [x] > = < x, A^* y^* > =$$

$$= < Ax, y^* > = < y^*, [Ax] > . \ \blacksquare$$

Теорема 27.1. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $A : X \to Y$ линейный. Следующие условия эквивалентны:*

1. $x_n \to x_0 \Longrightarrow Ax_n \xrightarrow{сл} Ax_0$.
2. $x_n \to x_0 \Longrightarrow Ax_n \to Ax_0$.
3. $x_n \xrightarrow{сл} x_0 \Longrightarrow Ax_n \xrightarrow{сл} Ax_0$.

Доказательство. В силу линейности A можно считать, что $x_0 = 0$.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$. Так как $x_n \to 0$, то $Ax_n \xrightarrow{сл} 0$. Если при этом $Ax_n \not\to 0$, то $\exists \varepsilon_0 > 0 \, \exists \{ x_{n_k} \} \forall k \ \ ||Ax_{n_k}|| \geqslant \varepsilon_0$. Отсюда

$$\left|\left| A\left(\frac{x_{n_k}}{\sqrt{||x_{n_k}||}} \right) \right|\right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{||x_{n_k}||}} \to +\infty. \tag{27.1}$$

Но $\left|\left| \frac{x_{n_k}}{\sqrt{||x_{n_k}||}} \right|\right| = \sqrt{||x_{n_k}||} \to 0$. Поэтому $A\left(\frac{x_{n_k}}{\sqrt{||x_{n_k}||}} \right) \xrightarrow{сл} 0$, что противоречит соотношению (27.1).

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$. В силу условия $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, поэтому существует A^*. Пусть $x_n \xrightarrow{сл} 0$ и $y^* \in Y^*$.

Тогда $< Ax_n, y^* > = < x_n, A^* y^* > \to 0$. $\blacksquare$

Замечания. 1. Непрерывность линейного оператора $A : X \to Y$ относительно пары $(s(X), s(Y))$ эквивалентна секвенциальной непрерывности относительно любой из пар $(s(X), \sigma(Y))$ и $(\sigma(X), \sigma(Y))$.

2. Оставшееся условие $x_n \xrightarrow{сл} x_0 \Longrightarrow Ax_n \to Ax_0$ не эквивалентно непрерывности. Пусть I — тождественный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве X, а $\{ e_n \}$ — ортонормированный базис. Тогда $e_n \xrightarrow{сл} 0$, а $Ie_n = e_n \not\to 0$.

Замечания. 1. В гильбертовом пространстве сопряженные операторы можно определить с помощью скалярного произведения. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства.

Оператор $A^{\otimes} : H_2 \to H_1$ называется *эрмитово сопряженным к оператору* $A : H_1 \to H_2$, если

$$\forall x \in H_1 \, \forall y \in H_2 \ \ (x, A^{\otimes} y)_1 = (Ax, y)_2.$$

Основное отличие $A^{\otimes}$ от A^* то, что A^* действует в сопряженных пространствах H_2^*, H_1^*, а $A^{\otimes}$ — в исходных H_2, H_1. Однако в случае вещественных пространств это отличие несущественно (в силу возможности отождествления H_1^* с H_1 и H_2^* с H_2), поскольку как $< \cdot, \cdot >$, так и $(\cdot, \cdot)$ будут билинейны. В комплексном же случае форма $< \cdot, \cdot >$ остается билинейной, в то время как $(\cdot, \cdot)$ уже полуторалинейна. Поэтому $(\lambda A)^* = \lambda A^*$, но $(\lambda A)^{\otimes} = \overline{\lambda} A^{\otimes}$. Однако эти изменения не играют роли при рассмотрении свойств образов и ядер операторов A^* и $A^{\otimes}$.

2. При работе с гильбертовым пространством мы термин *сопряженный оператор* всегда будем применять к эрмитово сопряженному оператору.

28. Теоремы Банаха об открытом отображении и о замкнутом графике

Теорема 28.1 (Банах) (об открытом отображении). *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $Im\, A = Y$. Тогда A — открытое отображение, т. е. $\forall G \in s(X) \ \ A(G) \in s(Y)$.*

Доказательство. Пусть $V_n := B[0, 2^{-n}]$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

1. Покажем, что $\overset{\circ}{\overline{A(V_n)}} \neq \varnothing$.

Так как $A(X) = Y$, то $Y = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (m \cdot \overline{A(V_n)})$ и по теореме Бэра (с. 30), $\exists m_0 \, \exists y_0 \in Y \, \exists r > 0$

$$B(y_0, r) \subset m_0 \cdot \overline{A(V_n)} \Longrightarrow B(y_0/m_0, r/m_0) \subset \overline{A(V_n)}.$$

2. Покажем, что $0 \in \overset{\circ}{\overline{A(V_n)}}$.

$$A(V_{n+1}) - A(V_{n+1}) = A(V_n) \Longrightarrow$$

$$\overline{A(V_{n+1})} - \overline{A(V_{n+1})} \subset \overline{A(V_{n+1}) - A(V_{n+1})} = \overline{A(V_n)} \overset{1}{\Longrightarrow}$$

$$B(0, 2r/m_0) = B(y_0/m_0, r/m_0) - B(y_0/m_0, r/m_0) \subset \overline{A(V_n)}.$$

3. Покажем, что $\forall\, z \in \overline{A(V_n)}\, \exists\, x \in V_n \,:\, z - Ax \in \overline{A(V_{n+1})}$.

$$0 \in z - \overline{A(V_n)} = \overline{z - A(V_n)} \implies$$

$$\forall\, \delta > 0 \;\; B(0, \delta) \cap (z - A(V_n)) \neq \varnothing \overset{2}{\Longrightarrow}$$

$$\overline{A(V_{n+1})} \cap (z - A(V_n)) \neq \varnothing \Longrightarrow \exists\, x \in V_n \,:\, z - Ax \in \overline{A(V_{n+1})}.$$

4. Покажем, что $\overline{A(V_1)} \subset A(V_0)$.

Пусть $z_1 \in \overline{A(V_1)} \overset{3}{\Longrightarrow} \exists\, x_1 \in V_1 \,:\, z_2 := z_1 - Ax_1 \in \overline{A(V_2)} \overset{3}{\Longrightarrow}$

$$\exists\, x_2 \in V_2 \,:\, z_3 := z_2 - Ax_2 \in \overline{A(V_3)} \overset{3}{\Longrightarrow}$$

$$\exists \{\, z_n \,\}, \{\, x_n \,\};\;\; x_n \in V_n \wedge z_n \in \overline{A(V_n)} \wedge z_{n+1} = z_n - Ax_n.$$

Так как $\overline{A(V_n)} \subset \overline{B[0, 2^{-n}||A||]} = B[0, 2^{-n}||A||]$, то $||z_n|| \leqslant 2^{-n}||A|| \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится (Y — банахово пространство). Так как $x_n \in V_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ тоже сходится (X — банахово пространство). Тогда $x_0 := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \in V_0$. В силу непрерывности A получим, что $Ax_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Ax_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n - z_{n+1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n - \sum\limits_{n=2}^{\infty} z_n = z_1 \in A(V_0)$.

5. В силу п. 2 и п. 4 $\quad \exists\, \delta_0 > 0 \,:\, B(0, \delta_0) \subset A(V_0)$.

6. Пусть $G \in s(X)$, $x_0 \in G$ и $y_0 := Ax_0 \in A(G)$. Тогда

$$\exists\, n \,:\, x_0 + \frac{1}{n} V_0 \subset G \Longrightarrow y_0 + \frac{1}{n} A(V_0) \subset A(G) \implies$$

$$B(y_0, \delta_0/n) \subset A(G). \;\; ■$$

Теорема 28.2 (Банах) (о непрерывности обратного оператора). *Если X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и A — биекция, то $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Доказательство. $G \in s(X) \;\; (A^{-1})^{-1}(G) = A(G) \in s(Y)$. ■

Пример 28.1 (существенность банаховости пространства X). Пусть Y — бесконечномерное банахово пространство, $\varphi \in Y^{\#} \setminus Y^*$ и $X = Gr(\varphi) := \{\, (y, \varphi(y)) \,:\, y \in Y \,\}$ с нормой $||(y, \varphi(y))|| := ||y|| + |\varphi(y)|$. Определим $A : X \to Y$ по формуле $A(y, \varphi(y)) := y$. Тогда $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, но обратный оператор $A^{-1}(y) = (y, \varphi(y))$ неограничен.

Пример 28.2 (существенность банаховости пространства Y). Пусть $A : C[0;1] \to C[0;1]$ задан формулой $(Ax(\cdot))(t) := \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau$. Положим $X = C[0;1]$, а $Y := A(X)$ с нормой из $C[0;1]$. Тогда $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Если $y(\cdot) = Ax(\cdot)$, то $y(\cdot)$ дифференцируема и $y'(t) = x(t)$. Поэтому A — биекция X на Y и $(A^{-1}y(\cdot))(t) = y'(t)$. Но этот оператор неограничен.

Определение. Пусть X, Y — нормированные пространства. Оператор $A : D(A) \subset X \to Y$ называется *замкнутым*, если

$$\{\, x_n \,\} \subset D(A) \wedge x_n \to x_0 \wedge Ax_n \to y_0 \Longrightarrow x_0 \in D(A) \wedge Ax_0 = y_0.$$

Утверждение 28.1. *Пусть X, Y — нормированные пространства. Оператор $A : D(A) \subset X \to Y$ замкнут $\Longleftrightarrow Gr(A)$ замкнуто в $X \times Y$.*

Утверждение 28.2. *Пусть X, Y — нормированные пространства.*

1. *$A \in \mathcal{L}(X, Y) \Longrightarrow A$ замкнутый.*
2. *$A \in \mathcal{L}(X, Y) \wedge Ker\, A = \{0\} \Longrightarrow A^{-1}$ замкнутый.*

Теорема 28.3 (Банах) (о замкнутом графике). *Пусть X, Y — банаховы пространства. $A : X \to Y$ линеен и замкнут. Тогда $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Доказательство. Поскольку $X \times Y$ — банахово пространство, а $Gr(A)$ — замкнутое множество, то $Gr(A)$ — банахово пространство (относительно нормы из $X \times Y$).

Рассмотрим отображение $pr_1 : Gr(A) \to X$, заданное формулой $pr_1(x, Ax) := x$ (проекция на первую координату). Это отображение — линейная биекция.

Поскольку $||pr_1(x, Ax)|| = ||x|| \leqslant ||x|| + ||Ax|| = ||(x, Ax)||$, то pr_1 непрерывно. Отметим, что pr_2 — проекция на вторую координату — также непрерывна. Тем самым, по теореме Банаха об обратном операторе, $pr_1^{-1} \in \mathcal{L}(X, Gr(A))$.

Но $Ax = pr_2(pr_1^{-1}(x))$. ■

Следствие. *Линейный замкнутый и неограниченный оператор $A : D(A) \subset X \to Y$, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, не может быть определен на всем X.*

Замечание. Если $A : D(A) \subset X \to Y$ и A — линейный замкнутый и неограниченный оператор, то в силу теоремы о пополнении всегда можно считать, что X — банахово пространство и $\overline{D(A)} = X$.

Определение. Пусть X — линейное пространство, X_1 и X_2 — его подпространства такие, что $X = X_1 \oplus X_2$. Отображение $Pr_{X_1} : X \to X_1$, заданное формулой $Pr_{X_1}(x_1 + x_2) := x_1$ $(x_1 \in X_1, x_2 \in X_2)$, называется *проекцией на X_1 параллельно X_2*.

Утверждение 28.3. *Пусть X — банахово пространство, X_1 и X_2 — его подпространства такие, что $X = X_1 \oplus X_2$. Тогда Pr_{X_1} и Pr_{X_2} непрерывны.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$J : X_1 \times X_2 \to X,$$

заданное формулой $J(x_1, x_2) := x_1 + x_2$. Тогда J — непрерывная биекция банахова пространства $X_1 \times X_2$ на X. Поэтому $J^{-1} \in \mathcal{L}(X, X_1 \times X_2)$ и $Pr_{X_1} = pr_1(J^{-1})$ непрерывно. ■

Лемма 28.1 (лемма о тройке). *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(X, Z)$, $Im\, A = Y$ и $Ker\, A \subset Ker\, B$. Тогда существует $C \in \mathcal{L}(Y, Z)$ такой, что $B = CA$.*

Доказательство. Оператор C определим следующей формулой: $Cy := B(A^{-1}(\{y\}))$.

1. Это определение корректно, так как $A(X) = Y$ и, если $y = Ax_1 = Ax_2$, то $A(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow B(x_1 - x_2) = 0$, тем самым $Bx_1 = Bx_2$.

2. $\forall G \in s(Z) \quad C^{-1}(G) = A(B^{-1}(G))$ и $B^{-1}(G) \in s(X)$ в силу непрерывности B, а $A(B^{-1}(G)) \in s(Y)$ — в силу теоремы Банаха об открытом отображении. ■

Следствие. *Если $Z = \mathbb{P}$, то лемма о тройке справедлива при более слабом условии: $Im\, A$ — подпространство.*

Действительно, сначала лемму о тройке надо применить к пространству $Y_0 := Im\, A$, а потом получившийся линейный непрерывный функционал C продолжить на Y. ■

Теорема 28.4. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

1. *$(Im\, A)^{\perp} = Ker\, A^*$.*
2. *${}^{\perp}(Im\, A^*) = Ker\, A$.*
3. *${}^{\perp}(Ker\, A^*) = \overline{Im\, A}$.*
4. *$(Ker\, A)^{\perp} \supset \overline{Im\, A^*}$.*
5. *Если X, Y рефлексивны, то $(Ker\, A)^{\perp} = \overline{Im\, A^*}$.*
6. *Если X, Y — банаховы пространства и $Im\, A$ замкнуто, тогда $(Ker\, A)^{\perp} = Im\, A^*$ и тем самым $Im\, A^*$ тоже замкнуто.*

Доказательство. $\boxed{1}$. $y^* \in (Im\, A)^{\perp} \Longleftrightarrow$

$$\forall y \in Im\, A \quad < y, y^* >= 0 \Longleftrightarrow$$

$$\forall x \in X \quad < Ax, y^* >=< x, A^* y^* >= 0 \Longleftrightarrow y^* \in Ker\, A^*.$$

$\boxed{3}$. ${}^{\perp}(Ker\, A^*) \overset{1}{=} {}^{\perp}((Im\, A)^{\perp}) =$ [утверждения 25.4 и 25.5.1] $= \overline{Im\, A}$.

$\boxed{4}$. $x^* \in Im\, A^* \Longrightarrow \exists\, y* \in Y^*\ :\ x^* = A^*y^* \Longrightarrow$
$\forall\, x \in Ker\, A \quad < x, x^* >=< x, A^*y^* >=< Ax, y^* >=< 0, y^* >$ $\Longrightarrow x^* \in (Ker\, A)^{\perp}$. Но по утверждению 25.4.1 $(Ker\, A)^{\perp}$ — подпространство.

$\boxed{5}$. $\overline{Im\, A^*} = [$ утверждение 25.4.1 $] = {}^{\perp}((\overline{Im\, A^*})^{\perp}) = [$ следствие 2 утверждения 25.5$] = {}^{\perp}([{}^{\perp}(\overline{Im\, A^*})]) \overset{2}{=} {}^{\perp}([Ker\, A]) = [$утверждение 25.5.2$] = (Ker\, A)^{\perp}$.

$\boxed{6}$. Пусть $x_0^* \in (Ker\, A)^{\perp}$, тогда $Ker\, A \subset Ker\, x_0^*$. В силу следствия леммы о тройке (для пространств $X, Y, \mathbb{P}$ и операторов A, x_0^*) $\exists\, y_0^* \in Y^*$: $x_0^* = y_0^* \cdot A$. Но

$$\forall\, x \in X \quad < x, x_0^* >= x_0^*(x) = y_0^*(Ax) =< Ax, y_0^* >=< x, A^*y_0^* > .$$

Тем самым $x_0^* = A^*y_0^* \in Im\, A^*$. ■

Следствие. Пусть X, Y — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.
1. $\overline{Im\, A^*} = X^* \Longrightarrow Ker\, A = \{0\}$.
2. $\overline{Im\, A} = Y \Longrightarrow Ker\, A^* = \{0\}$.

Определение. Пусть X, Y — нормированные пространства. Линейный оператор $A : D(A) \subset X \to Y$ называется *непрерывно обратимым*, если существует A^{-1} и $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Утверждение 28.4. *Пусть X, Y — нормированные пространства. Линейный оператор $A : D(A) \subset X \to Y$ непрерывно обратим $\Longleftrightarrow Im\, A = Y \wedge \exists\, c > 0\, \forall\, x \in D(A)\ ||Ax|| \geqslant c \cdot ||x||$. При этом $||A^{-1}|| \leqslant c^{-1}$.*

Следствие. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $A : D(A) \subset X \to Y$ — линейный оператор. Тогда*

$$\exists\, c > 0\, \forall\, x \in D(A)\ ||Ax|| \geqslant c \cdot ||x|| \iff$$
$$A^{-1} \in \mathcal{L}(< Im\, A, ||\cdot||_Y >, X).$$

Утверждение 28.5. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и*

$$\exists\, c > 0\, \forall\, x \in X\ ||Ax|| \geqslant c \cdot ||x||.$$

Тогда $Im\, A$ есть банахово пространство и тем самым замкнуто.

Доказательство. Пусть $Im\, A \supset \{\, y_n \,\}$ фундаментальна.
Тогда $\exists \{\, x_n \,\} \subset X\ :\ y_n = Ax_n$ и $||x_n - x_m|| \leqslant ||y_n - y_m||/c \Longrightarrow \{\, x_n \,\}$ фундаментальна $\Longrightarrow \exists\, x_0 \in X\ :$ $x_n \to x_0 \Longrightarrow Ax_n = y_n \to Ax_0 \in Im\, A$. ■

29. Дуальные системы

Определение. Пусть X — нормированное пространство. Семейства $\{\, x_\alpha \,\} \subset X$, $\{\, x_\alpha^* \,\} \subset X^*$ называются *дуальными друг к другу* (а пара $< \{\, x_\alpha \,\}, \{\, x_\alpha^* \,\}$ — *биортогональной*), если $< x_\alpha, x_\beta^* >= \delta_{\alpha\beta}$.

Утверждение 29.1. *Пусть X — нормированное пространство.*
1. *Если $\{\, x_\alpha \,\} \subset X$, $\{\, x_\alpha^* \,\} \subset X^*$ — дуальные системы, то обе они являются линейно независимыми системами.*
2. *Если $\{\, x_1, \ldots, x_n \,\} \subset X$ линейно независимы, то существует $\{\, x_1^*, \ldots, x_n^* \,\} \subset X^*$ дуальная к $\{\, x_1, \ldots, x_n \,\}$ система.*
3. *Если $\{\, x_1^*, \ldots, x_n^* \,\} \subset X^*$ линейно независимы, то существует $\{\, x_1, \ldots, x_n \,\} \subset X$ дуальная к $\{\, x_1^*, \ldots, x_n^* \,\}$ система.*

Доказательство. $\boxed{2}$. Так как $x_1 \notin X := < x_2, \ldots, x_n >$, то по следствию 5 к теореме Хана — Банаха найдется $x_1^* \in X^*$: $< x_1, x_1^* >= 1, < x_2, x_1^* >= 0, \ldots, < x_n, x_1^* >= 0$.
$\boxed{3}$. Это частный случай утверждения 21.2.4. ■

Теорема 29.1. *Пусть X — банахово пространство с нормированным базисом $\{\, e_n \,\}$. Тогда $||x||_1 := \sup\limits_{\nu} \Big|\Big| \sum\limits_{k=1}^{\nu} \lambda_k e_k \Big|\Big|$, где $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ есть норма на линейном пространстве X, и пространство $< X, ||\cdot||_1 >$ банахово.*

Доказательство. Пусть $P_\nu\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k\Big) := \sum\limits_{k=1}^{\nu}\lambda_k e_k$.

1. $\forall\,\nu\in\mathbb{N}\,\forall\,x\in X\;\;||P_\nu x||\leqslant||x||_1 \Longrightarrow$

$$||x|| = \lim_{\nu\to\infty}||P_\nu x||\leqslant||x||_1 \wedge \forall\,\mu,\nu\in\mathbb{N}\;\;||(P_\mu-P_\nu)x||\leqslant 2||x||_1.$$

2. Пусть $\{\,x_n\,\}$ фундаментальная относительно нормы $||\cdot||_1$. Так как

$$\forall\,\nu>2\;\;|\lambda_{n,\nu}-\lambda_{m,\nu}| = ||(P_\nu-P_{\nu-1})(x_n-x_m)||\overset{1}{\leqslant}2||x_n-x_m||_1,$$

то $\{\,\lambda_{n,\nu}\,\}$ фундаментальна при любом ν. Поэтому

$$\exists\,\{\,\lambda_{0,\nu}\,\}\,\forall\,\nu\in\mathbb{N}\;\;\lambda_{n,\nu}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda_{0,\nu}.$$

3. Поскольку при $n,m>N(\varepsilon):=N_{\text{фундамент.}}(\varepsilon)$ и любых $\mu\in\mathbb{N}$ и $\nu\in\mathbb{N}$

$$\Big|\Big|\sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu}\lambda_{n,k}e_k-\sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu}\lambda_{m,k}e_k\Big|\Big| = ||(P_{\nu+\mu}-P_{\nu+1})(x_n-x_m)||\leqslant$$

$$\leqslant 2||(x_n-x_m)||_1<2\varepsilon,$$

то при переходе к пределу при $m\to\infty$ получим

$$\begin{gathered}\forall\,\mu,\nu\in\mathbb{N}\,\forall\,n>N(\varepsilon)\\ \Big|\Big|\sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu}\lambda_{n,k}e_k-\sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu}\lambda_{0,k}e_k\Big|\Big|\leqslant 2\varepsilon.\end{gathered}\tag{29.1}$$

4. В силу (29.1) $\forall\,\mu,\nu\in\mathbb{N}\,\forall\,n>N(\varepsilon)$

$$\Big|\Big|\sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu}\lambda_{0,k}e_k\Big|\Big|\leqslant 2\varepsilon+\Big|\Big|\sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu}\lambda_{n,k}e_k\Big|\Big|.$$

При фиксированном n последнее слагаемое стремится к нулю при $\nu,\mu\to\infty$, поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\nu}\lambda_{n,k}e_k\underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}x_n$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_{0,k}e_k$ сходится к некоторому x_0 в смысле нормы $||\cdot||$.

5. Поскольку в силу (29.1) $\forall\,\nu\in\mathbb{N}\,\forall\,n>N(\varepsilon)$

$$||P_\nu(x_n-x_0)|| = \Big|\Big|\sum_{k=1}^{\nu}\lambda_{n,k}e_k-\sum_{k=1}^{\nu}\lambda_{0,k}e_k\Big|\Big|\leqslant 2\varepsilon,$$

то и $\forall\,n>N(\varepsilon)\;\;||x_n-x_0||_1=\sup\limits_{\nu}||P_\nu(x_n-x_0)||\leqslant 2\varepsilon$, т. е. $x_n\to x_0$ относительно $||\cdot||_1$. ■

Следствие. *В условиях предыдущей теоремы нормы $||\cdot||$ и $||\cdot||_1$ эквивалентны, а функционалы e_n^*, определенные формулой*

$$\Big\langle\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k, e_n^*\Big\rangle=\lambda_n,\tag{29.2}$$

непрерывны.

Доказательство. Пусть $I:<X,||\cdot||_1>\to<X,||\cdot||>$ есть тождественное отображение X на X. Поскольку $||Ix||=$ $=||x||\leqslant||x||_1$, то I — непрерывная биекция банахова пространства $<X,||\cdot||_1>$ на банахово пространство $<X,||\cdot||>$. По теореме Банаха о непрерывности обратного оператора I^{-1} тоже непрерывен, т. е.

$$\exists\,C>0\,\forall\,x\in X\;\;||x||_1=||I^{-1}x||_1\leqslant C||x||.$$

Наконец $|<x,e_n^*>|=||(P_n-P_{n-1})x||\leqslant 2||x||_1\leqslant 2C||x||$. ■

Теорема 29.2. *Пусть X — банахово пространство с базасом $\{\,e_n\,\}$. Тогда $\{\,e_n^*\,\}\subset X^*$, где e_n^* определены по формуле (29.2), — дуальная к нему система и $\{\,e_n^*\,\}$ — базис в банаховом пространстве $X_0^*:=\overline{<\{\,e_n^*\,\}>}$. При этом*

$$\forall\,x_0^*\in X_0^*\;\;x_0^*=\sum_{k=1}^{\infty}<e_k,x_0^*>e_k^*.$$

Доказательство. 1. Пусть $P_n x:=\sum\limits_{k=1}^{n}<x,e_k^*>e_k$. Так как $\{\,e_n\,\}$ — базис, то $\forall\,x\in X\;\;P_n x\to x$, и по теореме Банаха — Штейнгауза $\{\,||P_n||\,\}$ ограничена.

