Курсовые, выпускные, дипломные работы кафедры математического анализа и теории функций 2011–2012 учебный год

д. ф.-м. н. **В. В. Арестов**

Курсовые работы для 2 курса (Всего до 15 работ. Работает спецсеминар)

1. Мера и интеграл Лебега на прямой.
2. Мера Жордана в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Плоский и кратный интегралы Римана.
2. Несобственные интегралы. Интегралы Эйлера.

Курсовые для 3 курса и выпускные работы бакалавров

1. Экстремальные задачи для тригонометрических полиномов.
1-1. Пусть $\mathcal{T}_n$ есть множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами. На множестве $\mathcal{T}_n$ рассматривается семейство функционалов $\|\cdot\|_p$, $0 \leq p \leq \infty$, определенных формулами

$$\|f_n\|_\infty = \|f_n\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f_n(t)| : t \in \mathbb{R}\}, \quad p = \infty;$$

$$\|f_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|f_n\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f_n(t)| dt\right), \quad p = 0.$$

Задача состоит в изучении наилучшей константы в неравенстве

$$\|f_n'\|_0 \leq A(n)\|f_n\|_2, \quad f_n \in \mathcal{T}_n.$$

Более общий вариант задачи: изучение наилучшей константы в неравенстве

$$\|f_n'\|_0 \leq A(n)_p \ \|f_n\|_p, \quad f_n \in \mathcal{T}_n.$$

при различных значениях p, $0 < p \leq \infty$.

Литература. 1. Арестов В.В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат.- 1981.- Т.45, No.1.- С.3-22.
2. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов // ДАН. 2012. Т. 422, №6. С. 727-731.

1-2. Точные неравенства для дробных производные тригонометрических полиномов. 2-3 работы

Литература. 1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
2. Kozko A.I., The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegö inequalities with fracrional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequalitiy for trigonometric polynomials, East J. Approx. 4 (3) (1998) 391–416.

2. Экстремальные задачи для тригонометрических полиномов с равномерными и односторонними ограничениями.
2-1. Пусть C_n есть множество четных тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами. Здесь предлагаются две задачи

$$\alpha(n) = \max\{a_1 : \ |f_n(t)| \leq 1, \ t \in [0, \pi]\}$$

$$\alpha_+(n) = \max\{a_1 : \ f_n(t) \leq 1, \ t \in [0, \pi]\}$$

2-2. Пусть S_n есть множество нечетных тригонометрических полиномов

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами. Здесь также предлагаются две задачи

$$\beta(n) = \max\{b_1 : \ |g_n(t)| \leq 1, \ t \in [0, \pi]\}$$

$$\beta_+(n) = \max\{b_1 : \ g_n(t) \leq 1, \ t \in [0, \pi]\}$$

Литература. 1. 1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
2. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
3. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978.

3. Наименьшее значение меры множества неотрицательности алгебраических многочленов с нулевым взвешенным средним значением на отрезке в предположении, что мера определяется еще одним весом.
Литература. Арестов В. В., Раевская В. Ю. Одна экстремальная задача для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на отрезке // Матем. заметки, 1997. Т.62, вып.3. С.332–342.

4. Дизайны и наименьшее значение меры множества неотрицательности тригонометрических полиномов от нескольких переменных заданного порядка на многомерном торе.

5. Сферические коды с экстремальными свойствами.
Литература. 1. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
2. Арестов В.В., Бабенко А.Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова РАН. 1997. Т. 219: Теория приближений. Гармонический анализ. С. 44–73.

6. Наилучшее приближение оператора дифференцирования на гладких функциях одного и нескольких переменных и соответствующее неравенство Колмогорова
   Литература. Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.

Магистерские диссертации

1. Наилучшее приближение оператора дробного дифференцирования на полупрямой и соответствующее неравенство Колмогорова для дробных производных.
   Литература. 1) Arestov V.V. Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approxim. Theory. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ., 1979. С. 19–34. (Banach Center Publ.; Vol. 4).
   2) Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.

