ПРОГРАММА ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА
ПО МАГИСТЕРСКОЙ ПРОГРАММЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Теория функций действительного переменного

1. Мера, измеримые функции, интеграл. Мера, порожденная внешней мерой. Стандартное продолжение меры с полукольца. Построение меры Лебега на $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Измеримые функции. Последовательности измеримых функций; сходимость по мере и почти всюду. Теоремы Лебега, Рисса, Егорова о связи различных типов сходимости. Структура измеримых функций; теорема Лузина. Интеграл Лебега от неотрицательных измеримых функций и его свойства. Интеграл Лебега от измеримых функций произвольного знака и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла; теоремы Леви, Фату и Лебега. Счетная аддитивность интеграла по множеству интегрирования; абсолютная непрерывность интеграла по множеству. Сравнение интеграла Римана и несобственного интеграла Римана с интегралом Лебега. Декартово произведение мер. Теорема Фубини для неотрицательных измеримых функций и для суммируемых функций. [1–9].

2. Заряды; разложение зарядов и мер. Заряды. Разложение Хана и Жордана. Теорема Радона – Никодима. Теорема Лебега о разложении заряда на абсолютно-непрерывную и сингулярную части. Производная заряда относительно меры; замена переменных в интеграле Лебега. [1–9].

3. Функциональные пространства. Пространства $L^p = L^p(X, \mathbf{S}, d\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, на измеримом множестве X с мерой μ и σ-алгеброй подмножеств **S**. Неравенства Гельдера, Минковского, обобщенное неравенство Минковского. Плотность подмножества простых функций в L^p. Полнота L^p. Сопряженное пространство к L^p при $1 \leq p < \infty$. Плотность множества алгебраических многочленов в классическом пространстве L^p, $1 \leq p < \infty$, на отрезке (теорема Вейерштрасса). [1–9].

4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье. Поточечная, равномерная и среднеквадратическая сходимости тригонометрического ряда Фурье. Преобразование Фурье в пространствах L_1 и L_2. Теорема Планшереля. [2, гл. VIII]; [11, гл. II]; [10, гл. I].

Теория функций комплексного переменного

1. Интегральные представления аналитических функций. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши [18, гл. IV]; [14, гл. III, §§1–3]; [13, гл. I, §4; гл.III, §3].

2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теоремы Вейерштрасса. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Вычеты, теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. [17, гл. V–VII]; [16, гл. III, §§ 4–7; гл.IV]; [15, гл. I, §5, гл. V, §2].

3. Целые и мероморфные функции. Теорема Лиувилля для целых функций. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями [17, гл. IX, §§1,2]; [16, гл. VII, §§1–3]; [15, гл.V, §1].

4. Конформные отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерий однолистности. Теорема Римана. Соответствие границ при конформных отображениях [17, гл. III, §§1,3]; гл. XII, §§1,2,6,7]; [16, гл. V, §§1–3]; [15, гл. II].

5. Аналитическое продолжение. Понятие аналитического продолжения. Понятие римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Существование особой точки на границе круга сходимости степенного ряда. Принцип симметрии. [17, гл. X]; [15, гл.VIII].

Функциональный анализ

1. Метрические и топологические пространства. Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических и топологических пространствах [2, гл. II]; [5, гл. IV].

2. Нормированные и топологические линейные пространства. Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана – Банаха. Нормированные пространства. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства. [2, гл. III]; [5, гл. IV].

3. Линейные функционалы и линейные операторы. Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов. Компактные (вполне непрерывные) операторы. [2, гл. IV, §§1–3,5,6]; [5, гл. IV].

4. Гильбертовы пространства. Спектральная теория самосопряженных операторов. Теория ограниченных операторов. Неограниченные операторы [5, гл. V]; [13, гл. VII]; [12].

5. Обобщенные функции. Основные и обобщенные функции. Дифференцирование обобщенных функций. Прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. [11, гл. II]; [2, гл. IV, §4; гл. VIII, §8]; [18].

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Халмош П. Р. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1989.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир. 1966.
4. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том V. М.: Физматгиз, 1959.
6. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
7. Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
8. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973.
9. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
10. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

12. Ильин А. М. Линейные неограниченные операторы. Спектральное разложение: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2007.
13. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982.
14. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том V. М.: Физматгиз, 1959.
15. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
16. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том 1,2. М.: Наука, 1967–1968.
17. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.
18. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

Программа утверждена на заседании
кафедры математического анализа и теории функций
Уральского государственного университета
28 марта 2011 года

Зав. кафедрой,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Арестов В.В.