2. $\forall x \in X \, \forall x^* \in X^*$

$$< P_n x, x^* >= \sum_{k=1}^{n} < x, e_k^* > \cdot < e_k, x^* >=< x, P_n^* x^* >,$$

т. е. $P_n^* x^* = \sum_{k=1}^{n} < e_k, x^* > e_k^*$. Так как $||P_n^*|| = ||P_n||$, то $\{ ||P_n^*|| \}$ ограничена.

3. Пусть $X_1^* := \{ x^* \in X^* : \{ P_n^* x^* \}$ сходится$\}$. Тогда X_1^* — линейное многообразие и $\forall k \in \mathbb{N} \;\; e_k^* \in X_1^*$. Поскольку $\forall x \in X \, \forall x^* \in X^* \;\; < x, P_n^* x^* >=< P_n x, x^* > \to < x, x^* >$, то $P_n^* x^* \xrightarrow{сл} x^*$. Поэтому

$$\forall x_1^* \in X_1^* \;\; P_n^* x_1^* = \sum_{k=1}^{n} < e_k, x_1^* > e_k^* \to \sum_{k=1}^{\infty} < e_k, x^* > e_k^*,$$

т. е. $\{ e_n^* \}$ — базис в X_1^*.

4. Покажем, что X_1^* замкнуто в X^*.

Если $X_1^* \ni x_m^* \to x_0^*$, то $||P_n^* x_0^* - P_l^* x_0^*|| \leqslant ||P_n^*(x_0^* - x_m^*)|| + + ||P_n^* x_m^* - P_l^* x_m^*|| + ||P_l^*(x_m^* - x_0^*)|| \leqslant 2K||x_0^* - x_m^*|| + + ||P_n^* x_m^* - P_l^* x_m^*||$, т. е. $\{ P_n^* x_0^* \}$ фундаментальна и, тем самым, сходится к x_0^*.

5. Так как $\forall k \in \mathbb{N} \;\; e_k^* \in X_1^*$, то $X_0^* \subset X_1^*$. Но $\forall x_1^* \in X_1^*$ $P_n^* x_1^* \to x_1^*$ и $\{ P_n^* x_1^* \} \subset X_0^*$, поэтому $x_1^* \in X_0^*$. ■

Следствие. *Если X — рефлексивное пространство с базисом $\{ e_n \}$, а $\{ e_n^* \}$ — дуальная к нему система, то $\{ e_n^* \}$ — базис в X^*.*

Доказательство. Предположим противное: $X_0^* \neq X^*$. Тогда по следствию 5 из теоремы Хана — Банаха

$$\exists \, x_0^{**} \in X^{**} \; : \; x_0^{**} \neq 0 \wedge X_0^* \subset Ker \, x_0^{**}.$$

В силу рефлексивности X найдется $x_0 : \; x_0^{**} = [x_0]$.

Тогда в силу того, что $\forall k \in \mathbb{N} \;\; e_k^* \in X_0^*$, справедливы равенства $0 =< e_k^*, x_0^{**} >=< e_k^*, [x_0] >=< x_0, e_k^* >$. Поэтому $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} < x_0, e_k^* > e_k = 0$, т. е. $x_0^{**} = 0$, что противоречит выбору x_0^{**}. ■

30. Спектр и резольвента

Здесь мы будем в основном рассматривать линейные операторы $A : D(A) \subset X \to X$, действующие из банахова пространства X над полем $\mathbb{C}$ в X. При этом будем считать, что $\overline{D(A)} = X$.

Определение. Пусть X — банахово пространство над полем $\mathbb{R}$ и $A : D(A) \subset X \to X$ — линейный оператор. Сопоставим банахову пространству X и оператору A новое банахово пространство $\overset{c}{X}$ над полем $\mathbb{C}$ и линейный оператор $\overset{c}{A}$, действующий в $\overset{c}{X}$, определенные следующим образом:

$$\overset{c}{X} := X + iX, \;\; (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(\lambda + i\mu)(x + iy) := (\lambda x - \mu y) + i(\lambda y + \mu x),$$

$$||x + iy||_c := \sup_{\varphi} ||x \cos \varphi + y \sin \varphi||$$

(а в случае, когда X есть гильбертово пространство, определим на $\overset{c}{X}$ скалярное произведение по формуле

$$(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)_c := (x_1, x_2) + (y_1, y_2) + i(y_1, x_2) - i(x_1, y_2)$$

и норму, порожденную этим произведением),

$$D(\overset{c}{A}) := D(A) + iD(A) \;\; \overset{c}{A}(x + iy) := Ax + iAy.$$

Банахово (гильбертово) пространство $\overset{c}{X}$ называется *комплексификацией банахова (гильбертова) пространства* X.

Определения. Пусть X — банахово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A : D(A) \subset X \to X$ — линейный оператор.

1. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой оператора* A, если существует $(A - \lambda I)^{-1}$ и $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

2. Множество всех регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* и обозначается $\rho(A)$.

3. $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — *спектр оператора.*

4. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением оператора* A, если существует $e_\lambda \in X$ такой, что $e_\lambda \neq 0$ и $Ae_\lambda = \lambda e_\lambda$. Вектор e_λ называется *собственным вектором оператора* A, *соответствующим собственному значению* λ.

5. Операторная функция $R_A : \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$, определенная формулой $R_A(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1}$, называется *резольвентой оператора* A.

Утверждение 30.1. *Пусть* X — *банахово пространство над полем* $\mathbb{R}$, $A : D(A) \subset X \to X$ — *линейный оператор и* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. λ — *собственное значение оператора* $A \iff \lambda$ — *собственное значение оператора* $\overset{c}{A}$.

2. $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \iff (\overset{c}{A} - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\overset{c}{X})$.

Утверждение 30.2. *Если* λ — *собственное значение линейного оператора* A, *то* $\lambda \in \sigma(A)$.

Определение. Множество собственных значений линейного оператора A называется *дискретным спектром оператора* A (или *точечным спектром оператора* A) и обозначается $\sigma_d(A)$ (или $\sigma_p(A)$).

$\sigma_c(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$ — *непрерывный спектр оператора* A.

Замечание. Часто спектр $\sigma(A)$ оператора A делят на три части: $\sigma_p(A)$ — *точечный*, $\sigma_c(A) := \{ \lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A) : \overline{Im\,(A - \lambda I)} = X \}$ — *непрерывный* и $\sigma_r(A) := \{ \lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A) : \overline{Im\,(A - \lambda I)} \neq X \}$ — *остаточный* [8].

Пример 30.1. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^k) \Longrightarrow \sigma(A) = \sigma_d(A)$.

Пример 30.2. Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(C[0;1])$ задан формулой $(Ax(\cdot))(t) := t \cdot x(t)$. Тогда при $\lambda \notin [0;1]$ уравнение $(A - \lambda I)x = y$ разрешимо в $C[0;1]$, $x(t) = y(t)/(t - \lambda)$ и

$$||x(\cdot)|| \leqslant ||y(\cdot)|| \cdot \max_{t \in [0;1]} (|t - \lambda|^{-1},$$

т. е. $\lambda \in \rho(A)$. Если же $\lambda \in [0;1]$, то уравнение $(A - \lambda I)x = y$ не разрешимо в $C[0;1]$ уже при $y(\cdot) \equiv 1$, поэтому $\lambda \in \sigma(A)$. Уравнение $Ax = \lambda x$ имеет при всех λ единственное решение: $x = 0$. Таким образом, $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0;1]$.

Утверждение 30.3. *Если* $\rho(A) \neq \varnothing$, *то* A *замкнут.*

Лемма 30.1. *Пусть* X — *банахово пространство над полем* $\mathbb{P}$, $A \in \mathcal{L}(X)$ *и* $||A|| < 1$. *Тогда* $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, $||(I - A)^{-1}|| \leqslant (1 - ||A||)^{-1}$ *и* $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.

Доказательство. Поскольку $||A^n|| \leqslant ||A||^n$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||A^n||$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ сходятся. ■

Замечание. Поскольку достаточным условием сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||A^n||$ является и неравенство $\overline{\lim} \sqrt[n]{||A^n||} < 1$, то и при его выполнении оператор $(I - A)$ непрерывно обратим.

Теорема 30.1. *Пусть* X — *банахово пространство над полем* $\mathbb{C}$ *и* $A : D(A) \subset X \to X$ *линейный. Тогда* $\rho(A)$ *открыто,* $\sigma(A)$ *замкнуто и*

$$\forall\, \lambda_0 \in \rho(A) \quad R_A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_A(\lambda_0)^{n+1}$$

в некоторой окрестности точки λ_0.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда

$$A - \lambda I = (A - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0) I = (A - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0) R_A(\lambda_0)).$$

Но при $||(\lambda - \lambda_0) R_A(\lambda_0)|| < 1$ в силу леммы 30.1 оператор $I - (\lambda - \lambda_0) R_A(\lambda_0)$ непрерывно обратим, поэтому при этих же λ

$$R_A(\lambda) = (I - (\lambda - \lambda_0) R_A(\lambda_0))^{-1} R_A(\lambda_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n R_A(\lambda_0)^{n+1}. \quad \blacksquare$$

Следствие. *В условиях предыдущей теоремы*

$$\forall\, x \in X\, \forall\, x^* \in X^* \quad \Phi(\lambda; x, x^*) := < R_A(\lambda)x, x^* > \qquad (30.1)$$

аналитична в $\rho(A)$.

Утверждение 30.4. *Пусть* X *— банахово пространство. Если* $A \in \mathcal{L}(X)$ *и* $|\lambda| > \overline{\lim}\, \sqrt[n]{||A^n||}$, *то* $\lambda \in \rho(A)$, *т. е.*

$$\sup |\sigma(A)| \leqslant \overline{\lim}\, \sqrt[n]{||A^n||} \leqslant ||A||.$$

При этом $R_A(\lambda) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$.

Доказательство. $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$. $\blacksquare$

Следствие. *Пусть* X *— банахово пространство. Если* A *из* $\mathcal{L}(X)$, *то* $\forall\, x \in X\, \forall\, x^* \in X^* \quad \lim\limits_{\lambda\to\infty} \Phi(\lambda; x, x^*) = 0$, *где* $\Phi(\lambda; x, x^*)$ *определена по формуле* (30.1).

Утверждение 30.5. *Пусть* X *— банахово пространство. Если* $A \in \mathcal{L}(X)$, *то* $\sigma(A)$ *— непустое компактное множество.*

Доказательство. Если $\sigma(A) = \varnothing$, то при всех $x \in X$ и $x^* \in X^*$ функция $\Phi(\lambda; x, x^*)$, определенная по формуле (30.1), аналитична в $\mathbb{C}$ и по следствию утверждения 30.4 ограничена. Тогда по теореме Лиувилля $\Phi(\lambda; x, x^*) \equiv 0$, т. е. $R_A(\lambda) \equiv 0$, чего быть не может. $\blacksquare$

Задание 30.1. Покажите, что для любого $A \in \mathcal{L}(X)$ существует $r_0(A) := \lim\, \sqrt[n]{||A^n||}$.

Определение. Число $r_0(A)$ называется *спектральным радиусом оператора A*, так как $\max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| = r_0(A)$ (см. [6, с. 596 – 597]).

31. Компактные (вполне непрерывные) операторы

Определения. Пусть X, Y — нормированные пространства.

1. Оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если

$$\forall\, M \subset X \ \ (M \text{ ограничено } \Longrightarrow A(M) \text{ предкомпактно}).$$

2. Непрерывный компактный оператор называется *вполне непрерывным.*

Замечания. 1. Поскольку всякий компактный оператор ограничен, то для линейных операторов понятия "компактный" и "вполне непрерывный" совпадают.

2. Для линейного оператора $A : X \to Y$ компактность эквивалентна предкомпактности множества $A(B[0,1])$.

Определение. Множество всех линейных компактных операторов из X в Y обозначают $comp\mathcal{L}(X, Y)$.

Утверждение 31.1. *Пусть* X, Y *— нормированные пространства.*

1. *Если* $dim(X) < +\infty$, *то* $comp\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

2. *Если* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *и* $dim(Im\, A) < +\infty$, *то* $A \in comp\mathcal{L}(X, Y)$.

Определение. Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется *конечномерным*, если $dim(Im\, A) < +\infty$.

Пример 31.1. Оператор вложения $J : C^1[a;b] : \to C[a;b]$ (т. е. оператор сопоставляющий функции $x(\cdot) \in C^1[a;b]$ ее же, но рассматриваемую как элемент из $C[a;b]$), является компактным, поскольку из того, что $||x(\cdot)||_{C^1[a;b]} = ||x'(\cdot)||_{C[a;b]} + ||x(\cdot)||_{C[a;b]} \leqslant 1$, следует: $(||x(\cdot)||_{C[a;b]} \leqslant 1)$ (тем самым $J(B[0,1])$ равномерно ограничено) и $(||x'(\cdot)||_{C[a;b]} \leqslant 1)$ (тем самым $\omega(\delta, x) \leqslant \delta||x'|| \leqslant \delta$, т. е. $J(B[0,1])$ равностепенно непрерывно). $\blacksquare$

Пример 31.2. Если X — бесконечномерное нормированное пространство, то тождественный оператор некомпактен.

Теорема 31.1. *Пусть* $\mathcal{K}(\cdot,\cdot) \in C([a;b]^2)$.
Тогда оператор $A \in \mathcal{L}(C[a;b])$*, определенный формулой*

$$(Ax(\cdot))(t) := \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds,$$

компактен.

Доказательство. Пусть $y(\cdot) = Ax(\cdot)$, тогда

$$|y(t)| = \left|\int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds\right| \leqslant ||x(\cdot)|| \cdot ||\mathcal{K}(\cdot,\cdot)||_{C([a;b]^2)} \cdot (b-a) \text{ и}$$

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left|\int_a^b (\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s))x(s)\,ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant ||x(\cdot)||\omega(|t_1 - t_2|; \mathcal{K}, [a;b]^2) \cdot (b-a).$$

Так как $\mathcal{K}$ непрерывно на компакте $[a;b]^2$, то $\mathcal{K}$ равномерно непрерывна на нем и тем самым $\omega(\delta; \mathcal{K}, [a;b]^2) \underset{\delta\to+0}{\longrightarrow} 0$. Отсюда

$$\sup_{||x(\cdot)||\leqslant 1} ||Ax(\cdot)|| \leqslant ||\mathcal{K}(\cdot,\cdot)||_{C([a;b]^2)} \cdot (b-a) \text{ и}$$

$$\sup_{||x(\cdot)||\leqslant 1} |\omega(\delta; Ax(\cdot), [a;b])| \leqslant \omega(\delta; \mathcal{K}, [a;b]^2) \cdot (b-a).$$

Поэтому $A(B[0,1])$ ограничено и в силу утверждения 6.9 равностепенно непрерывно. ■

Теорема 31.2. *Пусть* $\Delta = \{\, (t,s) : t \in [a;b] \wedge s \in [a;t] \,\}$ *и* $\mathcal{K}(\cdot,\cdot) \in C(\Delta)$*. Тогда оператор* A*, определенный формулой*

$$(Ax(\cdot))(t) := \int_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds,$$

компактен.

Доказательство. Пусть $y(\cdot) = Ax(\cdot)$, тогда

$$|y(t)| = \left|\int_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds\right| \leqslant ||x(\cdot)|| \cdot ||\mathcal{K}(\cdot,\cdot)||_{C(\Delta)} \cdot (b-a) \text{ и}$$

$$|y(t_1) - y(t_2)| \overset{t_1 \geqq t_2}{=} \left|\int_a^{t_2} (\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s))x(s)\,ds\right| +$$
$$+ \left|\int_{t_2}^{t_1} \mathcal{K}(t_1,s)x(s)\,ds\right| \leqslant ||x(\cdot)||\omega(|t_1 - t_2|; \mathcal{K}, \Delta) \cdot (b-a) +$$
$$+ ||x(\cdot)|| \cdot ||\mathcal{K}(\cdot,\cdot)||_{C(\Delta)} \cdot |t_1 - t_2|. \quad ■$$

Определения. 1. Функция $\mathcal{K}(\cdot,\cdot)$, с помощью которой определен интегральный оператор из теоремы 31.1, называется *ядром интегрального оператора* A.

2. Интегральный оператор из теоремы 31.2 называется *интегральным оператором Вольтерра.*

Утверждение 31.2. *Пусть* X, Y *— нормированные пространства. Если* $A \in comp\mathcal{L}(X,Y)$*, то* A *секвенциально непрерывен относительно пары* $(\sigma(X), s(Y))$*, т. е.* $(x_n \xrightarrow{сл} x_0 \Longrightarrow Ax_n \to Ax_0)$.

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{сл} x_0$. Поскольку A из $\mathcal{L}(X,Y)$, то в силу теоремы 27.1 $Ax_n \xrightarrow{сл} Ax_0$.

Предположим, что $Ax_n \not\to Ax_0$. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0\, \exists \{\, x_{n_k^{(1)}} \,\} : ||Ax_{n_k^{(1)}} - Ax_0|| \geqslant \varepsilon_0. \tag{31.1}$$

Но $\{\, Ax_{n_k^{(1)}} \,\}$ предкомпактно, поэтому $\exists\, y_0 \in Y\, \exists \{\, x_{n_k^{(2)}} \,\}$: $Ax_{n_k^{(2)}} \to y_0$. Так как $Ax_n \xrightarrow{сл} Ax_0$, то $y_0 = Ax_0$, что противоречит неравенству из (31.1). ■

Теорема 31.3. *Пусть* X *— рефлексивное пространство (в частности, гильбертово пространство). Тогда*

$$A \in comp\mathcal{L}(X,Y) \Longleftrightarrow (x_n \xrightarrow{сл} x_0 \Longrightarrow Ax_n \to Ax_0).$$

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $\{ y_n \} \subset A(B[0,1])$.

Тогда $\exists \{ x_n \} \subset B[0,1] \,:\, y_n = Ax_n$. Но в силу теоремы 26.6 $B[0,1]$ слабо секвенциально компактно. Поэтому $\exists x_0 \in B[0,1]$ $\exists \{ x_{n_k} \} : x_{n_k} \xrightarrow{сл} x_0 \Longrightarrow y_{n_k} = Ax_{n_k} \to y_0 = Ax_0$. ■

Следствие. *Пусть X — рефлексивное пространство, множество M из X ограничено, выпукло и замкнуто, а $A \in comp\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда $A(M)$ компактно.*

Утверждение 31.3. *Пусть X, Y — нормированные пространства. Если $A, B \in comp\mathcal{L}(X,Y)$, то*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{P} \ \lambda A + \mu B \in comp\mathcal{L}(X,Y).$$

Теорема 31.4. *Пусть X — нормированное пространство, Y — банахово пространство, $\{ A_n \} \subset comp\mathcal{L}(X,Y)$ и $A_n \rightrightarrows A_0$. Тогда $A_0 \in comp\mathcal{L}(X,Y)$, т. е. $comp\mathcal{L}(X,Y)$ — подпространство нормированного пространства $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Доказательство. Покажем, что $A_0(B[0,1])$ предкомпактно. Пусть $\{ x_n \} \subset B[0,1]$ и $A_0 x_n = y_n$.

1. Поскольку $\{ A_1 x_n \}$ предкомпактно, то $\exists \{ x_{n_k^{(1)}} \}$ — подпоследовательность последовательности $\{ x_n \}$ такая, что $\{ A_1 x_{n_k^{(1)}} \}$ сходится. Поскольку $\{ A_2 x_{n_k^{(1)}} \}$ предкомпактно то $\exists \{ x_{n_k^{(2)}} \}$ — подпоследовательность последовательности $\{ x_{n_k^{(1)}} \}$ такая, что $\{ A_2 x_{n_k^{(2)}} \}$ сходится.

Продолжая этот процесс, построим последовательности $\{ x_{n_k^{(m)}} \}$ такие, что $\{ x_{n_k^{(m)}} \}$ — подпоследовательность последовательности $\{ x_{n_k^{(m-1)}} \}$ и $\{ A_m x_{n_k^{(m)}} \}$ сходится.

2. Покажем, что $y_{n_k^{(k)}} = A_0 x_{n_k^{(k)}}$ фундаментальна.

$$||y_{n_k^{(k)}} - y_{n_l^{(l)}}|| \leqslant ||A_0 x_{n_k^{(k)}} - A_m x_{n_k^{(k)}}|| + ||A_m x_{n_k^{(k)}} - A_m x_{n_l^{(l)}}|| +$$

$$+ ||A_m x_{n_l^{(l)}} - A_0 x_{n_l^{(l)}}|| \leqslant 2||A_m - A_0|| + ||A_m x_{n_k^{(k)}} - A_m x_{n_l^{(l)}}||.$$

Но при $k > m$ последовательность $\{ x_{n_k^{(k)}} \}$ является подпоследовательностью последовательности $\{ x_{n_k^{(m)}} \}$. Поэтому $||A_m x_{n_k^{(k)}} - A_m x_{n_l^{(l)}}|| \underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $0 \leqslant \varliminf_{k,l\to\infty} ||y_{n_k^{(k)}} - y_{n_l^{(l)}}|| \leqslant$ $\leqslant \varlimsup_{k,l\to\infty} ||y_{n_k^{(k)}} - y_{n_l^{(l)}}|| \leqslant 2||A_m - A_0|| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Утверждение 31.4. *Пусть X, Y, Z, W — нормированные пространства, $A \in comp\mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(W,X)$ и $C \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Тогда $AB \in comp\mathcal{L}(W,Y)$ и $CA \in comp\mathcal{L}(X,Z)$.*

Следствие. *Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство, а Y — нормированное пространство.*

1. *Если $A \in comp\mathcal{L}(X,Y)$ и $Ker\, A = \{0\}$, то A^{-1} — неограниченный линейный оператор.*
2. *Если $A \in comp\mathcal{L}(X)$, то $0 \in \sigma(A)$.*

Задание 31.1. Пусть $A \in \mathcal{L}(l_2)$ задан формулой

$$Ax = (0, x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots).$$

Покажите, что этот оператор компактен и $\sigma = \{0\}$.

Теорема 31.5 (Шаудер). *Пусть X, Y — банаховы пространства и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Тогда $A \in comp\mathcal{L}(X,Y) \Longleftrightarrow A^* \in comp\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $\{ y_n^* \} \subset B_{Y^*}[0,1]$ и $x_n^* = A^* y_n^*$.

1. Рассмотрим $\widetilde{y}_n^*$ — сужение y_n^* на $Y_0 := \overline{A(B_X[0,1])}$ — компактное в Y множество. Покажем с помощью теоремы Арцела — Асколи (с. 39), что $\{ \widetilde{y}_n^* \}$ предкомпактно в $C(Y_0)$.

$$\forall y \in Y_0 \ |\widetilde{y}_n^*(y)| = |< y, y_n^* >| \leqslant ||y|| \cdot ||y_n^*|| \leqslant ||A|| \Longrightarrow$$

$\{ \widetilde{y}_n^* \}$ — равномерно ограничено.

$$\forall y_1, y_2 \in Y_0 \ |\widetilde{y}_n^*(y_1) - \widetilde{y}_n^*(y_2)| = |< y_1 - y_2, y_n^* >| \leqslant ||y_1 - y_2|| \Longrightarrow$$

$\{ \widetilde{y}_n^* \}$ — равностепенно непрерывно.

2. Пусть $\{ \widetilde{y}_{n_k}^* \}$ — сходящаяся в $C(Y_0)$ подпоследовательность последовательности $\{ \widetilde{y}_n^* \}$.

$$\rho_{Y_0}(\widetilde{y}_{n_k}^*, \widetilde{y}_{n_l}^*) = \max_{y \in Y_0} |\widetilde{y}_{n_k}^*(y) - \widetilde{y}_{n_l}^*(y)| = \max_{y \in Y_0} | < y, y_{n_k}^* - y_{n_l}^* > | \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{y \in A(B_X[0,1])} | < y, y_{n_k}^* - y_{n_l}^* > | = \sup_{||x|| \leqslant 1} | < x, A^*(y_{n_k}^* - y_{n_l}^*) > | =$$

$$= ||A^* y_{n_k}^* - A^* y_{n_l}^*|| = ||x_{n_k}^* - x_{n_l}^*||$$

и, следовательно, $\{ x_{n_k}^* \}$ фундаментальна в полном метрическом пространстве X^*.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $A^* \in comp\mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Тогда по предыдущей части теоремы $A^{**} \in comp\mathcal{L}(X^{**}, Y^{**}) \Longrightarrow A^{**}([B_X[0,1]]) =$ $=$ [утверждение 27.4] $= [A(B_X[0,1])]$ предкомпактно в Y^{**}. Покажем, что если $[Y_1]$ предкомпактно в Y^{**}, то и Y_1 предкомпактно в Y.