2. Экстремальные задачи для периодических функций с ограничениями на значения функций и коэффициенты Фурье. Пусть $\{R_k\}_{k=0}^{\infty}$ есть последовательность периодических, непрерывных на всей оси функций. Пусть, далее, $\mathcal{F}_n$ есть множество непрерывных периодических функций вида $f(t) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} x_k R_k(t)$, где $x = \{x_k\}_{k=n}^{\infty}$ – суммируемая последовательность неотрицательных вещественных чисел: $x_k \ge 0,\ k \ge n,\ \sum\limits_{k=n}^{\infty} x_k < \infty$. Задача состоит в исследовании наилучшей константы $K_n(\tau)$ в неравенстве
   $$\sum_{k=n}^{\infty} x_k \le K_n(\tau) \sup \left\{ f(t) = \sum_{k=n}^{\infty} x_k R_k(t) :\ 0 \le t \le \tau \right\}$$
   на классе всех функций $f \in \mathcal{F}_n$. Н. И. Черных при исследовании точной константы в неравенстве Джексона в пространстве L_2 решил эту задачу для системы функций $R_k(t) = 1 - \cos t$ при $\tau = \dfrac{\pi}{n}$. Предлагается рассмотреть две важные для теории приближения функций системы
   $$R_k(t) = |\sin t|, \quad R_k(t) = 1 - \frac{\sin(k+1)t}{(k+1)\sin t}.$$
   Литература. 1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки, 1967. Т. 2. Вып. 5. С. 513–522.
   2. Васильев С.Н. Неравенство Джексона–Стечкина в $L_2[-\pi, \pi]$ // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН, 2001. Т. 7, № 1. С. 75–84.

3. Сферические коды с экстремальными свойствами.
   Литература. 1. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
   2. Арестов В.В., Бабенко А.Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова РАН. 1997. Т. 219: Теория приближений. Гармонический анализ. С. 44–73.

4. Экстремальные свойства тригонометрических полиномов. Точные неравенства для тригонометрических полиномов на периоде через нормы полиномов на отрезке, меньшем периода.
   Литература. 1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
   2. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.

д. ф.-м. н. **Н. Ю. Антонов**

1. Многомерные аналоги теоремы Коши о промежуточных значениях и теоремы Дарбу о промежуточных значениях производной (2 курс).
2. Задача о соотношении классов $Lip\alpha$ и классов функций обобщенной ограниченной вариации (2 курс).
3. Теорема Брауэра о неподвижной точке и ее обобщения (2 курс).
4. Различные виды сходимости кратных числовых рядов (2 курс).
5. Поточечные (равномерные) оценки скорости роста частичных сумм тригонометрических рядов Фурье (3 курс).

д. ф.-м. н. **В. М. Бадков**

1. Рекуррентные соотношения для тригонометрических ортогональных полиномов.
2. Тригонометрические полиномы второго рода.
3. Особенности веса, с которым ортогональны полиномы второго рода.
4. Многочлены, ортогональные на системе интервалов прямой (или дуг окружности).
5. Двусторонние поточечные оценки функции Кристоффеля (для отрезка).
6. Двусторонние поточечные оценки функции Кристоффеля (для окружности).
7. Порядки роста производных от ортогонального многочлена в конечной точке отрезка ортогональности.
8. Порядок наилучшего приближения функции Сегё.
9. Двусторонние поточечные оценки функций Лебега сумм Фурье по ортогональным полиномам.
10. Порядки констант Лебега сумм Фурье по ортогональным полиномам (в весовых пространствах суммируемых со степенью функций).
11. Порядки констант Лебега сумм Фейера по ортогональным полиномам.
12. Аналоги неравенств М. Рисса для сумм Фурье по ортогональным полиномам.
13. Аналоги неравенств Л. Карлесона – Р. Ханта для сумм Фурье по ортогональным полиномам.
14. Расходящиеся ряды по ортогональным полиномам (как контрпримеры к известным достаточным условиям сходимости).
15. Условия сходимости продифференцированного ряда Фурье по ортогональным полиномам.

Все эти темы посвящены ортогональным полиномам. Темы 1 и 7 доступны студентам 2-го курса. Но эти темы (особенно, первая из них) предназначены для кратковременных занятий. Также для кратковременных занятий предназначена тема 2, но для студентов, начиная с 3-го курса. Остальные темы предлагаются студентам, начиная с 3-го курса. По ним можно писать курсовую работу, а затем, продолжив исследования, – дипломную, магистерскую и кандидатскую работы.

д. ф.-м. н. **Н. В. Величко**

1. Условие Суслина для пространств непрерывных функций в компактно-открытой топологии (4 курс МТ).
2. Уплотнения на компакте (4 курс МТ).