Пусть $\{ y_n \} \subset Y_1 \Longrightarrow \exists \{ [y_{n_k}] \}$, сходящаяся в $Y^{**} \Longrightarrow$ $\{ [y_{n_k}] \}$ фундаментальна в $Y^{**} \Longrightarrow \{ y_{n_k} \}$ фундаментальна в банаховом пространстве $Y \Longrightarrow \{ y_{n_k} \}$ сходится в Y. Таким образом, $A(B_X[0,1])$ предкомпактно в Y. ■

Теорема 31.6. *Если X — банахово пространство, а A из $comp\mathcal{L}(X)$, то* $\forall \, \delta > 0 \ \sum\limits_{|\lambda| \geqslant \delta} dim(Ker\,(A - \lambda I)) < +\infty.$

Доказательство. Предположим противное:

$$\exists \{ \lambda_n \} \subset \mathbb{P} \, \exists \{ x_n \} \subset X \, |\lambda_n| \geqslant \delta, \ A x_n = \lambda_n x_n$$

и $\{ x_n \}$ — линейно независимая система. Тогда в силу следствия леммы о почти перпендикуляре (с. 64) существует нормированная линейно независимая система $\{ e_n \}$ такая, что

$$\forall \, n \ X_n := < x_1, \ldots, x_n > = < e_1, \ldots, e_n > \ \text{и} \ \rho(e_n, X_{n-1}) = 1.$$

Если $e_n = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, то $\alpha_n x_n = e_n + \widetilde{x}_{n-1}$, где $\widetilde{x}_{n-1} \in X_{n-1}$. Поэтому

$$\frac{1}{\lambda_n} A(e_n) = \frac{\alpha_1 \lambda_1 x_1}{\lambda_n} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1}}{\lambda_n} + \alpha_n x_n = \widehat{x}_{n-1} + e_n,$$

где $\widehat{x}_{n-1} \in X_{n-1}$. Тогда при $n > m$

$$||A(e_n/\lambda_n) - A(e_m/\lambda_m)|| = ||e_n + \widehat{x}_{n-1} - e_m - \widehat{x}_{m-1}|| \geqslant$$

$$\geqslant \rho(e_n, X_{n-1}) = 1.$$

Тем самым $\{ A(e_n/\lambda_n) \}$ не предкомпактно, хотя $\{ e_n/\lambda_n \}$ ограничено. ■

Следствие. *Пусть X — банахово пространство, а A из $comp\mathcal{L}(X)$.*

1. *У компактного оператора A не более чем конечное число собственных значений λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| \geqslant \delta >$ > 0, и кратность каждого собственного значения конечна.*

2. *У компактного оператора A не более чем счетное число собственных значений, и их можно занумеровать (с учетом их кратности) в невозрастающем порядке модулей.*

Теорема 31.7. *Если X — банахово пространство, A из $comp\mathcal{L}(X)$ и $\lambda \neq 0$, то $Im\,(A - \lambda I)$ замкнуто, т. е. является подпространством банахова пространства X.*

Доказательство. 1. В силу предыдущей теоремы $Ker\,(A - \lambda I)$ конечномерно, поэтому по следствию 4 теоремы Хана — Банаха существует подпространство X_1 : $X = Ker\,(A - \lambda I) \oplus X_1$. Отметим, что само X_1 является банаховым пространством. Пусть $S := (A - \lambda I)\Big|_{X_1}$ — сужение оператора $A - \lambda I$ на X_1. Тогда $S \in \mathcal{L}(X_1, X)$ и $Im\, S = Im\,(A - \lambda I)$.

2. Покажем, что $r := \inf\{ ||Sx|| : x \in X_1 \wedge ||x|| = 1 \} > 0$.

Предположим противное:

$$\exists \{ x_n \} \subset X_1 : \ ||x_n|| = 1 \wedge S x_n = A x_n - \lambda x_n \to 0.$$

Так как A компактный, то $\exists \{ x_{n_k} \} \exists \, x_0 \in X$: $A x_{n_k} \to x_0$. Поэтому $\lambda x_{n_k} \to x_0 \in X_1$. Таким образом, $A(\lambda x_{n_k}) \to A x_0$ и $A(\lambda x_{n_k}) = \lambda A(x_{n_k}) \to \lambda x_0$, поэтому $A x_0 = \lambda x_0 \Longrightarrow$

$Sx_0 = 0 \Longrightarrow x_0 = 0$. Но $|\lambda| = ||\lambda x_{n_k}|| \to ||x_0||$, т. е. $||x_0|| = |\lambda| \neq 0$, что противоречит равенству $x_0 = 0$.

3. Теперь осталось применить утверждение 28.5. ■

Теорема 31.8. *Пусть X — банахово пространство, A из $comp\mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \sigma(A)$ и $\lambda \neq 0$. Тогда $\lambda \in \sigma_d(A)$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq \lambda \notin \sigma_d(A)$. Тогда по предыдущей теореме $X_1 := Im\,(A - \lambda I)$ — подпространство в банаховом пространстве X.

1. Если $X_1 = X$, то $A - \lambda I$ — непрерывная биекция банахова пространства X на себя. Поэтому по теореме Банаха об обратном операторе $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, т. е. $\lambda \in \rho(A)$.

2. Покажем, что соотношение $X_1 \neq X$ невозможно.

Предположим противное: $X_1 \neq X$. Рассмотрим $X_n := Im\,(A - \lambda I)^n$. Тогда в силу инъективности оператора $A - \lambda I$ $\forall\, n$ $X_{n+1} \subset X_n \wedge X_{n+1} \neq X_n$.

Поскольку $A(X_1) \subset X_1$, то сужение A на X_1 есть компактный оператор, действующий в банаховом пространстве X_1 и к сужению оператора $A - \lambda I$ на X_1 применима теорема 31.7. Поэтому X_2 — подпространство банахова пространства X_1 и, следовательно, банахова пространства X. Проведя индукцию по n, получим, что все X_n являются подпространствами банахова пространства X.

По лемме о почти перпендикуляре в каждом X_n найдем такой e_n, что $||e_n|| = 1$ и $\rho(e_n, X_{n+1}) \geqslant 1/2$. Тогда последовательность $\{\, e_n \,\}$ ограничена и $(A - \lambda I)e_n \in X_{n+1}$. Но при $n > m$

$$||Ae_n - Ae_m|| = ||(A - \lambda I)e_n - (A - \lambda I)e_m + \lambda e_n - \lambda e_m|| \geqslant$$

$$\geqslant |\lambda|\rho(e_m, X_{m+1}) \geqslant |\lambda|/2,$$

т. е. $\{\, Ae_n \,\}$ не предкомпактно. ■

Следствие. Если X — бесконечномерное банахово пространство и $A \in comp\mathcal{L}(X)$, то $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \{0\}$.

Утверждение 31.5. *Если X — банахово пространство, $A \in comp\mathcal{L}(X)$ и $\lambda \neq 0$, то*

$$Ker\,(A - \lambda I) = \{0\} \Longleftrightarrow Im\,(A - \lambda I) = X.$$

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Если $Ker\,(A - \lambda I) = \{0\}$, то λ не из $\sigma(A)$, поэтому $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ и тем самым $Im\,(A - \lambda I) = X$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Если $Im\,(A - \lambda I) = X$, то

$$\{0\} = X^{\perp} = (Im\,(A - \lambda I))^{\perp} = [\text{ теорема 28.4.1}] =$$

$$= Ker\,(A - \lambda I)^* = Ker\,(A^* - \lambda I),$$

тем самым $\lambda \notin \sigma_d(A^*)$. Но $A^* \in comp\mathcal{L}(X^*)$, поэтому $\lambda \in \rho(A^*)$. Тогда $Im\,(A^* - \lambda I) = X^*$ и

$$\{0\} = {}^{\perp}X^* = {}^{\perp}(Im\,(A^* - \lambda I)) = [\text{ теорема 28.4.2}] =$$

$$= Ker\,(A - \lambda I). \quad ■$$

Замечание. Утверждение 31.5 показывает, что если A из $comp\mathcal{L}(X)$, X — банахово пространство и $\lambda \neq 0$, то для оператора $\mathcal{A} := A - \lambda I$ справедлива *альтернатива Фредгольма*: либо уравнение $\mathcal{A}x = y$ разрешимо (и при этом единственным образом) при любом $y \in X$, либо соответствующее однородное уравнение $\mathcal{A}x = 0$ имеет ненулевое решение.

32. Теория Рисса — Фишера, теоремы Фредгольма

Ф. Рисс и Р. Фишер обобщили теоремы, доказанные Э. Фредгольмом для интегральных уравнений, на случай компактных операторов.

Пусть X — банахово пространство и $A \in comp\mathcal{L}(X)$. Рассмотрим четыре уравнения:

(1)	$x = Ax + y.$	(1*)	$x^* = A^*x^* + y^*.$
(1°)	$z = Az.$	(1*°)	$z^* = A^*z^*.$

Теорема 32.1 (первая теорема Фредгольма). *Следующие условия эквивалентны:*

1. (1) *разрешимо при любых* y, *т. е.* $Im\,(I-A)=X$.
2. (1°) *имеет только нулевые решения, т. е.*

$$Ker\,(I-A)=\{0\}.$$

3. (1^*) *разрешимо при любых* y^*, *т. е.* $Im\,(I-A^*)=X^*$.
4. ($1^{*\circ}$) *имеет только нулевые решения, т. е.*

$$Ker\,(I-A^*)=\{0\}.$$

Доказательство. 1. Эквивалентности (1)$\Longleftrightarrow$(2) и (3)$\Longleftrightarrow$(4) справедливы в силу утверждения 31.5.

2. Импликация (3)$\Longrightarrow$(1) справедлива в силу теоремы 28.4.1. Поскольку по теореме 31.7 $Im\,(I-A)$ замкнуто, то импликация (1)$\Longrightarrow$(3) справедлива в силу теоремы 28.4.6. ■

Замечание. Отметим, что каждое из четырех условий эквивалентно тому, что $1\in\rho(A)$ и $1\in\rho(A^*)$.

Теорема 32.2 (вторая теорема Фредгольма). *Уравнения* (1°) *и* ($1^{*\circ}$) *имеют одинаковое число линейно независимых решений, т. е.* $dim(Ker\,(I-A))=dim(Ker\,(I-A^*))$.

Доказательство. Конечномерность подпространств $Ker\,(I-A)$ и $Ker\,(I-A^*)$ уже доказана (см. теорему 31.6).

1. Пусть $\{\,e_1,\dots,e_n\,\}$ — нормированный базис подпространства $Ker\,(I-A)$, $\{\,e_1^*,\dots,e_m^*\,\}$ — нормированный базис $Ker\,(I-A^*)$, а $\{\,\widetilde{e}_1^*,\dots,\widetilde{e}_n^*\}$ и $\{\,\widetilde{e}_1,\dots,\widetilde{e}_m\,\}$ — дуальные к $\{\,e_1,\dots,e_n\,\}$ и $\{\,e_1^*,\dots,e_m^*\,\}$ системы соответственно, т. е. $<e_k,\widetilde{e}_l^*>=\delta_{kl}$ и $<\widetilde{e}_k,e_l^*>=\delta_{kl}$.

Предположим, что $n<m$. Рассмотрим операторы

$$\widetilde{A}x:=\sum_{k=1}^{n}<x,\widetilde{e}_k^*>\widetilde{e}_k \quad \text{и} \quad \widehat{A}:=A+\widetilde{A}.$$

Оба оператора компактны, так как $\widetilde{A}$ конечномерный, а $\widehat{A}$ — сумма компактных операторов.

2. Пусть $x_0\in Ker\,(I-\widehat{A})$. Тогда $(I-A)x_0=\widetilde{A}x_0$. Поскольку для $j\in\overline{1,n}$ $<(I-A)x_0,e_j^*>=<x_0,(I-A^*)e_j^*>=<x_0,0>=0$ и $<(I-A)x_0,e_j^*>=<\widetilde{A}x_0,e_j^*>=\sum\limits_{k=1}^{n}<x_0,\widetilde{e}_k^*>\cdot<\widetilde{e}_k,e_j^*>=$ $=<x_0,\widetilde{e}_j^*>$, то

$$\forall\, j\in\overline{1,n}\;\; <x_0,\widetilde{e}_j^*>=0. \tag{32.1}$$

Поэтому $\widetilde{A}x_0=0$. Таким образом, $x_0\in Ker\,(I-A)$, и его можно представить в виде $x_0=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k e_k$. Тогда $\lambda_k=<x_0,\widetilde{e}_k^*>\overset{(32.1)}{=}0$, т. е. $x_0=0$. Итак,

$$Ker\,(I-\widehat{A})=\{0\}. \tag{32.2}$$

3. Поскольку $(I-\widehat{A})^*=((I-A)-\widetilde{A})^*=(I-A^*)-\widetilde{A}^*$, то

$$\forall\, x\in X\;\; <x,(I-\widehat{A})^*e_m^*>=<x,(I-A^*)e_m^*-\widetilde{A}^*e_m^*>=$$

$$=-<x,\widetilde{A}^*e_m^*>=-<\widetilde{A}x,e_m^*>=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}<x,\widetilde{e}_k^*>\cdot<\widetilde{e}_k,e_m^*>\overset{m>n}{=}0.$$

Поэтому $(I-\widehat{A})^*e_m^*=0$, т. е. $e_m^*\in Ker\,(I-\widehat{A}^*)$, что в силу первой теоремы Фредгольма противоречит (32.2).

4. Таким образом, $dim(Ker\,(I-A))\geqslant dim(Ker\,(I-A^*))$, поэтому и $dim(Ker\,(I-A^*))\geqslant dim(Ker\,(I-A^{**}))$.

Но $dim(Ker\,(I-A^{**}))\geqslant dim(Ker\,(I-A))$ в силу утверждения 27.4, тем самым $dim(Ker\,(I-A))=dim(Ker\,(I-A^*))$. ■

Теорема 32.3 (третья теорема Фредгольма).

1. *Для того чтобы* (1) *имело решение при данном* y, *необходимо и достаточно, чтобы для любого решения уравнения* ($1^{*\circ}$) — z^* *выполнялось соотношение* $<\,y,z^*\,>=0$, *т. е.* $Im\,(I-A)={}^\perp(Ker\,(I-A^*))$.

2. *Для того чтобы* (1^*) *имело решение при данном* y^*, *необходимо и достаточно, чтобы для любого решения уравнения* (1°) — z *выполнялось соотношение* $<z,y^*>=0$, *т. е.* $Im\,(I-A^*)=(Ker\,(I-A))^\perp$.

Доказательство. Поскольку в силу теоремы 31.7 подпространства $Im\,(I-A)$ и $Im\,(I-A^*)$ замкнуты, то первое утверждение рассматриваемой теоремы — это теорема 28.4.3, а второе — теорема 28.4.6. ■

33. Нётеровы и фредгольмовы операторы

Утверждение 33.1. *Пусть X — нормированное пространство, а X_1 — его подпространство. Тогда*

$$||\widetilde{x}||_f := \inf\{||\overline{x}|| : \overline{x} \in \widetilde{x} := x + X_1\} \;-$$

норма на линейном пространстве X/X_1.

Определение. $< X/X_1, ||\cdot||_f >$ называется *фактор-пространством нормированного пространства X по подпространству X_1.*

Утверждение 33.2. *Если X — банахово пространство, а X_1 — его подпространство, то X/X_1 тоже банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\pi : X \to X/X_1$ — каноническое отображение, т. е. $\pi(x) := \widetilde{x} = x + X_1$. Отображение $\pi(\cdot)$ линейно, сюръективно, непрерывно и $||\pi(x)||_f \leqslant ||x||$.

Пусть $\{\widetilde{x}_n\}$ — фундаментальная последовательность в X/X_1. Тогда $\exists\{\widetilde{x}_{n_k}\};\ ||\widetilde{x}_{n_k} - \widetilde{x}_{n_{k+1}}||_f < 2^{-k}$.

По определению нормы в X/X_1

$$\exists\{x_k\} \subset X \ :\ \pi(x_k) = \widetilde{x}_{n_k} - \widetilde{x}_{n_{k+1}} \wedge ||x_k|| < 2^{-k} \Longrightarrow$$

$x_0 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. Так как

$$\pi(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty}\pi(x_k) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}(\widetilde{x}_{n_k} - \widetilde{x}_{n_{k+1}}) = \lim_{m\to\infty}(\widetilde{x}_{n_1} - \widetilde{x}_{n_{m+1}}),$$

то $\{\widetilde{x}_{n_k}\}$ сходится $\Longrightarrow \{\widetilde{x}_n\}$ сходится. ■

Утверждение 33.3. *Пусть X — нормированное пространство, а $X \supset X_1$ — линейное многообразие. Если $dim\,(X/X_1) = n \in \mathbb{N}$, то $\exists\, X_0 \ :\ dim(X_0) = n \wedge X = X_0 \oplus X_1$.*

Доказательство. Если $< \widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n >= X/X_1$, то $X_0 = \;=< e_1, \ldots, e_n >$, где $\forall\, k \in \overline{1,n}\ \ e_k \in \widetilde{e}_k$. ■

Утверждение 33.4. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $dim(Y/Im\,A) < \infty$, то $Im\,A$ замкнуто.*

Доказательство. 1. По утверждению 33.3

$$\exists\, Y_1 \ :\ n := dim(Y_1) = dim(Y/Im\,A) :\ Y = Y_1 \oplus Im\,A.$$

Так как Y_1 конечномерно, то Y_1 — подпространство.

2. Рассмотрим линейный оператор $\widetilde{A} : (X/Ker\,A) \to Y$, определенный формулой $\widetilde{A}(\pi(x)) = Ax$, где $\pi : X \to X/Ker\,A$ — каноническое отображение. Оператор $\widetilde{A}$ определен корректно ($\pi(x_1) = \pi(x_2) \Longrightarrow A(x_1 - x_2) = 0$), $Im\,\widetilde{A} = Im\,A$ и $||\widetilde{A}|| \leqslant ||A||$. Отметим, что в силу утверждения 33.2 $X/Ker\,A$ — банахово пространство.

3. Рассмотрим линейный оператор $\widehat{A} : (X/Ker\,A) \times Y_1 \to Y$, определенный формулой $\widehat{A}(\widetilde{x}, y_1) = \widetilde{A}\widetilde{x} + y_1$.

Тогда $\widehat{A}$ — непрерывная биекция, а по теореме Банаха о непрерывности обратного оператора $\widehat{A}$ — гомеоморфизм. Поэтому $Im\,A = \widehat{A}(X_1 \times \{0\})$ замкнуто. ■

Определение. Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то линейное пространство $Y/Im\,A$ называется *коядром оператора A* и обозначается следующим образом: $Coker\,A$.

Утверждение 33.5. *Пусть X — нормированное пространство, X_1, X_2 — его подпространства, $X = X_1 \oplus X_2$ и $dim(X_1) = n$. Тогда $dim(X_2^{\perp}) = n$.*

Доказательство. Пусть $< e_1, \dots, e_n >= X_1$. Тогда в силу следствия 5 теоремы Хана — Банаха $\forall\, i \in \overline{1,n}\ \exists\, e_i^* \in X^*$:

$$< e_i, e_i^* >= 1 \land e_i^* \in (X_2 \cup < \{\, e_k \,\}\Big|_1^n \setminus \{e_i\} >)^{\perp}.$$

Пусть $x^* \in (X_2)^{\perp}$, а $\widehat{x}^* := \sum\limits_{m=1}^{n} < e_m, x^* > e_m^* \in (X_2)^{\perp}$. Тогда

$$\forall\, x \in X\, \exists\, !\, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\ :\ x = x_1 + x_2 \Longrightarrow$$

$$< x_1 + x_2, \widehat{x}^* >=< x_1, \widehat{x}^* >=< \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, \widehat{x}^* >=$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (< e_k, x^* > - \sum_{m=1}^{n} < e_m, x^* > \cdot < e_k, e_m^* >) = 0,$$

т. е. $\widehat{x}^* = 0$. Поэтому $x^* = \sum\limits_{m=1}^{n} < e_m, x^* > e_m^*$. ■

Теорема 33.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $dim(Ker\, A) = n$, а $dim(Coker\, A) = m$, то $dim(Ker\, A^*) = m$, а $dim(Coker\, A^*) = n$.*

Доказательство. 1. Так как $dim(Coker\, A) = m$, то по утверждению 33.4 $Im\, A$ замкнуто $\overset{\text{утв. 33.3}}{\Longrightarrow}$

$$Y = Y_1 \oplus Im\, A \land dim(Y_1) = m \overset{\text{утв. 33.5}}{\Longrightarrow} (Im\, a)^{\perp} \cong Y_1.$$

Но по теореме 28.4 $(Im\, A)^{\perp} = Ker\, A^* \Longrightarrow dim(Ker\, A^*) = m$.

2. Так как $Im\, A$ замкнуто, то по теореме 28.4 $Im\, A^*$ тоже замкнуто и $(Ker\, A)^{\perp} = Im\, A^*$.

Пусть $\{\, e_1, \dots, e_n \,\}$ — нормированный базис $Ker\, A$, а $\{\, e_1^*, \dots, e_n^* \,\}$ — дуальная к нему система. Тогда

$$\forall\, x^* \in X^*\, \forall\, x \in Ker\, A\ \ < \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, x^* - \sum_{m=1}^{n} < e_k, x^* > e_k^* >= 0,$$

т. е. $x^* - \sum\limits_{m=1}^{n} < e_k, x^* > e_k^* \in (Ker\, A)^{\perp} = Im\, A^* \Longrightarrow \pi(x^*) \in < \pi(e_1^*), \dots, \pi(e_n^*) >$, где $\pi(\cdot)$ — каноническое отображение X^* на $X^*/Im\, A^*$, т. е. $\{\, \pi(e_1^*), \dots, \pi(e_n^*) \,\}$ — базис в $Coker\, A^*$. ■

Определения. 1. Пусть X, Y — нормированные пространства. Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ называется *нётеровым* (или *оператором с индексом*), если $Ker\, A$ и $Coker\, A$ конечномерны.

2. *Индексом* нётерова оператора называется величина

$$ind(A) := dim(Ker\, A) - dim(Coker\, A). \qquad (33.1)$$

3. Нётеров оператор называется *фредгольмовым*, если его индекс равен нулю.

Утверждение 33.6. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Если оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ нётеров, то и A^* нётеров. При этом*

$$ind(A^*) = -ind(A).$$

Действительно, это следует из теоремы 33.1. ■

Утверждение 33.7. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Если $Im\, A$ замкнуто, то $dim(Coker\, A) < \infty \Longleftrightarrow dim(Ker\, A^*) < \infty$. При этом $dim(Coker\, A) = dim(Ker\, A^*)$.

Пример 33.1. Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, то A фредгольмов.

Пример 33.2. Если X, Y — банаховы пространства и A из $comp\mathcal{L}(X,Y)$, то $(I - A)$ фредгольмов.

Утверждение 33.8. *Если X, Y, Z — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$ и A и B нётеровы, то и BA нётеров. При этом*

$$ind(BA) = ind(A) + ind(B).$$

Утверждение 33.9. *Если X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in comp\mathcal{L}(Y,Z)$ и A нётеров, то и $A+B$ нётеров. При этом*

$$ind(A+B) = ind(A).$$

Теорема 33.2. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ нётеров.*

1. *Уравнение $Ax = y$ разрешимо при любых $y \in Y$ тогда и только тогда, когда уравнение $A^*y^* = 0$ имеет только нулевые решения,*

2. *Уравнение $A^*y^* = x^*$ разрешимо при любых $x^* \in X^*$ тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = 0$ имеет только нулевые решения.*

3. *Для того чтобы уравнение $Ax = y$ имело решение при данном $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения уравнения $A^*y^* = 0$ выполнялось соотношение $< y, y^* >= 0$.*

4. *Для того чтобы уравнение $A^*y^* = x^*$ имело решение при данном $x^* \in X^*$, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения уравнения $Ax = 0$ выполнялось соотношение $< x, x^* >= 0$.*

Замечания. 1. $dim(Ker\,A)$ показывает, сколько должно быть дополнительных условий на x, чтобы уравнение $Ax = y$ имело не более одного решения.

2. $dim(Coker\,A)$ показывает, сколько должно быть дополнительных условий на y, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо.

Теорема 33.3 (С. М. Никольский) (критерий фредгольмовости, см. [14, теорема 21.5]). *Пусть X, Y — банаховы пространства и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда $A = B + K$, где $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ непрерывно обратим, а $K \in comp\mathcal{L}(X,Y)$.*

Замечание. В [5], [16], а также в монографиях [9, 17] фредгольмовыми называются все операторы с индексом, а не только операторы с нулевым индексом, как в [8] и [14].

34. Линейные операторы в гильбертовых пространствах

В этом разделе все пространства гильбертовы, а A^* — эрмитово сопряженный к A оператор.

Утверждение 34.1 *Пусть $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.*
1. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, $A^{**} = A$.
2. $(Im\,A)^{\perp} = Ker\,A^*$, $(Ker\,A)^{\perp} = \overline{Im\,A^*}$.

Утверждение 34.2 *Если $A \in \mathcal{L}(H)$, то*

$$H = Ker\,A \oplus \overline{Im\,A^*} = Ker\,A^* \oplus \overline{Im\,A}.$$

Определение. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, т. е. $\forall\, x, y \in H$ $(Ax,\, y) = (x, Ay)$.

Теорема 34.1 *Если $A \in \mathcal{L}(H)$ и $A^* = A$, то*
1. $\forall\, x \in H$ $(Ax, x) \in \mathbb{R}$.
2. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. $\boxed{2}$. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\beta \neq 0$.
1. Покажем, что $Ker\,(A - \lambda I) = \{0\}$.
Если $(A - \lambda I)x_0 = 0$, то $Ax_0 = \lambda x_0$. Тогда

$$\lambda ||x_0||^2 = (\lambda x_0, x_0) = (Ax_0, x_0) = (x_0, Ax_0) = (x_0, \lambda x_0) = \overline{\lambda} ||x_0||^2.$$

Поэтому $x_0 = 0$.
2. Покажем, что $Im\,(A - \lambda I)$ замкнуто.

$$\forall\, x \in H \;\; ||(A - \lambda I)x||^2 = ((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x) =$$

$$= ||(A-\alpha I)x||^2+||i\beta x||^2-((A-\alpha I)x,i\beta x)-(i\beta x,(A-\alpha I)x) =$$
$$= ||(A-\alpha I)x||^2+||i\beta x||^2 \geqslant \beta^2||x||^2.$$

Итак, $\forall\, x \in H$ $||(A-\lambda I)x|| \geqslant |\beta|\cdot||x||$, поэтому в силу утверждения 28.5 $Im\,(A-\lambda I)$ замкнуто.

3. Поскольку $\overline{\lambda}\notin\mathbb{R}$, то

$$H = Ker\,(A-\overline{\lambda}I)\oplus\overline{Im\,(A^*-\overline{\lambda}I)^*} = \{0\}\oplus Im\,(A-\lambda I),$$

т. е. $Im\,(A-\lambda I)=H$. Таким образом, $(A-\lambda I)$ — непрерывная линейная биекция H на H. Поэтому по теореме Банаха об обратном отображении (с. 117) $(A-\lambda I)^{-1}\in\mathcal{L}(H)$, т. е. $\lambda\in\rho(A)$. ■

Следствие. *Пусть* $A\in\mathcal{L}(H)$, $A^*=A$, $Ae_1=\lambda_1e_1$, $Ae_2 = \lambda_2e_2$ *и* $\lambda_1\neq\lambda_2$. *Тогда* $e_1\perp e_2$.

Теорема 34.2 (о норме самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве). *Если* $A\in\mathcal{L}(H)$ *и* $A^*=A$, *то* $||A|| = \sup\limits_{||x||\leqslant1}|(Ax,x)|$.

Доказательство. 1. В силу неравенства Коши — Буняковского и определения нормы линейного оператора

$$\alpha := \sup_{||x||\leqslant1}|(Ax,x)| \leqslant \sup_{||x||\leqslant1}(||Ax||\cdot||x||)\leqslant||A||.$$

2. Пусть $x\neq0$, тогда

$$|(Ax,x)| = ||x||^2|(A(x/||x||),x/||x||)|\leqslant\alpha||x||^2.$$

3. Пусть $\lambda>0$. Тогда

$$4||Ax||^2 =$$
$$= (A(\lambda x+\lambda^{-1}Ax),\lambda x+\lambda^{-1}Ax)-(A(\lambda x-\lambda^{-1}Ax),\lambda x-\lambda^{-1}Ax) \overset{2}{\leqslant}$$
$$\leqslant \alpha||\lambda x+\lambda^{-1}Ax||^2+\alpha||\lambda x-\lambda^{-1}Ax||^2 = 2\alpha(\lambda^2||x||^2+\lambda^{-2}||Ax||^2).$$

Если $Ax\neq0$, то минимум в последнем выражении достигается при $\lambda^2 = ||Ax||/||x||$ и равен $4\alpha||Ax||\cdot||x||$. Поэтому $||Ax||^2\leqslant\alpha||Ax||\cdot||x||$, т. е. $||Ax||\leqslant\alpha||x||$, тем самым $||A||\geqslant\alpha$. ■

Следствие. *Если* $A\in\mathcal{L}(H_1,H_2)$, *то* $||A||^2=||A^*A||$.

Доказательство. Поскольку $A^*A\in\mathcal{L}(H_1)$ и является самосопряженным, то

$$||A||^2 = \sup_{||x||\leqslant1}|(Ax,Ax)| = \sup_{||x||\leqslant1}|(A^*Ax,x)|. \ ■$$

Теорема 34.3 (норма компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве). *Если* $A\in comp\mathcal{L}(H)$ *и* $A^*=A$, *то*

$$\exists\,\lambda\in\mathbb{R}\,\exists\,x_0\neq0\ (Ax_0=\lambda x_0\wedge|\lambda|=||A||),\ \textit{т. е.}$$
$$||A|| = \max|\sigma_d(A)|.$$

Доказательство. 1. Для $A=0$ утверждение теоремы тривиально.

2. Пусть $A\neq0$. По предыдущей теореме

$$||A|| = \sup_{||x||\leqslant1}|(Ax,x)|.$$

Поэтому $\exists\,\{\,x_n\,\}\subset B[0,1]\,:\,|(Ax_n,x_n)|\to||A||$.

Так как $B[0,1]$ в гильбертовом пространстве слабо секвенциально компактен (теорема 26.6), то

$$\exists\,\{\,x_{n_k}\,\}\ \exists\,x_0\in B[0,1]\ :\ x_{n_k}\xrightarrow{сл}x_0. \tag{34.1}$$

В силу компактности A отсюда следует, что $Ax_{n_k}\to Ax_0$. Поэтому $(Ax_{n_k},x_{n_k})\to(Ax_0,x_0) =: \lambda\in\mathbb{R}$, $x_0\neq0$ и $|\lambda|=||A||$. В силу вещественности λ имеем $||A||^2=\lambda^2$.

3. Покажем, что $Ax_0=\lambda x_0$. Поскольку

$$0\leqslant||Ax_{n_k}-\lambda x_{n_k}||^2 = ||Ax_{n_k}||^2+\lambda^2||x_{n_k}||^2-2\lambda(Ax_{n_k},x_{n_k})\leqslant$$
$$\leqslant 2||A||^2-2\lambda(Ax_{n_k},x_{n_k})\to0,$$

то $Ax_{n_k}-\lambda x_{n_k}\to0$. Отсюда в силу (34.1) получим, что $Ax_{n_k}\xrightarrow{сл}\lambda x_0$, поэтому $Ax_0=\lambda x_0$. ■

Следствие. *Если* $A\in comp\mathcal{L}(H)$ *и* $A^*=A$, *то* $\sigma_d(A)\neq\varnothing$.

Задание 34.1. Найдите норму оператора $A \in \mathcal{L}(L_2(0;1))$, заданного формулой $(Ax(\cdot))(t) := \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$.

Замечания. 1. Оператор из задания 31.1 показывает, что у компактного оператора дискретный спектр может быть пустым.

2. Оператор $A \in \mathcal{L}(L_2(0;1))$, заданный формулой $(Ax(\cdot))(t) := t \cdot x(t)$, является самосопряженным оператором с пустым дискретным спектром.

Теорема 34.4 (Гильберт — Шмидт) (о существовании в сепарабельном гильбертовом пространстве ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного и компактного оператора).

Если $A \in comp\mathcal{L}(H)$, H — сепарабельное гильбертово пространство и $A^* = A$, то существует $\{\, e_n \,\}$ — ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.

Доказательство. 1. Для $A = 0$ утверждение теоремы тривиально. Пусть $A \neq 0$.

2. По предыдущей теореме

$$\exists\, \lambda_1 \,\exists\, e_1 \in H \;:\; |\lambda_1| = ||A|| \wedge ||e_1|| = 1 \wedge Ae_1 = \lambda_1 e_1.$$

Рассмотрим $H_1 := \,< e_1 >^{\perp}$. Тогда

$$\forall\, x \in H_1 \;\; (Ax, e_1) = (x, Ae_1) = (x, \lambda_1 e_1) = 0.$$

Тем самым $A(H_1) \subset H_1$, и можно рассмотреть $A_1 := A\Big|_{H_1}$ — сужение оператора A на H_1 — и этот оператор тоже является компактным и самосопряженным, действующим в сепарабельном гильбертовом пространстве H_1. Поэтому

$$\exists\, \lambda_2 \,\exists\, e_2 \in H_1\,;\; |\lambda_2| = ||A_1|| \wedge ||e_2|| = 1 \wedge Ae_2 = A_1 e_2 = \lambda_2 e_2.$$

Рассмотрим $H_2 := \,< e_1, e_2 >^{\perp}$. Опять $A_1(H_2) \subset H_2$, и можно рассмотреть $A_2 := A_1\Big|_{H_1} = A\Big|_{H_1}$, и т. д.

3. Если в результате этого процесса при некотором $\widetilde{n}$ получим $A_{\widetilde{n}} = 0$, то $H_{\widetilde{n}} = Ker\,A$ и $H = \,< e_1, \ldots, e_{\widetilde{n}} > \oplus H_{\widetilde{n}}$.

Добавив к $\{e_1, \ldots, e_{\widetilde{n}}\}$ ортонормированный базис гильбертова пространства $H_{\widetilde{n}}$, получим требуемый базис исходного пространства H.

4. Если $\forall\, n \;\; A_n \neq 0$, то по построению $\forall\, n \;\; |\lambda_{n+1}| \leqslant |\lambda_n|$ и в силу теоремы 31.6 $|\lambda_n| \to 0$. Рассмотрим $H_\infty := \overline{\{\, e_n \,\}}^{\perp}$. Если $x \in H_\infty$, то $\forall\, n \;\; (Ax, e_n) = (x, Ae_n) = 0$. Поэтому $A(H_\infty) \subset H_\infty$. При этом $\forall\, n \;\; ||A\Big|_{H_\infty}|| \leqslant |\lambda_n| \to 0$, т. е. $A\Big|_{H_\infty} = 0$. Тем самым $H_\infty = Ker\,A$.

Добавив к $\{\, e_n \,\}$ ортонормированный базис гильбертова пространства H_∞, получим требуемый базис исходного пространства H. ■

Замечание. В силу теоремы Гильберта — Шмидта в сепарабельном гильбертовом пространстве H для компактного самосопряженного оператора A справедливо представление

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot E_n, \tag{34.2}$$

где $\{\, \lambda_n \,\}$ — собственные числа оператора A, а E_n — операторы ортогонального проектирования на одномерные подпространства $< e_n >$, порожденные элементами ортонормированного базиса $\{\, e_n \,\}$ из собственных векторов, соответствующих собственным числам $\{\, \lambda_n \,\}$.

Представление (34.2) называется *спектральным разложением оператора A*.

Аналогичное разложение, но с заменой суммы ряда на интеграл, справедливо и для самосопряженных операторов, не являющихся компактными: $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\, E_\lambda$, где E_λ — некоторая ортопроекционно значная функция (подробности см., напр., в [7, гл. 7, § 5] или [12, гл. 4, § 2, п. 11]).

35. Интегральные уравнения

Здесь мы рассмотрим *интегральные уравнения Фредгольма*

$$x(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds + y(t) \tag{35.1}$$

и *Вольтерра*

$$x(t) = \int_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds + y(t). \tag{35.2}$$

Замечание. Интегральные операторы из этих уравнений при условии непрерывности ядер являются компактными операторами в $C[a;b]$ (теоремы 31.1 и 31.2).

Теорема 35.1. *Пусть* $\mathcal{K}(\cdot,\cdot) \in L_2((a;b)^2)$. *Тогда*

1. $\forall\, x(\cdot) \in L_2(a;b)$ $(Ax(\cdot))(t) := \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds \in L_2(a;b)$.
2. $||A||^2 \leqslant \int_a^b\int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,ds\,dt = ||\mathcal{K}||^2_{L_2((a;b)^2)}$.
3. $A \in comp\mathcal{L}(L_2(a;b))$.

Доказательство. $\boxed{1}$. В силу теоремы Фубини

$$\int_a^b\int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,ds\,dt = \int_a^b dt\int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,ds = \int_a^b ds\int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,dt$$

и, в частности, для почти всех t из $[a;b]$ $\mathcal{K}(t,\cdot) \in L_2(a;b)$. Поэтому $\mathcal{K}(t,\cdot)x(\cdot) \in L_2(a;b)$ и $(Ax(\cdot))(t) := \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds$ определено почти для всех t.

Поскольку в силу неравенства Коши — Буняковского (теорема 1.1) $|(Ax(\cdot))(t)|^2 \leqslant \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2\,ds \leqslant$ $\leqslant ||x||^2 \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,ds$, то $|(Ax(\cdot))(t)|^2$ интегрируема по Лебегу на $[a;b]$, т. е. $Ax(\cdot) \in L_2(a;b)$.

$\boxed{2}$. В силу определения нормы в $L_2(a;b)$ получим: $||Ax(\cdot)||^2 = \int_a^b \left|\int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds\right|^2 dt \leqslant \int_a^b ||x||^2\,dt \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,ds =$ $= ||x||^2 \int_a^b\int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,ds\,dt$.

$\boxed{3}$. 1. Пусть $\{\, e_n(\cdot)\,\}$ — ортонормированный базис в $L_2(a;b)$. Тогда $\{\, e_n(t)e_m(s)\,\}$ — ортонормированный базис в $L_2((a;b)^2)$. Поэтому $\mathcal{K}(t,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{n,m}e_n(t)e_m(s)$.

2. Пусть $\mathcal{K}_N := \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{n,m}e_n(t)e_m(s)$, а A_N — интегральный оператор с ядром $\mathcal{K}_N$. Тогда $\forall\, x(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n(\cdot)$

$$(A_N x(\cdot))(t) = \int_a^b \left(\sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{n,m}e_n(t)e_m(s)\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m e_m(s)\right) ds =$$

$$= \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{N} e_n(t)\Big(\sum_{m=1}^{N} \alpha_{n,m}e_m(s)\Big)\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m e_m(s)\right) ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} e_n(t)\Big(\sum_{m=1}^{N} \alpha_{n,m}e_m(\cdot),\ \sum_{n=1}^{N} \beta_m e_m(\cdot)\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} e_n(t)\Big(\sum_{m=1}^{N} \alpha_{n,m}\beta_m\Big) \in < e_1(\cdot),\dots,e_N(\cdot) >,$$

т. е. A_N — конечномерный оператор и тем самым компактен.

3. Но $||\mathcal{K}_N - \mathcal{K}||_{L_2((a;b)^2)} \to 0$, поэтому по второй части этой теоремы $||A_N - A|| \to 0$, тем самым в силу теоремы 31.4 $A \in comp\mathcal{L}(L_2(a;b))$. ■

Определение. Интегральный оператор с ядром $\mathcal{K}(\cdot,\cdot)$ из $L_2((a;b)^2)$ называется *оператором Гильберта — Шмидта*.

Замечание. Пусть $\Delta = \{ (t,s) : t \in (a;b) \wedge s \in (0;t) \}$ и $\mathcal{K}(\cdot,\cdot) \in L_2(\Delta^2)$. Рассмотрим $\widetilde{\mathcal{K}}(\cdot,\cdot)$, определенную на $(a;b)^2$ следующим образом: $\widetilde{\mathcal{K}}(t,s) = \mathcal{K}(t,s)$ при $(t,s) \in \Delta$ и $\widetilde{\mathcal{K}}(t,s) = 0$ при $(t,s) \notin \Delta$. Тогда $\widetilde{\mathcal{K}}(\cdot,\cdot) \in L_2((a;b)^2)$ и

$$\forall\, x(\cdot) \in L_2(a;b) \quad \int\limits_a^b \widetilde{\mathcal{K}}(t,s)x(s)\,ds = \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds.$$

Тем самым интегральный оператор Вольтерра тоже является компактным оператором.

Утверждение 35.1. *Если $A \in \mathcal{L}(L_2(a;b))$ — оператор Гильберта — Шмидта с ядром $\mathcal{K}(t,s)$, то A^* — оператор Гильберта — Шмидта с ядром $\mathcal{K}^*(t,s) = \overline{\mathcal{K}(s,t)}$.*

Утверждение 35.2. *Если $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(L_2(a;b))$ — операторы Гильберта — Шмидта с ядрами $\mathcal{K}_1(t,s)$ и $\mathcal{K}_2(t,s)$ соответственно, то $A_2 \cdot A_1$ — оператор Гильберта — Шмидта с ядром $\mathcal{K}(t,s) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_2(t,\xi)\mathcal{K}_1(\xi,s)\,d\xi$ и*

$$||\mathcal{K}||_{L_2((a;b)^2)} \leqslant ||\mathcal{K}_1||_{L_2((a;b)^2)} \cdot ||\mathcal{K}_2||_{L_2((a;b)^2)}.$$

Замечание. К интегральным уравнениям Фредгольма и Вольтерра, как с непрерывными ядрами, так и с суммируемыми с квадратом, применимы все теоремы Фредгольма. Однако их применение к операторам, действующим в $C[a;b]$, затруднительно в силу сложного вида сопряженного оператора.

Теорема 35.2. *Если ядро оператора Вольтерра A ограничено (в случае $L_2((a;b)^2)$, это означает, что существует ограниченная функция, эквивалентная ядру), то некоторая степень $\widetilde{n}$ этого оператора есть сжимающее отображение, т. е. $||A^{\widetilde{n}}|| < 1$.*

Доказательство. 1. Пусть для почти всех $(t,s) \in (a;b)^2$ $|\mathcal{K}(t,s)| \leqslant K$ и $(Ax(\cdot))(t) = \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds$.

Тогда $(A^2x(\cdot))(t) = \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)\left(\int\limits_a^s \mathcal{K}(s,\xi)x(\xi)\,d\xi\right) ds = \int\limits_a^t \left(\int\limits_\xi^t \mathcal{K}(t,s)\mathcal{K}(s,\xi)\,ds\right) x(\xi)\,d\xi$. Таким образом, ядро оператора A^2 равно $\mathcal{K}_2(t,\xi) = \int\limits_\xi^t \mathcal{K}(t,s)\mathcal{K}(s,\xi)\,ds$.

Поэтому $|\mathcal{K}_2(t,\xi)| \leqslant K^2 \cdot (t-\xi)$.

Аналогично $\int\limits_\xi^t \mathcal{K}_2(t,s)\mathcal{K}(s,\xi)\,ds$ есть ядро оператора A^3 и $|\mathcal{K}_3(t,\xi)| \leqslant K^3 \cdot (t-\xi)^2/2$.

Применяя индукцию по степени оператора A, получим, что

$$|\mathcal{K}_n(t,\xi)| \leqslant \frac{K^n \cdot (t-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{K^n \cdot (b-a)^{n-1}}{(n-1)!}. \qquad (35.3)$$

2. В силу теоремы 35.1 в пространстве $\mathcal{L}(L_2(a;b))$

$$||A^n|| \leqslant ||\mathcal{K}_n(\cdot,\cdot)||_{C(\Delta)} \overset{(35.3)}{\leqslant} \frac{K^n \cdot (b-a)^n}{(n-1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. В пространстве $C[a;b]$ $\forall\, t \in [a;b]$

$$|(A^n x(\cdot))(t)| = \left|\int\limits_a^t \mathcal{K}_n(t,s)x(s)\,ds\right| \leqslant ||x(\cdot)||_{C[a;b]} \int\limits_a^t |\mathcal{K}_n(t,s)|\,ds \overset{(35.3)}{\leqslant}$$

$$\leqslant ||x(\cdot)||_{C[a;b]} \frac{K^n \cdot (b-a)^n}{(n-1)!}.$$

Тем самым $||A^n|| \leqslant \dfrac{K^n \cdot (b-a)^n}{(n-1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Следствие. *Интегральное уравнение Вольтерра с ограниченным ядром всегда имеет единственное решение.*

Действительно, это следует из первой теоремы Фредгольма и следствия теоремы Банаха о сжимающем отображении (утверждение 7.4). ■

36. Некоторые методы решения интегральных уравнений

Уравнения с вырожденным ядром

Пусть $\mathcal{K}(t,s) = \sum\limits_{k=1}^{n} \Phi_k(t)\Psi_k(s)$, где функции $\{\,\Phi_k(t)\,\}$ линейно независимы. Тогда уравнение (35.1) имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(t) \int_a^b \Psi(s)x(s)\,ds + y(t).$$

Но $\int\limits_a^b \Psi(s)x(s)\,ds \in \mathbb{P}$, поэтому решение $x(\cdot)$ имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_k(t).$$

Подставив это представление для решения в уравнение, получим для $\{\,\alpha_k\,\}$ систему линейных уравнений.

Уравнение Вольтерра вида

$$x(t) = y(t) + f(t)\int_a^t g(s)x(s)\,ds$$

В этом случае нахождение решения сводится к нахождению решения следующей задачи Коши:

$$\left(\frac{x-y(t)}{f(t)}\right)' = g(t)x,\ x(a) = y(a).$$

Нахождение решений в виде ряда

Уравнение $x = \lambda Ax + y$ в случае обратимости оператора $I - \lambda A$ равносильно соотношению $x = (I-\lambda A)^{-1}y$. Поэтому если $||\lambda A|| < 1$, то $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n y$.

Теорема 36.1. *Если $A \in \mathcal{L}(L_2(a;b))$ — оператор Гильберта — Шмидта и $|\lambda| \leqslant ||\mathcal{K}||^{-1}_{L_2((a;b)^2)}$, где $\mathcal{K}(\cdot,\cdot)$ — ядро оператора A, то существует оператор Гильберта — Шмидта $\Gamma(\lambda)$ такой, что $(I-\lambda A)^{-1} = I + \Gamma(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}_n(\cdot,\cdot)$ — ядро оператора A^n, а $K := ||\mathcal{K}||_{L_2((a;b)^2)}$. В силу утверждения 35.2 $||\mathcal{K}_n||_{L_2((a;b)^2)} \leqslant K^n$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}_n(\cdot,\cdot)$ сходится в $L_2((a;b)^2)$ к некоторой функции $\mathcal{K}_\lambda(\cdot,\cdot)$, которая и есть ядро оператора $\Gamma(\lambda)$. ■

Замечание. Так как $(I - \lambda A) = \lambda(\lambda^{-1}I - A)$ и A компактен, то $(I-\lambda A)^{-1}$ не существует лишь при счетном числе значений λ, а построенный нами ряд сходится лишь при $|\lambda| < K^{-1}$. Фредгольм получил интегральные формулы, дающие решение уравнения $(I-\lambda A)x = y$ сразу для всех $\lambda \in \rho(A)$.

Решение уравнения Фредгольма в $L_2(a;b)$ в случае оператора Гильберта — Шмидта с симметричным ядром

Если $\forall\, t,s \in [a;b]\ \mathcal{K}(t,s) = \overline{\mathcal{K}(s,t)}$, то соответствующий оператор Гильберта — Шмидта является самосопряженным и компактным. Поэтому для него существует ортонормированный базис из собственных векторов $\{\,e_n\,\} \cup \{\,e'_n\,\}$, где $\{\,e_n\,\}$ — собственные вектора, соответствующие ненулевым собственным значениям, а $\{\,e'_n\,\}$ — базис $Ker\,A$.

Тогда для $\{\,\alpha_n\,\}$ и $\{\,\alpha'_n\,\}$ — координат решения уравнения $x = Ax + y$ в данном базисе — $x = \sum\limits_n \alpha_n e_n + \sum\limits_n \alpha'_n e'_n$ получим систему линейных уравнений, из которой следует, что

$$\alpha_n = y_n/(1-\lambda_n),\ \text{а}\ \alpha'_n = y'_n,\ \text{где}\ y = \sum_n y_n e_n + \sum_n y'_n e'_n.$$

37. Применение теории операторов в гильбертовых пространствах к решению уравнений в частных производных

Применение теоремы Гильберта — Шмидта

Рассмотрим линейный оператор A, действующий в $L_2(a;b)$ и определенный следующим образом: $D(A):=\{y(\cdot)\ :\ y(\cdot)$ дважды дифференцируема на $[a;b]$ и $y(a)=y(b)=0\}$, $(Ay(\cdot))(t):=(p(t)y'(t))'$, где $p(\cdot)\in C^1[a;b]$ и $\forall\, t\in[a;b]\ p(t)>0$.

Рассмотрим уравнение $Ay=x$. Если $x(\cdot)\in C[a;b]$, то

$$y(t)=-\frac{P(t)}{P(b)}\int_a^b(P(b)-P(s))x(s)\,ds+\int_a^t(P(t)-P(s))x(s)\,ds\ =:$$

$$(Bx(\cdot))(t),\ \text{где}\ P(t)=\int_a^t\frac{d\tau}{p(\tau)}.$$

В частности, это показывает, что A обратим и обратный к A на непрерывных функциях из $L_2(a;b)$ совпадает с оператором B.

Но оператор $B\in comp\mathcal{L}(L_2(a;b))$ и самосопряжен. Поэтому по теореме Гильберта — Шмидта (с. 150) существует $\{\,e_n(\cdot)\,\}$ — ортонормированный базис пространства $L_2(a;b)$, состоящий из собственных векторов оператора B.

Но $\forall\, x(\cdot)\in L_2(a;b)\ \ Bx(\cdot)$ — непрерывная функция, поэтому если $\mu_n e_n(\cdot)=Be_n(\cdot)$, то $e_n(\cdot)\in D(A)\Longrightarrow \mu_n Ae_n(\cdot)=e_n(\cdot)$, или $Ae_n(\cdot)=\lambda_n e_n(\cdot)$, где $\lambda_n=1/\mu_n$. Поэтому $e_n(\cdot)$ удовлетворяет краевой задаче

$$(p(t)e_n')'=\lambda_n e_n,\ \ e_n(a)=e_n(b)=0. \tag{37.1}$$

Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 37.1. *Если $p(\cdot)\in C^1[a;b]$ и $\forall\, t\in[a;b]\ p(t)>0$, то существует $\{\,e_n(\cdot)\,\}$ — ортонормированный базис пространства $L_2(a;b)$ такой, что при любом n функция $e_n(\cdot)$ является решением краевой задачи* (37.1) *при соответствующем λ_n.*

Определение. Задача о нахождениии ортонормированного базиса $\{\,e_n(\cdot)\,\}$ пространства $L_2(a;b)$ и $\{\,\lambda_n\,\}$, удовлетворяющих краевой задаче (37.1), называется *задачей Штурма — Лиувилля.*

Теперь, решая задачу

$$\begin{array}{ll} u_t'(t,x)=(p(x)u_x'(t,x))_x', & t\in(0;+\infty),\ x\in(a;b),\\ u(t,a)=u(t,b)=0, & t\in(0;+\infty),\\ u(0,x)=\varphi(x), & x\in(a;b), \end{array}$$

можно на нее смотреть как на задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $u'=Au$, $u(0)=\varphi$ в гильбертовом пространстве $L_2(a;b)$.

Взяв ортонормированный базис $\{\,e_n(\cdot)\,\}$ пространства $L_2(a;b)$ из решений задачи Штурма — Лиувилля (37.1), можно искать решение исходной задачи в виде ряда $u(t,\cdot)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)e_n(\cdot)$. Если $\varphi(\cdot)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n e_n(\cdot)$, то для коэффициентов $u_n(t)$ разложения $u(t,\cdot)$ по $\{\,e_n(\cdot)\,\}$ получим следующие задачи Коши: $u_n'(t)=\lambda_n u_n(t)$, $u_n(0)=\varphi_n$. Откуда $u_n(t)=\varphi_n e^{\lambda_n t}$. Таким образом,

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{\lambda_n t}e_n(x). \tag{37.2}$$

Отметим, что $\lambda_n=(Be_n.e_n)=\int_a^b(p(x)e_n(x)')'e_n(x)\,dx\ =$

$$=\ p(x)e_n(x)'e_n(x)|_a^b-\int_a^b p(x)|e_n(x)'|^2\,dx\ =$$

$$=\ -\int_a^b p(x)|e_n(x)'|^2\,dx\leqslant 0.$$

В общем случае сумма ряда из (37.2) не является классическим решением исходной задачи, поскольку $u(t,x)$ может оказаться не дифференцируемой дважды по переменной x, если функция $\varphi(x)$ будет недостаточно гладкой или не согласованной с граничными условиями. Но в силу единственности классического решения, если оно есть, то оно совпадает с (37.2).

Если уравнение в частных производных имеет вид

$$q(x)u'_t(t,x) = (p(x)u'_x(t,x))'_x,$$

$$q(\cdot) \in C[a;b] \text{ и } \forall\, x \in [a;b]\;\; q(x) > 0,$$

то можно ввести новое гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v) = \int\limits_a^b q(x)u(x)v(x)\,dx.$$

Именно в этом гильбертовом пространстве соответствующий оператор будет самосопряженным.

Применение теоремы Лакса — Мильграма

Теорема 37.2 (Лакс — Мильграм) ([23]).

Пусть $\pi(\cdot,\cdot)$ — билинейная (полуторалинейная) форма на вещественном (комплексном) гильбертовом пространстве H такая, что выполнены условия

$LM1.\ \exists\, C > 0\, \forall\, x,y \in H\;\; |\pi(x,y)| \leqslant C||x||\cdot||y||,$

$LM2.\ \exists\, c > 0\, \forall\, x \in H\;\; |\pi(x,x)| \geqslant c||x||^2.$

Тогда $\forall\, f^* \in H^*\, \exists\, y_0 \in H\, \forall\, x \in H\;\; \pi(x,y_0) =< x, f^* >.$

Доказательство. 1. Отметим прежде всего, что в силу теоремы 22.2 $\exists\, f \in H\, \forall\, x \in H\;\; < x, f^* >= (x,f)$.

2. В силу условия $LM1$ $\forall\, y \in H\;\; \pi(\cdot,y) \in H^*$, поэтому в силу теоремы 22.2 $\exists\, B : H \to H\, \forall\, x,y \in H\;\; \pi(x,y) = (x,By)$ и B линейный. Таким образом, утверждение теоремы эквивалентно разрешимости уравнения $By_0 = f$.

3. Так как $||By|| = \sup\limits_{||x||\leqslant 1} |(x,By)| = \sup\limits_{||x||\leqslant 1} |\pi(x,y)| \overset{LM1}{\leqslant}$ $\leqslant \sup\limits_{||x||\leqslant 1} |C||x||\cdot||y||| \leqslant C||y||$, то $B \in \mathcal{L}(H)$ и $||B|| \leqslant C$.

4. В силу условия $LM2$

$$\forall\, y \in H\;\; ||By||\cdot||y|| \geqslant |(y,By)| = |\pi(y,y)| \geqslant c||y||^2,$$

поэтому $\forall\, y \in H\;\; ||By|| \geqslant c||y||$ и тем самым $Ker\, B = \{0\}$ и в силу утверждения 28.5 $Im\, B$ замкнуто.

5. Поскольку $|(B^*y,y)| = |(y,By)|$, то и $Ker\, B^* = \{0\}$. Тем самым $H = (Ker\, B^*)^\perp = Im\, B$. Поэтому уравнение $By_0 = f$ разрешимо и даже единственным образом. ■

Замечания. 1. Отметим, что в силу теоремы Банаха об обратном отображении оператор B из предыдущей теоремы непрерывно обратим, поэтому y_0 зависит от f^* непрерывным образом.

2. Если форма $\pi(\cdot,\cdot)$ такова, что $\pi(x,y) = \overline{\pi(y,x)}$, то доказательство теоремы Лакса – Мильграма сводится к применению теоремы о виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, поскольку на H в качестве нового скалярного произведения, порождающего норму, эквивалентную исходной, можно взять $\pi(x,y)$.

Рассмотрим задачу об отыскании решения уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a_0(x)u = f(x),\;\; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \qquad (37.3)$$

Здесь Ω — область с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, а $a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$.

Если $v(\cdot)$ — непрерывно дифференцируема в $\overline{\Omega}$ и $v\big|_{\partial\Omega} = 0$, то, умножив равенство (37.3) на v, проинтегрировав по Ω и применив формулу Грина

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big)v(x)\,dx \;=$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\tfrac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} v(x)\tfrac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,dx,$$

получим

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx+\int_{\Omega} a_0(x)u(x)v(x)\,dx= \\ =\int_{\Omega} f(x)v(x)\,dx. \tag{37.4}$$

Таким образом, всякое решение уравнения (37.3) удовлетворяет (37.4) при любом $v(\cdot)$ из указанного класса.

Задача о нахождении $u(\cdot)$ такого, что для любого $v(\cdot)$ из указанного класса справедливо равенство (37.4), "слабее" задачи о нахождении решения уравнения (37.3), так как в (37.4) производные только первого порядка удовлетворяют интегральным соотношениям. Таким образом, задача (37.4) имеет смысл, даже когда эти производные всего лишь измеримы.

Определение. Решение задачи (37.4) называется *слабым решением уравнения* (37.3).

Поскольку новая задача имеет вид $u:\ \forall\, v\, \pi(v,u)=<v,f>$, где $\pi(v,u)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx+\int\limits_{\Omega} a_0(x)u(x)v(x)\,dx$, то ее естественно рассматривать в евклидовом пространстве

$$\widetilde{W}_2^1(\Omega):=\left\langle C^1(\overline{\Omega}),\ ||u||=\int_{\Omega}|u(x)|^2\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2\,dx\right\rangle.$$

К сожалению, $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ не является полным. Поэтому задачу (37.4) рассматривают в $W_2^1(\Omega)$ — пополнение евклидова пространства $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

В $W_2^1(\Omega)$ при условии

$$\exists\, c>0\,\forall\, x\in\overline{\Omega}\,\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n\quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant c||\xi||^2\ \wedge\ a_0(x)\geqslant 0$$

форма $\pi(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лакса — Мильграма, и тем самым у уравнения (37.3) существует слабое решение.

Отметим, что в связи с переходом от $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ к $W_2^1(\Omega)$ у слабого решения уже и первая производная может быть "плохой".

38. Соболевские пространства

Определение. $\widetilde{W}_p^k[a;b]:=<C^k[a;b],||\cdot||_{k,p}>$,

где $|||x(\cdot)||_{k,p}^p:=\sum\limits_{n=0}^{k}||x^{(n)}(\cdot)||_{L_p(a;b)}^p$. Это пространство не является полным. Его пополнение обозначается $W_p^k(a;b)$.

Утверждение 38.1. *При $p=2$ в $\widetilde{W}_2^k(a;b)$ можно ввести скалярное произведение, согласованное с этой нормой,*

$$(x(\cdot),y(\cdot))_k:=\sum_{n=0}^{k}\int_a^b x^{(n)}(t)\overline{y^{(n)}(t)}\,dt.$$

Тем самым $\widetilde{W}_2^k[a;b]$ — евклидово пространство, а $W_2^k(a;b)$ — гильбертово пространство.

Определение. Пространство $W_2^k(a;b)$ еще обозначается через $H^k(a;b)$.

Здесь мы более подробно рассмотрим пространство $H^1(a;b)$ над полем $\mathbb{R}$. Опишем $H^1(a;b)$ в терминах элементов пространства $L_2(a;b)$.

Пусть $x\in H^1(a;b)$. Тогда в силу определения $H^1(a;b)$ (см. конструкцию пополнения — теорема 5.3) x есть класс эквивалентных фундаментальных в $\widetilde{W}_2^1[a;b]$ последовательностей. Пусть $\{\,x_n(\cdot)\,\}$ — представитель этого класса.

В силу неравенства

$$||x_n(\cdot)-x_m(\cdot)||_{1,2}^2=||x_n(\cdot)-x_m(\cdot)||_{0,2}^2+||x'_n(\cdot)-x'_m(\cdot)||_{0,2}^2\geqslant \\ \geqslant\max\{\,||x_n(\cdot)-x_m(\cdot)||_{0,2}^2,||x'_n(\cdot)-x'_m(\cdot)||_{0,2}^2\,\}$$

получим, что последовательности $\{\,x_n(\cdot)\,\}$, $\{\,x'_n(\cdot)\,\}$ фундаментальны в $L_2(a;b)$, поэтому существуют такие $\overline{x}(\cdot)$, $\widehat{x}(\cdot)$ из $L_2(a;b)$, что $x_n(\cdot)\underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow}\overline{x}(\cdot)$ и $x'_n(\cdot)\underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow}\widehat{x}(\cdot)$. При этом элементы $\overline{x}(\cdot)$ и $\widehat{x}(\cdot)$ определяются однозначно по $\{\,x_n(\cdot)\,\}$ (все эквивалентные в $\widetilde{W}_2^1[a;b]$ фундаментальные последовательности будут иметь одни и те же пределы $\overline{x}(\cdot)$ и $\widehat{x}(\cdot)$ в $L_2(a;b)$). Таким образом, каждый элемент из $H^1(a;b)$ однозначно представим парой элементов из $L_2(a;b)$.

Замечание. Если $x(\cdot) \in C^1[a;b]$, то последовательность $\{\, x(\cdot)\,\}_c$ фундаментальна в $\widetilde{W}_2^1[a;b]$, поэтому элемент пространства $H^1(a;b)$, ею определяемый, имеет вид $(x(\cdot); x'(\cdot))$.

Определение. Если $x = (\overline{x}(\cdot); \widehat{x}(\cdot)) \in H_1(a;b)$, то $\widehat{x}(\cdot)$ называется *обобщенной производной элемента* $\overline{x}(\cdot)$ и обозначается "по старому т. е. $\widehat{x}(\cdot) := \overline{x}'(\cdot)$.

Покажем, что обобщенная производная $\overline{x}'(\cdot)$ определяется по $\overline{x}(\cdot)$ однозначно.

Теорема 38.1. *Пусть* $\overline{x}(\cdot), \widehat{x}(\cdot) \in L_2(a;b)$.
$(\overline{x}(\cdot); \widehat{x}(\cdot)) \in H^1(a;b)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b]\ \ (\widehat{x}(\cdot), \varphi(\cdot))_0 = -(\overline{x}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0, \tag{38.1}$$

где $\overset{\circ}{C}{}^1[a;b] := \{\, \varphi(\cdot) \in C^1[a;b] \ :\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0\,\}$, *а* $(\cdot,\cdot)_0$ — *скалярное произведение в* $L_2(a;b)$.

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $\{\, x_n(\cdot)\,\} \subset C^1[a;b]$: $x_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \overline{x}(\cdot)$ и $x_n'(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \widehat{x}(\cdot)$. Но в силу формулы *интегрирования по частям*

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b]\ \ (x_n'(\cdot), \varphi(\cdot))_0 = \int_a^b x_n'(t))\varphi(t)\, dt =$$

$$= -\int_a^b x_n(t))\varphi'(t)\, dt = -(x_n(\cdot), \varphi'(\cdot))_0.$$

Теперь осталось в получившемся равенстве перейти к пределу при $n \to \infty$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. 1. В силу плотности множества $C[a;b]$ в $L_2(a;b)$ найдется $\{\, \widehat{x}_n(\cdot)\,\} \subset C[a;b] : \widehat{x}_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \widehat{x}(\cdot)$.

Пусть $\widetilde{x}_n := \int_a^t \widehat{x}_n(\tau)\, d\tau$. В силу определения $\widetilde{x}_n$ и непрерывности интегрального оператора $\widetilde{x}_n'(\cdot) = \widehat{x}_n(\cdot)$ и $\widetilde{x}_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \widetilde{x}(\cdot) := \int_a^t \widehat{x}(\tau)\, d\tau$. Поскольку в силу формулы *интегрирования по частям* и (38.1)

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b]\ \ (\widetilde{x}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0 = \lim_{n\to\infty} (\widetilde{x}_n(\cdot), \varphi'(\cdot))_0 =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} (\widehat{x}_n(\cdot), \varphi(\cdot))_0 = -(\widehat{x}(\cdot), \varphi(\cdot))_0 \overset{(38.1)}{=} (\overline{x}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0,$$

то

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b]\ \ (\widetilde{x}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0 = (\overline{x}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0. \tag{38.2}$$

2. Возьмем произвольное $\psi(\cdot) \in C[a;b]$. Тогда

$$\varphi(t) := \int_a^t \psi(\tau)\, d\tau - \tfrac{t-a}{b-a} \int_a^b \psi(\tau)\, d\tau \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b] \text{ и}$$

$$\varphi'(\cdot) = \psi(\cdot) - \tfrac{1}{b-a}\, (\psi(\cdot), 1)_0.$$

Тогда в силу (38.2) $\forall\, \psi(\cdot) \in C[a;b]$

$$(\widetilde{x}(\cdot), \psi(\cdot))_0 = (\overline{x}(\cdot) + \alpha, \psi(\cdot))_0, \text{ где } \alpha = \frac{(\widetilde{x}(\cdot), 1)_0 - (\overline{x}(\cdot), 1)_0}{b-a}.$$

Поскольку $C[a;b]$ всюду плотно в $L_2(a;b)$, то $\widetilde{x}(\cdot) = \overline{x}(\cdot) + \alpha$.

Рассмотрим $\{\, x_n(\cdot)\,\} \subset C^1[a;b]$: $x_n(\cdot) := \widetilde{x}_n(\cdot) - \alpha$. Тогда $x_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \overline{x}(\cdot)$ и $x_n'(\cdot) = \widehat{x}_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \widehat{x}(\cdot)$. Тем самым $(\overline{x}(\cdot); \widehat{x}(\cdot)) \in H^1(a;b)$ и $\overline{x}'(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$. ∎

Замечания. 1. В силу плотности множества $\overset{\circ}{C}{}^1[a;b]$ в $L_2(a;b)$ соотношение (38.1) определяет $\widehat{x}(\cdot)$ по $\overline{x}(\cdot)$ однозначно. Таким образом, можно считать, что элементами $H^1(a;b)$ являются такие элементы $x \in L_2(a;b)$, для которых существует обобщенная производная $x' \in L_2(a;b)$, определяемая соотношением

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b] \quad (x'(\cdot), \varphi(\cdot))_0 = -(x(\cdot), \varphi'(\cdot))_0.$$

При этом $||x(\cdot)||^2_{H^1(a;b)} = ||x(\cdot)||^2_{L_2(a;b)} + ||x'(\cdot)||^2_{L_2(a;b)}$.

В дальнейшем мы будем использовать именно эту интерпретацию пространства $H^1(a;b)$.

2. Обобщенная производная — "глобальный" объект, так как она определяется по "всей" функции, а не через значения в произвольной окрестности точек, как это имеет место для обычных производных.

Пример 38.1. $|t| \in H^1(-1;1)$ и $|t|' = \operatorname{sign}(t)$, поскольку для любой функции $\varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[-1;1]$

$$(|\cdot|', \varphi(\cdot))_0 \overset{(38.1)}{=} -(|\cdot|, \varphi'(\cdot))_0 = -\int\limits_{-1}^{1} |t|, \varphi'(t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{0} (-t)\varphi'(t)\,dt - \int\limits_{0}^{1} t\varphi'(t)\,dt =$$

$$= t\varphi(t)\Big|_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0} \varphi(t)\,dt - t\varphi(t)\Big|_{0}^{1} + \int\limits_{0}^{1} \varphi(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign}(t)\varphi(t)\,dt = (\operatorname{sign}(\cdot), \varphi(\cdot))_0.$$

Пример 38.2. У $\operatorname{sign}(\cdot)$ нет обобщенной производной из $L_2(-1;1)$ и тем самым $\operatorname{sign}(\cdot) \notin H^1(-1;1)$. Если бы такая производная $\widehat{x}(\cdot) = \operatorname{sign}'(\cdot) \in L_2(-1;1)$ имелась, то

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[-1;1] \quad (\widehat{x}(\cdot), \varphi(\cdot))_0 =$$

$$= -(\operatorname{sign}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0 = -\int\limits_{-1}^{0} (-1)\varphi'(t)\,dt - \int\limits_{0}^{1} (+1)\varphi'(t)\,dt = 2\varphi(0).$$

Тем самым

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[-1;1] \quad (\widehat{x}(\cdot), \varphi(\cdot))_0 = 2\varphi(0). \tag{38.3}$$

Рассмотрим множество

$$\Phi := \{\, \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^1[-1;1] :\ \forall\, t \geqslant\ \varphi(t) = 0 \,\}.$$

Сужения функций из этого множества на $(-1;0)$ образуют плотное в $L_2(-1;0)$ множество. Поскольку

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \Phi \quad 0 = 2\varphi(0) \overset{(38.3)}{=} (\widehat{x}(\cdot), \varphi(\cdot))_0 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \widehat{x}(t)\varphi(t)\,dt = \int\limits_{-1}^{0} \widehat{x}(t)\varphi(t)\,dt = (\widehat{x}(\cdot), \varphi(\cdot))_{L_2(-1;0)},$$

то $\widehat{x}(\cdot)\Big|_{(-1;0)} \overset{\text{п.в.}}{=} 0$.

Аналогично показывается, что $\widehat{x}(\cdot)\Big|_{(0;1)} \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Тем самым $\widehat{x}(\cdot) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, что противоречит формуле (38.3).

Замечания. 1. В соотношении (38.1) можно вместо $\overset{\circ}{C}{}^1[a;b]$ взять множество $\mathcal{D}(a;b)$ бесконечно дифференцируемых на $(a;b)$ функций, носитель которых $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{\, t \in (a;b) : \varphi(t) \neq 0 \,\}}$ лежит в $(a;b)$, поскольку множество таких функций тоже плотно в $L_2(a;b)$.

2. В $H^1(\Omega)$ оператор обобщенного дифференцирования по каждой переменной уже непрерывен и форма

$$\pi(v,u) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x) \tfrac{\partial u}{\partial x_j} \tfrac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_{\Omega} a_0(x) v(x)\,dx,$$

где производные понимаются в обобщенном смысле, удовлетворяет условиям теоремы Лакса — Мильграма.

3. Для определения слабого решения краевой задачи необходимо определить "значение на границе" слабого решения уравнения. Один из возможных путей — это определить условия, когда у элемента из $H^1(\Omega)$ есть "след" на $\partial\Omega$, т. е. такой линейный непрерывный оператор (оператор следа) $Sl : H^1(\Omega) \to X(\partial\Omega)$, где $X(\partial\Omega)$ — некоторое пространство функций на $\partial\Omega$, удовлетворяющий следующему условию: если $x(\cdot)$ из $H^1(\Omega)$ и $x(\cdot)$ непрерывно на $\partial\Omega$, то $Sl(x(\cdot)) = x(\cdot)\Big|_{\partial\Omega}$.

Для пространства $H^1(a;b)$ проблема следа решается просто — оказывается, что среди представителей элемента

$x \in H^1(a;b)$ всегда есть непрерывный на $[a;b]$ представитель и тем самым определено естественное отображение из $H^1(a;b)$ в $C[a;b]$, называемое *вложением.*

Теорема 38.2. *Если $a, b \in \mathbb{R}$, то $H^1(a;b)$ компактно вложено в $C[a;b]$, т. е. $\forall\, x \in H^1(a;b)\, \exists\, Jx \in C[a;b] \,:\, (Jx)(\cdot) \in x$ и $J \in comp\mathcal{L}(H^1(a;b), C[a;b])$.*

Доказательство. 1. По теореме о среднем значении в интегральном исчислении для любой функции $x(\cdot)$ из $C^1[a;b]$ существует

$$\xi \in [a;b] : (b-a)x(\xi) = \int\limits_a^b x(\tau)\, d\tau.$$

Таким образом,

$$\forall\, t \in [a;b] \;\; x(t) = \int\limits_\xi^t x'(\tau)\, d\tau + \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x(\tau)\, d\tau.$$

Поэтому

$$\forall\, t \in [a;b] \;\; |x(t)| \leqslant \int\limits_a^b |x'(\tau)|\, d\tau + \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |x(\tau)|\, d\tau \overset{(1.2)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \sqrt{b-a}||x'(\cdot)||_{L_2(a;b)} + (\sqrt{b-a})^{-1}||x(\cdot)||_{L_2(a;b)} \leqslant K||x(\cdot)||_{H^1(a;b)},$$

т. е.

$$\forall\, x(\cdot) \in C^1[a;b]\, ||x(\cdot)||_{C[a;b]} \leqslant K||x(\cdot)||_{H^1(a;b)}. \qquad (38.4)$$

Здесь $K = \max\{\,\sqrt{b-a}), (\sqrt{b-a})^{-1}\,\}$ зависит только от a и b.

2. Пусть $x \in H^1(a;b)$. Тогда $\exists\,\{\,x_n(\cdot)\,\} \subset C^1[a;b] \;:$ $x_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} x(\cdot)$ и $x'_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} x'(\cdot)$.

В силу неравенства (38.4) последовательность $\{\,x_n(\cdot)\,\}$ фундаментальна в $C[a;b]$. Поэтому $\exists\,\overline{x}(\cdot) \in C[a;b] : x_n(\cdot) \underset{C[a;b]}{\longrightarrow} \overline{x}(\cdot)$. Тогда $x_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \overline{x}(\cdot)$, тем самым $\overline{x}(\cdot) \overset{п.в.}{=} x(\cdot)$.

Переходя к пределу в неравенстве

$$||x_n(\cdot)||_{C[a;b]} \leqslant K||x_n(\cdot)||_{H^1(a;b)},$$

получим, что

$$||\overline{x}(\cdot)||_{C[a;b]} \leqslant K||x||_{H^1(a;b)}.$$

Тем самым $Jx = \overline{x}(\cdot)$ и $||J|| \leqslant K$.

3. Покажем, что $J(B[0;1]_{H^1(a;b)})$ предкомпактно в $C[a;b]$.

Поскольку J непрерывен, то $J(B[0;1]_{H^1(a;b)})$ ограничено.

Осталось показать равностепенную непрерывность семейства. Пусть $x \in B[0;1]_{H^1(a;b)}$ и $\{\,x_n(\cdot)\,\} \subset C^1[a;b]$ такая, что $x_n(\cdot) \underset{C[a;b]}{\longrightarrow} (Jx)(\cdot)$ и $x'_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} x'(\cdot)$. Тогда $||x'_n(\cdot)||_{L_2(a;b)} \to ||x'(\cdot)||_{L_2(a;b)}$.

При $t_1 < t_2$ получим $|x_n(t_2) - x_n(t_1)| = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} x'_n(\tau)\, d\tau\right| \overset{(1.2)}{\leqslant}$

$$\leqslant \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} |x'_n(\tau)|^2\, d\tau\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} 1\, d\tau\right)^{1/2} \leqslant ||x'_n(\cdot)||_{L_2(a;b)}\sqrt{t_2 - t_1}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$|(Jx)(t_2) - (Jx)(t_1)| \leqslant ||x'(\cdot)||_{L_2(a;b)}\sqrt{t_2 - t_1} \leqslant$$

$$\leqslant ||x(\cdot)||_{H^1(a;b)}\sqrt{t_2 - t_1} \leqslant \sqrt{t_2 - t_1},$$

т. е. $\omega(\delta; Jx, [a;b]) \leqslant \sqrt{\delta}$. ■

Следствие. *Если $x \in H^1(a;b)$, то*

$$(Jx)(t) = (Jx)(a) + \int\limits_a^t (Jx)'(\tau)\, d\tau,$$

тем самым (Jx) абсолютно непрерывна.

Замечания. 1. Поскольку мы вольны для представления элемента $x \in H^1(a;b)$ взять любую функцию $x(\cdot) \in x$, то всегда можно считать, что $x(\cdot)$ есть абсолютно непрерывный представитель.

2. В общем случае если область $\Omega \in \mathbb{R}^n$ выпукла и $0 \leqslant k < m - \dfrac{n}{p}$, то $W_p^m(\Omega)$ непрерывно вложено в $C^k(\overline{\Omega})$.

3. С другими теоремами вложения можно познакомиться в [2], [13].

Задание 38.1. 1. Пусть $\varphi_0(t) \equiv t$ и $x^* \in (H^1(a;b))^*$ определен формулой

$$< x, x^* > := (x(\cdot), \varphi_0(\cdot))_0.$$

Найдите $f \in H^1(a;b) :\ < \cdot, x^* > = (\cdot, f)_{H^1(a;b)}$.

2. Пусть $\varphi_0(t) \equiv t$ и $x^* \in (H^1(a;b))^*$ определен формулой

$$< x, x^* > := (x'(\cdot), \varphi_0(\cdot))_0.$$

Найдите $f \in H^1(a;b) :\ < \cdot, x^* > = (\cdot, f)_{H^1(a;b)}$.

Задание 38.2. Приведите примеры функций, разрывных в $\overline{\Omega}$, но принадлежащих $H^1(\Omega)$, где Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$.

Глава 4
Обобщенные функции

39. Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$

Определения. 1. *Носителем функции* $\varphi : D(\varphi) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}$ называется множество

$$\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{\, x \in D(\varphi) : \varphi(x) \neq 0 \,\}}.$$

2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область. Тогда

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \text{ и } \operatorname{supp}\varphi \text{ ограничен}\,\}.$$

Функции из $\mathcal{D}(\Omega)$ называются *финитными в* Ω. Функция, финитная в $\mathbb{R}^n$, называется просто *финитной*.

Замечания. 1. Носитель финитной функции есть компакт.

2. Если $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то, продолжив φ на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ нулем, получим функцию, финитную в $\mathbb{R}^n$. Поэтому можно считать, что все функции из $\mathcal{D}(\Omega)$ определены на всем $\mathbb{R}^n$, т. е. $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) =: \mathcal{D}$.

3. Мы будем рассматривать только выпуклые области.

Определение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, тогда $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha \varphi(x) := \dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ и $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$. $\mathbb{N}_+^n \ni \alpha$ — *мультииндекс.*

Утверждение 39.1. *$\mathcal{D}(\Omega)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ относительно операций $(\varphi(\cdot) + \psi(\cdot))(x) := \varphi(x) + \psi(x)$ и $(\lambda\varphi(\cdot))(x) := \lambda\varphi(x)$.*

Определение. $\omega_\varepsilon(x) := \begin{cases} A_\varepsilon e^{-\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - ||x||^2)}, & ||x|| < \varepsilon \\ 0, & ||x|| \geqslant \varepsilon, \end{cases}$

где $||x|| = ||(x_1, \ldots, x_n)||_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, а константа A_ε подобрана так, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

Замечание. Из курса математического анализа известно, что $\omega_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отметим также, что $\operatorname{supp} \omega_\varepsilon = B[0, \varepsilon]$.

Теорема 39.1 (о срезающей функции). *Пусть* Ω *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда* $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \eta_{\Omega,\varepsilon} \in \mathcal{D}:$

$$\operatorname{supp} \eta_{\Omega,\varepsilon} \subset \Omega + B(0, 3\varepsilon) \,\wedge\, \eta_{\Omega,\varepsilon} \equiv 1 \text{ на } \Omega + B(0, \varepsilon).$$

Доказательство. Пусть $\chi(\cdot)$ — *характеристическая функция множества* $\Omega + B(0, 2\varepsilon)$, т. е. $\chi(x) = 1$ при $x \in \Omega + B(0, 2\varepsilon)$ и $\chi(x) = 0$ при $x \notin \Omega + B(0, 2\varepsilon)$. Покажем, что функция

$$\eta(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(y)\omega_\varepsilon(x - y)\, dy = \int\limits_{\Omega + B(0,2\varepsilon)} \chi(y)\omega_\varepsilon(x - y)\, dy =$$

$$= [z = x - y] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(x - z)\omega_\varepsilon(z)\, dz = \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \chi(x - z)\omega_\varepsilon(z)\, dz$$

удовлетворяет требованиям доказываемой теоремы.

1. Поскольку $\Omega + B(0, 2\varepsilon)$ ограничено, а $\omega_\varepsilon(x - y)$ бесконечно дифференцируема по x, то, применяя теорему о дифференцируемости под знаком интеграла, получим, что $\eta_{\Omega,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $x \in \Omega + B(0, \varepsilon)$, а $z \in B(0, \varepsilon)$, то

$$x - z \in \Omega + B(0, \varepsilon) - B(0, \varepsilon) = \Omega + B(0, 2\varepsilon).$$

Поэтому $\eta(x) = \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \chi(x - z)\omega_\varepsilon(z)\, dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(z)\, dz = 1.$

3. Если $x \notin \Omega + B(0, 3\varepsilon)$, то $(x - B(0, \varepsilon)) \cap (\Omega + B(0, 2\varepsilon)) = \varnothing$. Поэтому $\eta(x) = \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \chi(x - z)\omega_\varepsilon(z)\, dz = \int\limits_{B(0,\varepsilon)} 0 \cdot \omega_\varepsilon(z)\, dz = 0.$ ∎

Утверждение 39.2. *Пусть* Ω_1 *и* Ω_2 *— области в* $\mathbb{R}^n$, Ω_2 *— ограничена и* $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1$.

Тогда существует такая $\eta_{\Omega_1,\Omega_2} \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, *что* $\eta_{\Omega_1,\Omega_2} \equiv 1$ *при* $x \in \overline{\Omega}_2$.

Доказательство. Так как $\overline{\Omega}_2$ компактно, то по утверждению 6.3 существует такое $\delta > 0$, что $\overline{\Omega}_2 + B(0, \delta) \subset \Omega_1$. Тогда $\eta_{\Omega_1,\Omega_2} := \eta_{\Omega_1,\delta/3}$. ∎

Теорема 39.2. *Пусть* Ω *— область в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда* $\mathcal{D}(\Omega)$ *плотно в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $f(\cdot) \in L_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$.

1. В силу определения суммируемости найдется ограниченная область $\Omega_1 \subset \Omega$ такая, что $||f(\cdot)||_{L_2(\Omega\setminus\Omega_1)} < \varepsilon$.

2. Так как множество полиномов плотно в $L_2(\Omega_1)$, то найдется полином $P(\cdot)$ такой, что $||f(\cdot) - P(\cdot)||_{L_2(\Omega_1)} < \varepsilon$.

3. Теперь, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, найдется такая Ω_2, что $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1$ и $||P(\cdot)||_{L_2(\Omega_1\setminus\Omega_2)} < \varepsilon$.

4. Рассмотрим

$$\varphi(\cdot) := P(\cdot)\eta_{\Omega_1,\Omega_2}(\cdot) \in \mathcal{D}(\Omega_1) \subset \mathcal{D}(\Omega).$$

Тогда

$$||f(\cdot) - \varphi(\cdot)||^2_{L_2(\Omega)} = ||f(\cdot) - \varphi(\cdot)||^2_{L_2(\Omega\setminus\Omega_1)} + ||f(\cdot) - \varphi(\cdot)||^2_{L_2(\Omega_1)} \leqslant$$

$$\leqslant ||f(\cdot)||^2_{L_2(\Omega\setminus\Omega_1)} + (||f(\cdot) - P(\cdot)||_{L_2(\Omega_1)} + ||P(\cdot) - \varphi(\cdot)||_{L_2(\Omega_1)})^2 <$$

$$< \varepsilon^2 + (\varepsilon + ||(1 - \eta_{\Omega_1,\Omega_2}(\cdot))P(\cdot)||_{L_2(\Omega_1)})^2 =$$

$$= \varepsilon^2 + (\varepsilon + ||(1 - \eta_{\Omega_1,\Omega_2}(\cdot))P(\cdot)||_{L_2(\Omega_1\setminus\Omega_2)})^2 <$$

$$< \varepsilon^2 + (\varepsilon + ||P(\cdot)||_{L_2(\Omega_1\setminus\Omega_2)})^2 < 5\varepsilon^2. \quad ∎$$

Определение. В линейном пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ над полем $\mathbb{P}$ введем следующую сходимость. Пусть $\{\, \varphi_n \,\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Говорят, что $\varphi_n \to \varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, если в Ω существует такой компакт K, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ и $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n_+$ $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi_0$ на Ω.

Пространство с такой сходимостью называется *пространством основных функций* и обозначается снова через $\mathcal{D}(\Omega)$.

Замечания. 1. В $\mathcal{D}(\Omega)$ нельзя определить норму или метрику, порождающую данную сходимость.

2. В $\mathcal{D}(\Omega)$ можно ввести локально выпуклую топологию, порождающую эту сходимость. Эту топологию можно, например, ввести следующим образом (см. [11, гл. 6, п. 3]).

Пусть $\{ K_n \} \subset \Omega$ — последовательность компактов таких, что $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Определим полунормы $p_{n,m}(\cdot)$ по формуле

$$p_{n,m}(\varphi) = \sup_{x \in K_n, |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Полунормы $p_{n,m}(\cdot)$ определяют на $\mathcal{D}(K_n)$ локально выпуклую топологию τ_n. Абсолютно выпуклое множество $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ будем считать окрестностью нуля в определяемой топологии, если $\forall n \quad W\Big|_{K_n} := \{ \varphi\Big|_{K_n} \ : \ \varphi \in W \}$ — окрестность нуля в $< \mathcal{D}(K_n), \tau_n >$.

3. Мы не будем рассматривать описанную топологию на $\mathcal{D}(\Omega)$, поэтому в дальнейшем вместо непрерывности отображений из $\mathcal{D}(\Omega)$ будем рассматривать только секвенциальную непрерывность.

Теорема 39.3. 1. $\mathcal{D}(\Omega)$ *— секвенциально полное, т. е. если* $\{ \varphi_n \} \in \mathcal{D}(\Omega)$ *и* $\varphi_n - \varphi_m \to 0$ *при* $n, m \to +\infty$*, то* $\exists \varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\varphi_n \to \varphi_0$ *при* $n \to +\infty$.

2. $\mathcal{D}(\Omega)$ *не является секвенциально замкнутым относительно сходимости в* $\mathcal{D}$.

Задание 39.1. Докажите сформулированную теорему.

Утверждение 39.3. *Следующие линейные операторы, действующие в* $\mathcal{D}(\Omega)$*, являются секвенциально непрерывными на* $\mathcal{D}(\Omega)$.

1. $A(\varphi(\cdot)) := D^\alpha \varphi(\cdot)$.
2. $A(\varphi(\cdot)) := a(\cdot) \cdot \varphi(\cdot)$*, где* $a(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

40. Пространство обобщенных функций произвольного роста

Определения. 1. *Обобщенной функцией*, или *распределением на области* Ω, называется любой секвенциально непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}(\Omega)$.

2. Множество обобщенных функций на Ω обозначается через $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3. В $\mathcal{D}'(\Omega)$ рассматривается *слабая сходимость, т. е. если $\{ f_n \} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $f_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, то

$$f_n \to f_0 := \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad < \varphi, f_n > \to < \varphi, f_0 > .$$

4. $\mathcal{D}'(\Omega)$ с такой сходимостью называется *пространством обобщенных функций на* Ω, или *пространством обобщенных функций произвольного роста на* Ω, и обозначается снова через $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Определение. Функция $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}$ называется *локально интегрируемой на* Ω, если она интегрируема на любом компакте из Ω. Множество таких функций обозначается через $L_{loc}(\Omega)$.

Утверждение 40.1. *Всякая локально интегрируемая на* Ω *функция* f *порождает обобщенную функцию* $\{f\} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *по формуле*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad < \varphi, \{f\} > := \int\limits_{\Omega} \varphi(x) f(x)\, dx = (\varphi, \overline{f})_{L_2(\Omega)}.$$

При этом, если $\{f_1\} = \{f_2\}$*, то* $f_1 \overset{\text{п.в.}}{=} f_2$.

Определение. Обобщенные функции вида $\{f\}$ называются *регулярными*. Все остальные обобщенные функции называются *сингулярными*.

Замечание. Регулярная обобщенная функция $\{f\}$ "отождествляется" с самой функцией f (т. е., когда это не приводит к недоразумениям, вместо $\{f\}$ пишут f).

Пример 40.1. Обобщенная функция δ, определенная формулой

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D} \quad <\varphi, \delta> := \varphi(0)$$

и называемая *δ-функцией*, является сингулярной.

Если бы $\delta = \{f\}$, то

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})\ \ 0 = \varphi(0) =<\varphi, \delta>= (\varphi, \overline{f})_{L_2(\Omega)}.$$

Поскольку $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ плотно в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $f \overset{n.в.}{=} 0$, поэтому

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\ \ (\varphi, \overline{f})_{L_2(\Omega)} = 0, \text{ т. е. } \delta = 0 \text{ — противоречие.}$$

Пример 40.2. Обобщенная функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, определенная формулой

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D} \quad <\varphi, \mathcal{P}\tfrac{1}{x}> := Vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx :=$$

$$:= \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) = \int\limits_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx$$

($\operatorname{supp}\varphi \subset [-R_\varphi; R_\varphi]$), тоже сингулярная.

Замечания 1. У обобщенной функции "нет аргумента", так как она определяется "глобально" — функционал, определенный для всех функций из $\mathcal{D}(\Omega)$. Поэтому при использовании обозначения $\delta(x)$ переменная x указывает на аргумент функции, к которой применяется данный функционал, например, $<\varphi(x,y), \delta(x)>$ или $<\varphi(x,y), \delta(y)>$.

2. Локальные свойства обобщенных функций можно описать с помощью основных функций, "сосредоточенных" в окрестностях рассматриваемых точек.

Определения. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

1. Говорят, что f *равна нулю на области* $\Omega_1 \subset \Omega$ (или *обращается в нуль на* Ω_1), если

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)\ <\varphi, f>= 0.$$

2. Говорят, что f *равна нулю в точке* $x_0 \in \Omega$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что f равна нулю на $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$.

Теорема 40.1. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Если f равна нулю на областях $\Omega_1 \subset \Omega$ и $\Omega_2 \subset \Omega$, то f равна нулю и на $\Omega_1 \cup \Omega_2$.*

Доказательство. 1. Пусть $K := \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. Поскольку любая точка $x \in K$ является внутренней либо для Ω_1, либо для Ω_2, то найдется такое $r(x) > 0$, что $B(x, r(x))$ целиком лежит либо в Ω_1, либо в Ω_2. Так как K компактно, то из его открытого покрытия $\{B(x, r(x)/2)\ :\ x \in K\}$ можно выделить конечное подпокрытие. Пусть $\Omega_{i,0}$ $(i = 1, 2)$ — объединение всех шаров этого подпокрытия, целиком лежащих в Ω_i. Тогда $\overline{\Omega}_{i,0} \subset \Omega_i$.

2. Пусть $\eta_i := \eta_{\Omega_i, \Omega_{i,0}}$, $(i = 1.2)$, а $\psi_1 := \eta_1$, $\psi_2 := (1 - \eta_1)\eta_2$.

Тогда $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ и $\psi_1 + \psi_2 = 1 - (1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \equiv 1$ на K. Поэтому $\varphi = \varphi\psi_1 + \varphi\psi_2$ и $\varphi\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$. Тем самым

$$<\varphi, f>=<\varphi\psi_1, f> + <\varphi\psi_2, f>= 0. \ \blacksquare$$

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Если f равна нулю в каждой точке области Ω, то $f = 0$.*

2. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Если*

$$\forall\,x \in \Omega\,\exists\,\varepsilon(x) > 0\,\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(B(x_0, \varepsilon(x)) \quad <\varphi, f_1>=<\varphi, f_1>,$$

то $f_1 = f_2$.

Определения. Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'$.

1. $\operatorname{supp} f := \overline{\{\,x \in \mathbb{R}^n :\ f \text{ не равна нулю в } x\,\}}$.

2. Если $\operatorname{supp} f$ ограничен, то f называется *финитной*.

Пример 40.3. Если $f \in C(\mathbb{R}^n)$, то $\operatorname{supp}\{f\} = \operatorname{supp} f$.

Пример 40.4. $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$.

Утверждение 40.2. *Если* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *и*

$$\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} f = \varnothing,$$

то $< \varphi, f >= 0$.

Определение. Если $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а $f \in \mathcal{D}'$, то

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad < \varphi, a \cdot f > := < a \cdot \varphi, f > .$$

Пример 40.5. $< \varphi, a \cdot \delta >= a(0) \cdot \varphi(0)$.

Пример 40.6. $x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$.

Утверждение 40.3. *Если* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *то оператор* $A : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$, *заданный формулой* $Af := a \cdot f$, *является линейным секвенциально непрерывным оператором.*

Замечание. Произведения обобщенных функций, совпадающего с обычным поточечным умножением функций и удовлетворяющего законам коммутативности и ассоциативности, нет. Действительно, предположение противного приводит к следующему противоречию: $0 = 0 \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = (x \cdot \delta(x)) \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta(x) \cdot x) \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x) \cdot (x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x}) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x)$.

Определение. Если $f \in \mathcal{D}'$, то $D^\alpha f$ определяется следующей формулой:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad < \varphi, D^\alpha f > := (-1)^{|\alpha|} < D^\alpha \varphi, f > .$$

Теорема 40.2 (свойства операции дифференцирования обобщенных функций).

1. *Если* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *то* $\forall \alpha \in \mathbb{N}_+^n \ D^\alpha\{f\} = \{D^\alpha f\}$.
2. D^α *есть линейный секвенциально непрерывный оператор, действующий в* $\mathcal{D}'$.
3. *Если* $f \in \mathcal{D}'$, *то* $\forall \alpha \in \mathbb{N}_+^n \ D^\alpha f \in \mathcal{D}'$ *и*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_+^n \ D^\alpha(D^\beta f) = D^{\alpha+\beta} f = D^\beta(D^\alpha f).$$

5. *Если* $|\alpha| = 1$ *и* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *то*

$$D^\alpha(a \cdot f) = (D^\alpha a) \cdot f + a \cdot (D^\alpha f).$$

Пример 40.7. $(\operatorname{sign} x)' = 2\delta(x)$; $(\ln|x|)' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$.

Теорема 40.3 (о существовании первообразной обобщенной функции). *Пусть* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *Тогда существует* $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *такая, что* $g' = f$. *При этом если* $g_1' = g_2'$, *то* $g_1 - g_2 = \text{const}$.

Доказательство. 1. Предположим, что такое g существует. Тогда

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad < \varphi', g >= - < \varphi, g' >= - < \varphi, f >,$$

т. е. g однозначно определена на функциях вида φ', где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2. Рассмотрим линейное отображение $J : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$, определенное формулой

$$(J\varphi)(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi - \left(\int_{-\infty}^{x} \omega_1(\xi)\, d\xi \right) \cdot \int_{-\infty}^{-\infty} \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (40.1)$$

Отметим, что если $\operatorname{supp} \varphi \subset [-R; R]$, то

$$\operatorname{supp} J\varphi \subset [-R-1; R+1].$$

3. Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \varphi_n \to \varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда $\exists R > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n \subset [-R; R]$, поэтому $J\varphi_n \subset [-R-1; R+1]$ и, в силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, $J\varphi_n \rightrightarrows \varphi_0$ на $\mathbb{R}$.

Поскольку $(J\varphi_n)' \overset{(40.1)}{=} \varphi_n(x) - \omega_1(x) \cdot < \varphi_n, 1 >$, то J секвенциально непрерывен в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

4. Поскольку $\varphi(x) = (J\varphi)'(x) + \omega_1(x) \cdot < \varphi, 1 >$, то

$$< \varphi, g >=< (J\varphi)', g > + < \varphi, 1 > \cdot < \omega_1, g >= [C := < \omega_1, g >] =$$

$$= - < J\varphi, f > + < \varphi, C >,$$

т. е.

$$< \varphi, g >= - < J\varphi, f > + < \varphi, C > . \qquad (40.2)$$

Тем самым, $g = -J^*f + C$.

5. Покажем, что при любой константе C обобщенная функция g, определенная формулой (40.2), является первообразной функции f, т. е. $g' = f$. Действительно, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$< \varphi, g' > = - < \varphi', g > = < J(\varphi'), f > - < \varphi', C > =$$

$$= < \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi)\, d\xi - (\int\limits_{-\infty}^{x} \omega_1(\xi)\, d\xi) \cdot < \varphi', 1 >, f > +$$

$$+ < \varphi, C' > = < \varphi, f > .$$

6. Если $g_1' = g_2' =: f$, то $\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{P}\, \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$< \varphi, g_i > = - < J\varphi, f > + < \varphi, C_i > \ (i = 1, 2).$$

Тем самым $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad < \varphi, g_1 - g_2 > = < \varphi, C_1 - C_2 >$, т. е. $g_1 - g_2 = \mathrm{const}$. ■

Задание 40.1. Найдите все решения следующих дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций: $xu' = 0$; $xu' = 1$; $x^2u' = 1$.

41. Операция свертки

Определения. 1. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, а $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда *сверткой функции φ с функцией f* называется функция

$$(\varphi * f)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) \cdot f(y)\, dy = < \varphi(x - y), \{f\}(y) >.$$

2. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, а $f \in \mathcal{D}'$. Тогда *сверткой функции φ с обобщенной функцией f* называется функция

$$(\varphi * f)(x) := < \varphi(x - y), f(y) >.$$

Пример 41.1. $\forall\, \varphi \in \mathcal{D} \quad \varphi * \delta = \varphi$.

Теорема 41.1. *Если $\varphi \in \mathcal{D}$, а $f \in \mathcal{D}'$, то $\varphi * f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. 1. Покажем, что

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \quad D^{\alpha}(\varphi * f) = (D^{\alpha}\varphi) * f. \qquad (41.1)$$

Для этого достаточно показать справедливость равенства (41.1) в случае $|\alpha| = 1$, а затем применить индукцию по $|\alpha|$. Не ограничивая общности, будем считать, что $D^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

2. Пусть $e = (1, 0 \dots, 0)$. Тогда для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t > 0$ в силу определения свертки

$$\tfrac{(\varphi * f)(x + te) - (\varphi * f)(x)}{t} = \left\langle \tfrac{\varphi(x + te - y) - \varphi(x - y)}{t}, f(y) \right\rangle. \qquad (41.2)$$

При каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим семейство функций $\psi_t(y; x) := \frac{\varphi(x + te - y) - \varphi(x - y)}{t}$.

3. Если $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, то при $|t| \leqslant 1$

$$\operatorname{supp} \psi_t(\cdot; x) \subset (x - K) \cup (x - K + B[0, 1]).$$

По формуле Тейлора (2-го порядка)

$$\forall\, t \in [-1; 1]\, \exists\, \widetilde{t} \in [-t; t] \ : \quad \psi_t(y; x) = \tfrac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x - y) + \tfrac{t}{2} \tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi(x + \widetilde{t}e - y).$$

Поскольку $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi(x + \widetilde{t}e - (\cdot))$ равномерно ограничена по $t \in [-1; 1]$, то $\psi_t(\cdot; x) = \frac{\varphi(x + te - (\cdot)) - \varphi(x - (\cdot))}{t} \rightrightarrows \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x - (\cdot))$ на $\mathbb{R}^n$ при $t \to 0$.

4. Взяв вместо функции φ функцию $D^{\beta}\varphi$, получим

$$\tfrac{(D^{\beta}\varphi)(x + te - (\cdot)) - (D^{\beta}\varphi)(x - (\cdot))}{t} \rightrightarrows \tfrac{\partial}{\partial x_1}(D^{\beta}\varphi)(x - (\cdot))$$

на $\mathbb{R}^n$ при $t \to 0$. Тем самым $\psi_t(\cdot; x) \to \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi)(x - (\cdot))$ в $\mathcal{D}$ при $t \to 0$.

5. Таким образом, $((\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi) * f)(x) = < (\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi)(x - y), f(y) > =$ $= \lim\limits_{t \to 0} < \psi_t(y; x), f(y) > \overset{(41.2)}{=} (\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi * f))(x)$. ■

Следствие. 1. *Свертка есть билинейное отображение* $\mathcal{D}\times\mathcal{D}'$ *в* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. $\forall\,\varphi\in\mathcal{D}\,\forall\,f\in\mathcal{D}'\,\forall\,\alpha\in\mathbb{N}_+^n\quad(D^\alpha\varphi)*f=\varphi*(D^\alpha f)$.

Доказательство. $\boxed{2}$. $((D^\alpha\varphi)*f)(x)=$

$$=<(D_x^\alpha\varphi)(x-y),f(y)>=<(-1)^{|\alpha|}(D_y^\alpha\varphi)(x-y),f(y)>=$$

$$=(-1)^{2|\alpha|}<\varphi(x-y),D_y^\alpha f(y)>=(\varphi*(D^\alpha f))(x).\ \blacksquare$$

Определение. $\mathcal{U}\in\mathcal{D}'$ называется фундаментальным решением линейного дифференциального оператора

$$L=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha D^\alpha$$

с постоянными коэффициентами a_α, если $L\mathcal{U}=\delta$.

Теорема 41.2. *Если* $\mathcal{U}$ *— фундаментальное решение линейного дифференциального оператора* L *с постоянными коэффициентами и* $\varphi\in\mathcal{D}$, *то* $u(x):=(\varphi*\mathcal{U})(x)$ *есть решение уравнения* $Lu=\varphi$.

Доказательство. В силу формулы (41.1)

$$L(\varphi*\mathcal{U})=\varphi*(L\mathcal{U})=\varphi*\delta=\varphi.\ \blacksquare$$

Теорема 41.3. *Для любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами существует его фундаментальное решение* (см. [11, гл. 8, теорема 8.5]).

Теорема 41.4 (Л. Шварц) (структурная теорема для $\mathcal{D}'(\Omega)$ — см. [11, гл. 6, теорема 6.26]).

$$\forall\,f\in\mathcal{D}'(\Omega)\,\forall\,K\in comp(\Omega)\,\exists\,\widetilde{f}\in C(\Omega)\,\exists\,\alpha\in\mathbb{N}_+^n\,\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

$$\operatorname{supp}\varphi\subset K\Longrightarrow<\varphi,f>=<\varphi,D^\alpha\{\widetilde{f}\}>.$$

Здесь через $comp(\Omega)$ *обозначен класс всех компактных подмножеств области* Ω.

42. Пространства $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$

Определения. 1. Следующее локально выпуклое пространство

$$<C^\infty(\mathbb{R}^n),\{\,p_{\alpha,K}:\,K\in comp(\mathbb{R}^n),\alpha\in\mathbb{N}_+^n\,\}>,$$

где $p_{\alpha,K}(\varphi):=\sup\limits_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|$, обозначается через $\mathcal{E}$.

2. Следующее локально выпуклое пространство

$$<\{\,\varphi\in^\infty(\mathbb{R}^n):\,\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{N}_+^n\ p_{\alpha,\beta}(\varphi)<+\infty\,\},\{\,p_{\alpha,\beta}\,\}>,$$

где $p_{\alpha,\beta}(\varphi):=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|$, называется пространством *быстро убывающих функций* и обозначается через $\mathcal{S}$.

Утверждение 42.1. 1. *Пространство* $\mathcal{D}$ *секвенциально непрерывно вложено в* $\mathcal{S}$.

2. *Пространство* $\mathcal{S}$ *непрерывно вложено в* $\mathcal{E}$.

Замечания. 1. Пространство $\mathcal{E}$ шире, чем $\mathcal{S}$, так как ему принадлежат, например, все многочлены, а пространству $\mathcal{S}$ — многочлены не принадлежат.

2. Пространство $\mathcal{S}$ шире, чем $\mathcal{D}$, так как ему принадлежит, например, функция $\varphi(x)=e^{-||x||_2^2}$, которая не принадлежит пространству $\mathcal{D}$ ($\operatorname{supp}\varphi=\mathbb{R}^n$).

Утверждение 42.2. 1. *Пусть* $a\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Тогда оператор* $A:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$, *заданный формулой* $A\varphi:=a\cdot\varphi$, *является линейным и непрерывным в* $\mathcal{E}$.

2. *Оператор* D^α *является линейным и непрерывным в* $\mathcal{E}$.

3. *Пусть* $a\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\forall\,\alpha\in\mathbb{N}_+^n\,\exists\,C_\alpha>0\,\exists\,m_\alpha\geqslant0\,\forall\,x\in\mathbb{R}^n\ |D^\alpha a(x)|\leqslant C_\alpha(1+||x||)^{m_\alpha}.$$

Тогда оператор $A:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, *заданный формулой* $A\varphi:=a\cdot\varphi$, *является линейным и непрерывным в* $\mathcal{S}$.

4. *Оператор* D^α *является линейным и непрерывным в* $\mathcal{S}$.

Определения. 1. $\mathcal{E}'$ — это пространство секвенциально непрерывных линейных операторов в $\mathcal{E}$ со *слабой сходимостью.

2. $\mathcal{S}'$ — это пространство секвенциально непрерывных линейных операторов в $\mathcal{S}$ со *слабой сходимостью.

Утверждение 42.3. 1. *Пространство $\mathcal{E}'$ секвенциально непрерывно вложено в $\mathcal{S}'$.*

2. *Пространство $\mathcal{S}'$ секвенциально непрерывно вложено в $\mathcal{D}'$.*

Доказательство. $\boxed{1}$. 1. Пусть $f \in \mathcal{E}'$, а $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда φ из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $< \varphi, f >$ определено. Если $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{S}]{} \varphi_0$, то $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{E}]{} \varphi_0$, поэтому $< \varphi_n, f > \to < \varphi_0, f >$. Тем самым f — секвенциально непрерывен в $\mathcal{S}$, т. е. $f \in \mathcal{S}'$.

2. Если $\mathcal{E}' \ni f_n \longrightarrow \mathcal{E}' f_0 \in \mathcal{E}'$, то $\forall \varphi \in \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ $< \varphi, f_n > \to < \varphi, f_0 >$, т. е. $f_n \longrightarrow \mathcal{S}' f_0$. ■

Теорема 42.1. *Если $f \in \mathcal{E}'$, то* $\operatorname{supp} f$ *ограничен.*

Доказательство. Предположим противное.

1. Тогда найдется $\{ x_n \} \subset \operatorname{supp} f$ такая, что $||x_n|| \to +\infty$ и $B(x_n, 1) \cap B(x_m, 1) = \emptyset$ при $n \neq m$. Поскольку $\{ x_n \} \subset \operatorname{supp} f$, то найдутся такие $\varphi_n \in \mathcal{D}(B(x_n, \varepsilon))$, что $< \varphi_n, f >= 1$.

2. Рассмотрим $\varphi_0(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$. В этом ряду при каждом фиксированном x только одно слагаемое отлично от нуля.

Пусть $\Phi_m(x) := \sum\limits_{n=1}^{m} \varphi_n(x)$. Поскольку с любым компактом лишь конечное число носителей $\operatorname{supp} \varphi_n$ имеет непустое пересечение, то $\Phi_m \xrightarrow[\mathcal{E}]{} \varphi_0$.

Таким образом, $< \varphi_0, f >= \lim\limits_{m \to +\infty} < \Phi_m, f >=$
$= \lim\limits_{m \to +\infty} < \sum\limits_{n=1}^{m} \varphi_n(x), f >= \lim\limits_{m \to +\infty} m = +\infty$ — противоречие ■

Определения. 1. Пространство $\mathcal{E}'$ называется *пространством обобщенных функций с компактными носителями*, или *пространством финитных обобщенных фнкций.*

2. Пространство $\mathcal{S}'$ называется *пространством обобщенных функций медленного роста.*

Лемма 42.1. *Пусть $f \in \mathcal{D}'$ и $K := \operatorname{supp} f$ — компакт.*

Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ и $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ на $K + B(0, \varepsilon_0)$, то $< \varphi_1, f >=$ $=< \varphi_2, f >$.

Доказательство. Так как $\varphi_1 - \varphi_2 \equiv 0$ на $K + B(0, \varepsilon_0)$, то $\operatorname{supp}(\varphi_1 - \varphi_2) \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$, и осталось применить утверждение 40.2. ■

Теорема 42.2. *Вложение $\mathcal{E}'$ в $\mathcal{D}'$ есть биекция на все финитные обобщенные функции.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{D}'$ и $K := \operatorname{supp} f$ — компакт.

1. Определим $\widetilde{f} \in \mathcal{E}'$ по следующей формуле:

$$\forall \varphi \in \mathcal{E} \ \ < \varphi, \widetilde{f} > := < \eta_\varepsilon \cdot \varphi, f >,$$

где $\eta_\varepsilon \in \mathcal{D}$ и $\eta_\varepsilon \equiv 1$ на $K + B(0, \varepsilon)$.

2. Это определение корректно, поскольку если $\eta_{\varepsilon_i} \in \mathcal{D}$ и $\eta_{\varepsilon_i} \equiv 1$ на $K + B(0, \varepsilon_i)$, то $\eta_{\varepsilon_1} \cdot \varphi \equiv \eta_{\varepsilon_2} \cdot \varphi$ на $K + B(0, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\})$ и в силу леммы 42.1 $< \eta_{\varepsilon_1} \cdot \varphi, f >=< \eta_{\varepsilon_2} \cdot \varphi, f >$.

3. Покажем, что $\widetilde{f}$ секвенциально непрерывен, т. е. $\widetilde{f} \in \mathcal{E}'$.

Пусть $\mathcal{E} \ni \varphi_n \xrightarrow[\mathcal{E}]{} \varphi_0 \in \mathcal{E}$. Поскольку $\eta_\varepsilon \in C^\infty$, то $\eta_\varepsilon \cdot \varphi_n \xrightarrow[\mathcal{E}]{} \eta_\varepsilon \cdot \varphi_0$. Но $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon \cdot \varphi_n) \subset K + B[0, \varepsilon]$, поэтому $\eta_\varepsilon \cdot \varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \eta_\varepsilon \cdot \varphi_0$. Поскольку $f \in \mathcal{D}'$, то

$$< \varphi_n, \widetilde{f} >=< \eta_\varepsilon \cdot \varphi_n, f > \to < \eta_\varepsilon \cdot \varphi_0, f >=< \varphi_0, \widetilde{f} >.$$

4. Если $\varphi \in \mathcal{D}$, то

$$< \varphi, \widetilde{t} >=< \eta_\varepsilon \cdot \varphi, f >=< \varphi + (\eta_\varepsilon - 1) \cdot \varphi_0, f >=< \varphi, f >. \ ■$$

Замечания. 1. В силу доказанных утверждений на $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{S}'$ можно смотреть, как на некоторые важные классы обобщенных функций из $\mathcal{D}'$.

2. В $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{S}'$ естественным образом вводится операция дифференцирования, совпадающая с операцией дифференцирования обобщенной функции из $\mathcal{D}'$.

3. Выделение пространств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{S}'$, в частности, связано с обобщением преобразования Фурье на обобщенные функции. При этом для пространства $\mathcal{S}'$ преобразование Фурье есть автоморфизм этого пространства.

Теорема 42.3 (Л. Шварц) (структурная теорема для $\mathcal{E}'(\Omega)$). *Для любой $f \in \mathcal{S}'$ найдется $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что*

$$\exists\, C > 0, m \in \mathbb{N}\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n \;\; |g(x)| \leqslant C \cdot (1 + ||x||)^m$$

и $\alpha \in \mathbb{N}_+^n$, что $f = D^\alpha\{g\}$ (см. [10, гл. 5, теорема 5.10]).

Глава 5

Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

43. Дифференцируемость по Фреше и Гато

Определения. Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$.

1. F называется *дифференцируемым по Фреше в точке* $x_0 \in \overset{\circ}{D}(F)$, если $\exists\, L(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y):$

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = L(x_0)h + ||h||o(1) \text{ при } h \to 0,$$

где через $o(1)$, как обычно, обозначено бесконечно малое при $h \to 0$ отображение.

2. Оператор $L(x_0)$ в этом случае называется *сильным дифференциалом* (*дифференциалом Фреше*), или *сильной производной отображения F в точке* x_0, и обозначается через $\overset{s}{D}F(x_0)$ или $\overset{s}{F}{}'(x_0)$.

Замечания. 1. Если F — функционал (т. е. $Y = \mathbb{P}$), то $\overset{s}{F}{}'(x_0) \in X^*$.

2. В конечномерном анализе $L(x_0)$ чаще называют дифференциалом, а производной называют матрицу, соответствующую этому линейному оператору в стандартном базисе.

Утверждение 43.1 (свойства сильного дифференциала).

1. $\overset{s}{D}F(x_0)$ *единственен.*
2. *Если* $F(\cdot) = \text{const}$, *то* $\overset{s}{D}F(x_0) = 0$.
3. *Если* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, *то* $\forall\, x \in X \;\; \overset{s}{D}A(x) = A$.
4. *Если F сильно дифференцируемо в точке x_0, то F непрерывно в этой точке.*

5. *Если F и G сильно дифференцируемы в точке x, то для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$ отображение $\lambda F + \mu G$ тоже сильно дифференцируемо в точке x и $\overset{s}{D}(\lambda F + \mu G)(x) = \lambda \overset{s}{D}F(x) + \mu \overset{s}{D}G(x)$.*

6. *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, $G : D(G) \subset Y \to Z$, $F(D(F)) \subset D(G)$, X, Y, Z — нормированные пространства. Если F сильно дифференцируемо в точке x_0, а G сильно дифференцируемо в точке $y_0 = F(x_0)$, то $H(x) := G(F(x))$ сильно дифференцируемо в точке x_0 и*

$$\overset{s}{D}H(x_0) = \overset{s}{D}G(y_0) \cdot \overset{s}{D}F(x_0). \quad \blacksquare$$

Другой подход к дифференцированию — сведение к случаю функции одной переменной.

Определение. Пусть $F : D(F) \subset \mathbb{R} \to Y$, Y — нормированное пространство и $t_0 \in \overset{\circ}{D}(F)$. Тогда *производной функции F в точке t_0* называется

$$\frac{dF(t_0)}{dt} := F'(t_0) := \lim_{\triangle t \to 0} \frac{F(t_0 + \triangle t) - F(t_0)}{\triangle t} \in Y.$$

Утверждение 43.2 *Пусть $F : D(F) \subset \mathbb{R} \to Y$, Y — нормированное пространство. Тогда F сильно дифференцируемо в точке t_0 тогда и только тогда, когда существует производная $F'(t_0)$. При этом*

$$\overset{s}{D}F(t_0)h = h \cdot F'(t_0).$$

Следствие. *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства, $h \in X$, $t \in \mathbb{R}$. Если F сильно дифференцируемо в точке $x + t \cdot h$, то $\frac{d}{dt}F(x + t \cdot h) = \overset{s}{D}F(x + t \cdot h)h$.*

Определения. Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства.

1. Отображение F называется *дифференцируемым в точке x_0 по направлению $h \in X$*, если существует

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + t \cdot h) - F(x_0)}{t} = \frac{d}{dt} F(x_0 + t \cdot h)\bigg|_{t=0} =: DF(x_0; h).$$

2. Если F дифференцируемо в точке x_0 по любому направлению, то отображение $DF(x_0; \cdot)$ называется *первой вариацией отображения F в точке x_0*.

Утверждение 43.3 *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства. Если отображение F сильно дифференцируемо в точке x_0, то $DF(x_0; \cdot) = \overset{s}{D}F(x_0)$.*

Теорема 43.1 (Ферма) (необходимое условие локального экстремума). *Пусть X — нормированное пространство. Если $x_0 \in \overset{\circ}{D}(\varphi)$ — точка локального экстремума функционала $\varphi : D(\varphi) \subset X \to \mathbb{R}$ и φ дифференцируем в точке x_0 по любому направлению, то $\forall\, h \in X \;\; D\varphi(x_0; h) = 0$.*

Замечание. Отображение $DF(x_0; \cdot)$ необязательно будет линейным. Например, для $F(x_1, x_2) := \sqrt[3]{x_1 x_2^2}$ $\;F(0 + t \cdot h) = \sqrt[3]{t h_1 t^2 h_2^2} = t\sqrt[3]{h_1 h_2^2}$, поэтому $DF(0; h) = \sqrt[3]{h_1 h_2^2}$.

Определения. 1. Если $DF(x_0; \cdot) \in \mathcal{L}(X, Y)$, то говорят, что отображение F *слабо дифференцируемо* (*дифференцируемо по Гато*) *в точке x_0*.

2. В этом случае $DF(x_0; \cdot)$ называется *слабым дифференциалом* (*дифференциалом Гато*) *отображения F в точке x_0* и обозначается через $\overset{w}{D}F(x_0)$ или $\overset{w}{F'}(x_0)$.

Утверждение 43.4. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $F : D(F) \subset X \to Y$.*

1. *$\overset{w}{D}F(x_0)$ единственен.*
2. *Если F слабо дифференцируемо в точке $x + th$, то*

$$\tfrac{d}{dt}F(x + th) = \overset{w}{D}F(x + th)h.$$

3. *Если F слабо дифференцируемо в точке $x + th$, то*

$$\forall\, y^* \in Y^* \;\; \tfrac{d}{dt} < F(x + th), y^* > = < \overset{w}{D}F(x + th)h, y^* >.$$

4. *Если F сильно дифференцируемо в точке x_0, то оно и слабо дифференцируемо в точке x_0 и $\overset{w}{D}F(x_0) = \overset{s}{D}F(x_0)$.*

Теорема 43.2 (формула конечных приращений). *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства. Если F слабо дифференцируемо на $[x_1; x_2]$, то существует такое $\xi \in (x_1; x_2)$, что $||F(x_2) - F(x_1)|| \leqslant ||\overset{w}{D}F(\xi)|| \cdot ||x_2 - x_1||$.*

Доказательство. По 2-му следствию теоремы Хана — Банаха (с. 94) существует такой $y^* \in Y^*$, что $||y^*|| = 1$ и

$$||F(x_2) - F(x_1)|| = < F(x_2) - F(x_1), y^* >.$$

Рассмотрим функцию $\psi(t) := < F(x_1 + t(x_2 - x_1)), y^* >$. Тогда $||F(x_2) - F(x_1)|| = \psi(1) - \psi(0) =$ [формула конечных приращений в одномерном случае — $\exists\, \theta \in (0;1)$] $=$ $= \psi'(\theta) \cdot 1 = [\xi := x_1 + \theta(x_2 - x_1)] \overset{\text{утв. 43.4}}{=} < \overset{w}{F'}(\xi)(x_2 - x_1), y^* > \leqslant$ $\leqslant ||\overset{w}{F'}(\xi)|| \cdot ||x_2 - x_1|| \cdot ||y^*||$. ■

Пример 43.1. Пусть

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1^2 \neq x_2 \text{ или } x_1 = x_1 = 0, \\ 1, & x_1^2 \neq x_2. \end{cases}$$

Тогда $DF(0; \cdot) \equiv 0$, т. е. F слабо дифференцируемо в точке $x_0 = 0$, но не является непрерывной в точке $x_0 = 0$, поэтому F не является и сильно дифференцируемым в точке $x_0 = 0$.

Теорема 43.3 (достаточное условие сильной дифференцируемости). *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства. Если F слабо дифференцируемо в некоторой окрестности $U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 и $\overset{w}{F'}$ непрерывно в точке x_0 как отображение из X в $\mathcal{L}(X, Y)$, то F сильно дифференцируемо в точке x_0.*

Доказательство. Возьмем произвольное $h \in B(0, \varepsilon) \subset X$. Тогда по 2-му следствию теоремы Хана — Банаха найдется такой $y^*(h) \in Y^*$, что $||y^*(h)|| = 1$ и

$$||F(x_0 + h) - F(x_0) - \overset{w}{F'}(x_0)h|| =$$

$$= < F(x_0 + h) - F(x_0) - \overset{w}{F'}(x_0)h, y^*(h) > .$$

Но из доказательства предыдущей теоремы следует, что

$$\exists\, \theta \in (0;1) : < F(x_0 + h) - F(x_0) - \overset{w}{F'}(x_0)h, y^*(h) > =$$

$$= < \overset{w}{F'}(x_0 + \theta h)h, y^*(h) > - < \overset{w}{F'}(x_0)h, y^*(h) > =$$

$$= < \overset{w}{F'}(x_0 + \theta h)h - \overset{w}{F'}(x_0)h, y^*(h) > \leqslant$$

$$\leqslant ||\overset{w}{F'}(x_0 + \theta h) - \overset{w}{F'}(x_0)|| \cdot ||h|| \cdot ||y^*(h)|| \leqslant ||h|| \cdot \omega(||h||; \overset{w}{F'}, x_0).$$

Здесь $\omega(\delta; \overset{w}{F'}, x_0) := \sup\{\, ||\overset{w}{F'}(x) - \overset{w}{F'}(x_0)|| : \ x \in B(0, \delta)\,\}$.

Но $\omega(||h||; \overset{w}{F'}, x_0) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ в силу непрерывности отображения $\overset{w}{F'}(\cdot)$ в точке x_0. Тем самым

$$F(x_0 + h) - F(x_0) - \overset{w}{F'}(x_0)h = ||h|| \cdot o(1) \text{ при } h \to 0. \quad ■$$

44. Производные и дифференциалы высших порядков

В дальнейшем мы будем рассматривать только сильную дифференцируемость (дифференцируемость по Фреше).

Определение. Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства.

Если отображение $F' : D(F') \subset X \to \mathcal{L}(X,Y)$ дифференцируемо в точке x_0, то F называется *дважды дифференцируемым в точке* x_0.

Замечание. Отметим, что $F''(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$.

Определение. Пусть X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Тогда $\mathcal{L}(X,X;Y) := \mathcal{L}_2(X;Y)$ — нормированное пространство билинейных непрерывных отображений $A : X^2 \to Y$ с нормой $||A|| := \sup\limits_{||x_1||\leqslant 1, ||x_2||\leqslant 1} ||A(x_1,x_2)||$.

Утверждение 44.1. $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y)) \cong \mathcal{L}_2(X;Y)$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$.

Определим $J : \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y)) \to \mathcal{L}_2(X;Y)$ следующим образом: $\forall\, x_1, x_2 \in X \quad (JA)(x_1,x_2) := (Ax_1)x_2$. ■

Замечание. "Отождествляя" $F''(x_0)$ с билинейным отображением, мы будем писать $F''(x_0)(x_1,x_2)$ вместо $(F''(x_0)x_1)x_2$.

Определения. 1. Аналогично определяются производные $F^{(k)}(x_0)$ — более высоких порядков и $\mathcal{L}_k(X;Y)$ — нормированное пространство k-линейных непрерывных отображений из X^k в Y. При этом можно считать, что $F^{(k)}(x_0)$ есть k-линейное отображение, т. е. $F^{(k)}(x_0) \in \mathcal{L}_k(X,Y)$.

2. Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Если F k раз дифференцируемо в точке x_0, то *дифференциалом порядка* k *отображения* F *в точке* x_0 называется отображение $d^kF(x_0) : X \to Y$, определенное формулой

$$d^kF(x_0)(h) := F^{(k)}(x_0)(h, \ldots, h).$$

Утверждение 44.2. $d^kF(x_0)(\lambda h) = \lambda^k d^kF(x_0)(h)$.

Пример 44.1. Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, тогда

$$F'(x)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\, h_i,\ F''(x)(h_1,h_2) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j \partial x_i}\, h_{1,i}h_{2,j}, \text{ а}$$

$$d^2F(x)(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j \partial x_i}\, h_i h_j.$$

Теорема 44.1. *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$ и отображение F k раз дифференцируемо в точке $x + \sum\limits_{i=1}^{k} \widetilde{t}_i h_i$, где $\{h_1, \ldots, h_k\} \subset X$, а $\{\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k\} \subset \mathbb{R}$. Тогда в некоторой окрестности точки $(\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k) \in \mathbb{R}^k$ определено отображение*

$$\varphi(t_1, \ldots, t_k) := F(x + \sum_{i=1}^{k} t_i h_i),$$

которое k раз дифференцируемо в точке $(\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k)$. При этом

$$\frac{\partial^k}{\partial t_1 \ldots \partial t_k}\varphi(\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k) = F^{(k)}(x + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{t}_i h_i)(h_1, \ldots, h_k).$$

Следствие. Справедливы следующие утверждения:

1. Если F k раз дифференцируемо в точке $x + th$, то

$$\frac{d^k}{dt^k} F(x+th) = d^kF(x+th)(h).$$

2. Если F k раз дифференцируемо в точке $x + th$, то

$$\forall\, y^* \in Y^*\ \frac{d^k}{dt^k} < F(x+th), y^* > = < d^kF(x+th)(h), y^* >.$$

Замечание. Пример 44.1 показывает, что равенство смешанных производных в смысле обычного конечномерного анализа — это симметричность соответствующих полилинейных отображений — производных в смысле функционального анализа.

Утверждение 44.3. *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Если отображение F k раз непрерывно дифференцируемо в точке x_0, то*

$$F^{(k)}(x_0)(h_1, \ldots, h_k) = F^{(k)}(x_0)(\sigma(h_1, \ldots, h_k)),$$

где $\sigma(h_1, \ldots, h_k)$ — произвольная перестановка аргументов $h_1, \ldots, h_k$.

Теорема 44.2 (формула Тейлора с оценкой остатка по Лагранжу). *Пусть $F : D(F) \subset X \to Y$, X, Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$. Если отображение F является $(n+1)$ раз дифференцируемым в некоторой окрестности $U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0, то*

$$\forall\, h \in B(0,\varepsilon)\, \exists\, \xi \in U(x_0,\varepsilon)$$

$$\left|\left|F(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k F(x_0)(h)\right|\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}||d^{n+1}F(\xi)(h)||.$$

Доказательство. Пусть

$$R_n(x_0;h) := F(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k F(x_0)(h)$$

и $y^*(h) \in Y^*$ таково, что $||y^*(h)|| = 1$ и

$$||R_n(x_0;h)|| =< R_n(x_0;h), y^*(h) > .$$

Тогда

$$< F(x_0+h), y^*(h) >= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k} < F(x_0+th), y^*(h) > \Big|_{t=0} \cdot 1^k +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} < F(x_0+th), y^*(h) > \Big|_{t=\theta} \cdot 1^{n+1} =$$

$$=< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k F(x_0)(h), y^*(h) > + < \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}F(\xi), y^*(h) >. \ \blacksquare$$

Теорема 44.3. *Пусть $\varphi : D(\varphi) \subset X \to \mathbb{R}$, X — нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\varphi^{(n+1)}$ непрерывна в $U(x_0,\varepsilon)$ и $d^1\varphi(x_0) = \ldots = d^{n-1}\varphi(x_0) = 0$.*

Тогда

1. *Если x_0 — точка локального минимума функционала φ, то $\forall\, h \in X$ $d^n(x_0) \geqslant 0$.*

2. *Если x_0 — точка локального максимума функционала φ, то $\forall\, h \in X$ $d^n(x_0) \leqslant 0$.*

3. *Если $\exists\, C > 0\, \forall\, h \in X$ $d^n\varphi(x_0)(h) \geqslant C||h||^n$, то x_0 — точка строгого локального минимума функционала φ.*

4. *Если $\exists\, C > 0\, \forall\, h \in X$ $d^n\varphi(x_0)(h) \leqslant -C||h||^n$, то x_0 — точка строгого локального максимума функционала φ.*

5. *Если $\exists\, h_1, h_2 \in X$ $d^n\varphi(x_0)(h_1) < 0 < d^n\varphi(x_0)(h_2)$, то в точке x_0 у φ нет локального экстремума.*

Доказательство. По предыдущей теореме

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \tfrac{1}{n!} d^n\varphi(x_0)(h) + R_n(x_0;h).$$

Поскольку $d^{n+1}\varphi(x)$ непрерывен в точке x_0, то он ограничен в некоторой окрестности $U(x_0,\varepsilon_0)$. Поэтому

$$\forall\, h \in B[0;\varepsilon_0/2] \quad ||R_n(x_0;h)|| \leqslant ||d^{n+1}\varphi(\xi)(h)||/((n+1)!) \leqslant$$

$$\leqslant ||h||^{n+1} \cdot ||d^{n+1}\varphi(\xi)|| \leqslant ||h||^{n+1}M,$$

где M — некоторая константа, существующая в силу непрерывности $\varphi^{(n+1)}$ в точке x_0. Таким образом,

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \tfrac{1}{n!} d^n(x_0)(h) + O(||h||^{n+1}) \text{ при } h \to 0.$$

$\boxed{1}$. В этом случае $\frac{1}{n!} d^n(x_0)(h) + O(||h||^{n+1}) \geqslant 0$ при всех достаточно малых h. Возьмем произвольный $h_0 \in X$ и рассмотрим $h(t) := th_0$ при малых положительных t. Тогда

$$\tfrac{1}{n!} d^n(x_0)(th_0) + O(||th_0||^{n+1}) = t^n(\tfrac{1}{n!} d^n(x_0)(h_0) + O(t)) \geqslant 0.$$

Поделив это неравенство на t^n и перейдя затем к пределу при $t \to +0$, получим $d^n(x_0)(h_0) \geqslant 0$.

$\boxed{4}$. $\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \frac{1}{n!} d^n(x_0)(h) + O(||h||^{n+1}) \leqslant$

$$\leqslant -\tfrac{C}{n!}||h||^n + O(||h||^{n+1}) = ||h||^n\big(-\tfrac{C}{n!} + O(||h||)\big).$$

$\boxed{5}$. В этом случае $\varphi(x_0 + th_i)$ имеет при $t = 0$ строгий локальный максимум при $i = 1$ и строгий локальный минимум при $i = 2$. $\blacksquare$

45. Функции, заданные неявно, и условный локальный экстремум

Определение. Пусть $F : D(F) \subset X \times Y \to Z$, X, Y, Z — нормированные пространства. Если отображение $F(\cdot, y_0)$ дифференцируемо в точке x_0, то его производная в этой точке называется *частной производной по x отображения F в точке* (x_0, y_0) и обозначается $F'_x(x_0, y_0)$. Аналогично определяется и вторая частная производная — по y — $F'_y(x_0, y_0)$.

Замечание. Отметим, что $F'_x(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Z)$, а $F'_y(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

Утверждение 45.1 (достаточное условие дифференцируемости). *Пусть $F : D(F) \subset X \times Y \to Z$, X, Y, Z — нормированные пространства. Если F дифференцируемо и по x, и по y в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), F'_x и F'_y непрерывны в точке (x_0, y_0), то F дифференцируема в точке (x_0, y_0) и*

$$\forall u \in X \, \forall v \in Y \quad F'(x_0, y_0)(u, v) = F'_x(x_0, y_0)u + F'_y(x_0, y_0)v.$$

Определение. Пусть $F : D(F) \subset X \times Y \to Z$. Отображение $f : D(f) \subset X \to Y$ называется *отображением, заданным неявно уравнением* $F(x, y) = z_0 \in Z$, если

$$\forall x \in D(f) \;\; (x, f(x)) \in D(F) \wedge F(x, f(x)) = z_0.$$

Теорема 45.1 (о существовании неявно заданного отображения). *Пусть $F : D(F) \subset X \times Y \to Z$, X, Y, Z — банаховы пространства и выполнены следующие условия:*

1. $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}(F)$ *и* $F(x_0, y_0) = 0$.
2. F *непрерывна в точке* (x_0, y_0).
3. $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}(F'_y)$ *и* F'_y *непрерывно в точке* (x_0, y_0).
4. $F'_y(x_0, y_0)$ *непрерывно обратим в* $\mathcal{L}(Y, Z)$.

Тогда $\exists \widetilde{\varepsilon} > 0 \, \exists \widetilde{\delta} > 0 \, \exists f : B(x_0, \widetilde{\delta}) \to B(y_0, \widetilde{\varepsilon})$ *такое, что* $\forall x \in U(x_0, \widetilde{\delta}) \;\; F(x, f(x)) = 0$ *и* f *непрерывно в точке* x_0.

Доказательство. Введем следующее обозначение: $L := (F'_y(x_0, y_0))^{-1}$.

1. Рассмотрим при каждом x из малой окрестности точки x_0 оператор $A(x)$, определенный следующей формулой:

$$(A(x))(y) := y - LF(x, y).$$

Тогда $(A(x))(y) = y \Longleftrightarrow F(x, y) = 0$.

Найдем такие $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что для любого $x \in B(x_0, \delta)$ отображение $A(x)$ есть сжимающее отображение полного метрического пространства $B[y_0, \varepsilon]$ в себя.

2. В силу формулы конечных приращений

$$||(A(x))(y_2) - (A(x))(y_1)|| \le ||(A(x))'_y(\eta)|| \cdot ||y_2 - y_1||.$$

Но

$$||(A(x))'_y(\eta)|| = ||I - LF'_y(x, \eta)|| =$$

$$= ||I - L(F'_y(x, \eta) - F'_y(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0))|| =$$

$$= [LF'_y(x_0, y_0) = I] = ||L(F'_y(x, \eta) - F'_y(x_0, y_0))|| \le$$

$$\le ||L|| \cdot \omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0)), \text{ где}$$

$$\omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0)) := \sup_{||x - x_0|| \le \delta, ||y - y_0|| \le \varepsilon} ||F'_y(x, y) - F'_y(x_0, y_0)||.$$

Отметим, что в силу 3-го условия

$$\omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0)) \to 0 \text{ при } \delta, \varepsilon \to +0.$$

3. Поскольку $||y_0 - (A(x))(y)|| =$

$$= ||y_0 - (A(x))(y_0) + (A(x))(y_0) - (A(x))(y)|| \le$$

$$\le ||y_0 - (A(x))(y_0)|| + ||L|| \cdot \omega((\delta, \varepsilon); F'_y, (x_0, y_0))||y - y_0||, \text{ а}$$

$$||y_0 - (A(x))(y_0)|| = ||LF(x, y_0)|| \overset{F(x_0, y_0) = 0}{=}$$

$$= ||L(F(x, y_0) - F(x_0, y_0))|| \le ||L|| \cdot \omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0), \text{ где}$$

$$\omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0) := \sup_{||x-x_0||\le\delta} ||F(x,y_0) - F(x_0,y_0)||, \text{ то}$$

$$||y_0-(A(x))(y)|| \le ||L||(\varepsilon\cdot\omega((\delta,\varepsilon);F'_y,(x_0,y_0))+\omega(\delta;F(\cdot,y_0),x_0)).$$

Отметим, что в силу 2-го условия

$$\omega(\delta; F(\cdot, y_0), x_0) \underset{\delta\to+0}{\longrightarrow} 0. \tag{45.1}$$

4. Чтобы отображение $A(x)$ было отображением $B[y_0,\varepsilon]$ в себя, достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$||L||(\varepsilon\cdot\omega((\delta,\varepsilon);F'_y,(x_0,y_0))+\omega(\delta;F(\cdot,y_0),x_0)) \le \varepsilon,$$

а для сжимаемости этого отображения достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$||L||\omega((\delta,\varepsilon);F'_y,(x_0,y_0)) < 1.$$

Отметим, что $\omega((\delta,\varepsilon);F'_y,(x_0,y_0))$ и $\omega(\delta;F(\cdot,y_0),x_0)$ убывают при убывании δ и ε.

Возьмем δ_1 и ε_1 так, чтобы

$$\alpha := ||L||\omega((\delta_1,\varepsilon_1);F'_y,(x_0,y_0)) < 1.$$

Тогда $\forall\,\delta \in (0;\delta_1)\,\forall\,\varepsilon \in (0;\varepsilon_1)$

$$||L||(\varepsilon\omega((\delta,\varepsilon);F'_y,(x_0,y_0))+\omega(\delta;F(\cdot,y_0),x_0)) \le$$

$$\le \varepsilon\alpha + ||L||\omega(\delta;F(\cdot,y_0),x_0).$$

Но неравенство $\varepsilon\alpha + ||L||\omega(\delta;F(\cdot,y_0),x_0) \le \varepsilon$ равносильно следующему неравенству:

$$\omega(\delta;F(\cdot,y_0),x_0) \le \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{||L||}. \tag{45.2}$$

В силу условия (45.1) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1)$ неравенство (45.2) разрешимо (относительно δ).

Возьмем $\widetilde{\varepsilon} < \varepsilon_1$, а $\widetilde{\delta}$, удовлетворяющее неравенству (45.2), при $\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}$.

5. По теореме Банаха о сжимающем отображении (с. 42)

$$\forall\,x \in B(x_0,\widetilde{\delta})\ \exists!\,y \in B[y_0,\widetilde{\varepsilon}]:\ (A(x))(y) = y, \text{ т. е. } F(x,y)=0.$$

Тем самым определено отображение $f(x) := y$ и $||f(x_0) - y_0|| \le \varepsilon$ при $||x - x_0|| < \delta(\varepsilon)$, если $\delta(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству (45.2). ∎

Теорема 45.2 (о дифференцируемости неявно заданного отображения). *Если дополнительно к условиям предыдущей теоремы отображение F дифференцируемо по x в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и F дифференцируемо в точке (x_0,y_0), то отображение f, заданное неявно уравнением $F(x,y)=0$, дифференцируемо в точке (x_0,y_0) и*

$$f'(x_0) = -(F'_y(x_0,y_0))^{-1}F'_x(x_0,y_0).$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $P := -(F'_y(x_0,y_0))^{-1}F'_x(x_0,y_0)$, $\triangle y := f(x_0+\triangle x) - f(x_0)$. Тогда при всех малых $\triangle x$

$$0 \equiv F(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) - F(x_0,y_0) =$$

$$= F'_x(x_0,y_0)\triangle x + F'_y(x_0,y_0)\triangle y + (||\triangle x|| + ||\triangle y||)\cdot\alpha(\triangle x,\triangle y),$$

где $\lim\limits_{(\triangle x,\triangle y)\to 0} \alpha(\triangle x,\triangle y) = 0$.

Отсюда

$$\triangle y = -P\triangle x + (||\triangle x|| + ||\triangle y||)\beta(\triangle x,\triangle y), \tag{45.3}$$

где $\beta(\triangle x,\triangle y) := (F'_y(x_0,y_0))^{-1}\alpha(\triangle x,\triangle y)$.

Из (45.3) получим, что $||\triangle y|| \leqslant ||\triangle x||(||P|| + ||\beta||) + ||\triangle y||\cdot||\beta||$. Отсюда $||\triangle y|| \leqslant \frac{||P||+\beta(\triangle x,\triangle y)}{1-\beta(\triangle x,\triangle y)}||\triangle x|| \leqslant K\cdot||\triangle x||$ при некотором K, поскольку

$$\frac{||P|| + \beta(\triangle x,\triangle y)}{1-\beta(\triangle x,\triangle y)} \to ||P|| \text{ при } (\triangle x,\triangle y)\to 0.$$

Таким образом,

$$||f(x_0+\triangle x) - f(x_0) - P\triangle x|| \leqslant ||\triangle x||(1+K)||\beta|| = o(1)$$

при $\triangle x \to 0$, т. е. f дифференцируемо в точке x_0 и $f'(x_0) = P$. ∎

Теорема 45.3 (о касательном пространстве). *Пусть X, Y — банаховы пространства, $\Phi : D(\Phi) \subset X \to Y$, Φ дифференцируемо в окрестности точки x_0, $Ker\,\Phi'(x_0)$ дополняемо в X, т. е. $X = Ker\,\Phi'(x_0) \oplus X_1$, $Im\,\Phi'(x_0) = Y$, $\Phi(x_0) = 0$ и Φ' непрерывно в точке x_0. Тогда*

$$\forall\, \overline{x} \in Ker\,\Phi'(x_0)\, \exists\, \alpha : (-\delta; \delta) \to X_1 \ : \ \alpha(0) = \alpha'(0) = 0 \ \text{и} \\ \Phi(x_0 + t\overline{x} + \alpha(t)) \equiv 0 \ \text{на} \ (-\delta; \delta).$$

Доказательство. Отметим, что X_1 — банахово пространство.

1. Пусть $A := \Phi'(x_0)\Big|_{X_1}$. Так как $Im\,\Phi'(x_0) = Y$, то и $Im\,A = Y$. Поскольку A обратим на X_1, то по теореме Банаха об обратном отображении $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X_1)$.

2. Пусть $\overline{x} \in Ker\,\Phi'(x_0)$. Рассмотрим $F(t, \alpha) := \Phi(x_0 + t\overline{x} + \alpha)$, где $t \in (-\delta_0; \delta_0)$, $\alpha \in X_1$ (при достаточно малом δ_0).

Тогда $F(0, 0) = \Phi(x_0) = 0$, $F'_t(t, \alpha) = \Phi'(x_0 + t\overline{x} + \alpha)\overline{x}$ непрерывно в окрестности точки $(0, 0)$ и $F'_\alpha(t, \alpha) = \Phi'(x_0 + t\overline{x} + \alpha)I_{X_1}$, тем самым $F'_t(0, 0) = A$ — непрерывно обратим. В силу теорем об отображении, заданном неявно,

$$\exists\, \delta > 0\, \exists\, \alpha : (-\delta; \delta) \to X_1 \ : \ \Phi(x_0 + t\overline{x} + \alpha(t)) \equiv 0$$

и $\alpha(0) = 0$. А так как $\alpha'(0) = -A^{-1}\Phi'(x_0)\overline{x}$ и $\overline{x} \in Ker\,\Phi'(x_0)$, то $\alpha'(0) = 0$. ■

Теорема 45.4 (необходимое условие условного локального экстремума). *Пусть X, Y — банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$, $\varphi : D(\varphi) \subset X \to \mathbb{R}$, $\Phi : D(\Phi) \subset X \to Y$, φ и Φ непрерывно дифференцируемы в $B(x_0, \delta_0) \subset D(\varphi) \cap D(\Phi)$, $\Phi(x_0) = 0$, $Ker\,\Phi'(x_0)$ дополняемо в X, $Im\,\Phi'(x_0) = Y$ и x_0 — точка условного локального экстремума $\varphi(x)$ при $\Phi(x) = 0$. Тогда $\varphi'(x_0) \in (Ker\,\Phi'(x_0))^\perp$.*

Доказательство. Для любого $\overline{x} \in Ker\,\Phi'(x_0)$ в силу предыдущей теоремы существует $\alpha : (-\delta; \delta) \to X$ такое, что $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$ и $\varphi(x_0 + t\overline{x} + \alpha(t)) \equiv 0$ на $(-\delta; \delta)$. Поэтому $\varphi(x_0 + t\overline{x} + \alpha(t))$ имеет в точке $t = 0$ локальный экстремум. Тем самым

$$0 = \frac{d}{dt}\varphi(x_0 + t\overline{x} + \alpha(t))\Big|_{t=0} = < \overline{x}, \varphi'(x_0) >.$$

Поэтому $\varphi'(x_0) \in (Ker\,\Phi'(x_0))^\perp$. ■

Теорема 45.5 (метод множителей Лагранжа). *Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы. Тогда найдется $y_0^* \in Y^*$ (аналог "множителей Лагранжа") такое, что функционал Лагранжа*

$$L(x, y^*) := \varphi(x) - < \Phi(x), y^* >$$

удовлетворяет в точке (x_0, y_0^*) следующим равенствам:

$$L'_x(x_0, y_0^*) = 0, \ \ L'_{y^*}(x_0, y_0^*) = 0.$$

Доказательство. Поскольку $L'_{y^*}(x_0, y_0^*) = [\Phi(x_0)] = 0$ и

$$L'_x(x_0, y_0^*) = \varphi'(x_0) - y_0^*\Phi'(x_0) = \varphi'(x_0) - (\Phi'(x_0))^* y_0^*,$$

то сформулированное в теореме заключительное условие эквивалентно следующему: $\exists\, y_0^* \in Y^* \ : \ \varphi'(x_0) = (\Phi'(x_0))^* y_0^*$, т. е. $\varphi'(x_0) \in Im\,(\Phi'(x_0))^*$.

Но по предыдущей теореме $\varphi'(x_0) \in (Ker\,\Phi'(x_0))^\perp =$ [по следствию леммы о тройке, так как отображение $\Phi'(x_0)$ есть отображение на Y] $= Im\,(\Phi'(x_0))^*$. ■

Список литературы

1. *Банах С.* Теория линейных операций. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2001.

2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

3. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

5. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.

6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

7. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

8. Математическая энциклопедия: В 5 т. М.: Совет. энцикл., 1977—1985.

9. *Ремпель Ш., Шульц Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1986.

10. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

11. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

12. *Садовничий В. А.* Теория операторов. М.: Высш. шк., 1999.

13. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.

14. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1993.

15. *Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

16. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. М.: МНЦМО, 2004.

17. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. М.: Мир, 1987. Т. 3.

18. *Šmulian V.* Über lineare topologishe Räume // Матем. сб. 1940. Т. 7(49). С.425—448.

19. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

20. *Alaoglu L.* Weak Topologies of Normed Lianer Spaces //Ann. Math. 1940. Vol. 41. P. 252—267.

21. *Eberlein W. F.* Weak Compactness in Banach Spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. (USA). 1947. Vol. 33. P. 51—53.

22. *James R.C.* A non-reflexive Banach spaces isometric with its second conjugate spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. (USA). 1951. Vol. 37. P. 174—177.

23. *Lax P. D., Milgram A. N.* Parabolic equations. Contributions to theory of partial differential equqtions //Ann. Math. Studies. 1954. Vol. 33. P. 167—190.