д. ф.-м. н. **А. Р. Данилин**

1. Свойства матричной экспоненты, матричных синуса и косинуса и обыкновенные дифференциальные уравнения (2–3 курс).
2. Разложение в асимптотические ряды решений трансцендентных уравнений, зависящих от малого параметра.
3. Метод Лапласа в двумерном случае (3 курс).
4. Метод перевала на примере нахождения асимптотических разложений конкретных интегралов, зависящих от большого параметра (3 курс).
5. Нахождение асимптотических разложений решений начальных и краевых задач для ОДУ, зависящих от малого параметра (3–4 курс).
6. Построение асимптотических разложений решений конкретных задач теории оптимального управления, зависящих от малого параметра. (4 курс).

д. ф.-м. н. **И. В. Мельникова**

2 *курс*

1. Решение некоторых стохастических задач, возникающих в физике, экологии и финансовой математике (2–3 работы).
   Стохастические задачи – это задачи, которые ставятся и решаются с учетом различных случайных возмущений, а именно случайные возмущения необходимо учитывать во многих современных прикладных задачах. В процессе работы предполагается знакомство с основами стохастического анализа, составляющего важную часть финансовой математики. Будет дана литература, в основном, на английском языке.
2. Обобщенные функции. Что это такое? Знакомство с основными понятиями (2–3 работы).
   Оказывается обобщенных функций гораздо больше, чем, скажем, непрерывных, но их можно дифференцировать! Применение обобщенных функций к нахождению обобщенных решений дифференциальных уравнений, возникающих в приложениях - в прикладных задачах, как правило, можно найти лишь обобщенное решение.

3–4 *курс:*

1. Примеры полугрупп операторов с различными свойствами непрерывности.
   Литература.
   1. с/к по теории полугрупп
   2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: ИЛ, 1976.
   3. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. Москва: Наука, 1980.
2. Непрерывные и аналитические полугруппы. Применение к решению задач со случайными возмущениями.
3. Вычисление стоимости ценных бумаг на финансовом рынке.
   Литература.
   1. Stochastic calculus for finance I. The binomial asset pricing model. Springer Finance, 2004.
   2. Stochastic calculus for finance II. Continuous time models. Springer Finance, 2004.
4. Как задавать и решать дифференциальные уравнения, в которых «негладкая неоднородность» играет роль случайной помехи.
5. Реферативная работа — решение задач об оптимальном останове.
   Примеры таких задач:
   a) когда самое подходящее время продавать акции (валюту, недвижимость);
   b) выбор оптимального поведения на интервью, викторине;
   c) проблема выбора невесты (жениха).
   Литература.
   Оксендал Б. Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Мир, 2004.

Выпускные, дипломные работы, магистерские диссертации

1. Модели финансового рынка, связанные с вычислением стоимости ценных бумаг (basic assert and derivatives).
   Литература.
   1. Stochastic calculus for finance I. The binomial asset pricing model. Springer Finance, 2004.
   2. Stochastic calculus for finance II. Continuous time models. Springer Finance, 2004.
2. Решение дифференциальных задач со случайными погрешностями: построение «классических», обобщенных и приближенных решений.
   Литература.
   Melnikova I.V., Filinkov A.I. The Cauchy problem. Three approaches Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **120**, London, New York, Washington: **CRC**, 2001.
3. Построение регуляризующих алгоритмов некорректных краевых задач методами теории полугрупп, методами интегральных преобразований и методами теории некорректных задач.
   Литература.
   Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задач. М.: Наука, 1995.
4. Постановка и реализация численных экспериментов для задач по предложенным выше темам.

д. ф.-м. н. **Ю. Н. Субботин**

Курсовые работы

1. Оценки равномерных норм сплайнов наилучшего среднеквадратического приближения непрерывных функций (3 курс)
2. Экстремальная интерполяция в реальном масштабе времени дискретных данных с ограниченными обобщенными разностями второго порядка.
3. Нерегулярные всплески и явный вид фундаментальных сплайнов.

Магистерские диссертации

1. Применение методов теории функций при решении медицинских задач.
2. Константы Лебега интерполяционных экспоненциальных сплайнов малых порядков.

д. ф.-м. н. **Н. И. Черных**

1. Гармонические всплески в многосвязных областях (4 курс МТ).

к. ф.-м. н. **У. А. Алексеева**

1. Обобщенные функции (2 курс).
   Литература.
   Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Т. 1, 2.
2. Исследование задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в пространствах обобщенных функций (3 курс).
   Литература.
   Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Т. 2, 3.

к. ф.-м. н. **П. Ю. Глазырина**

1. Задача о точной константе в неравенстве Турана $\|P\|_0 \le C(n)\|P'\|_0$ на множестве многочленов степени точно n, все нули которых принадлежат промежутку $[-1, 1]$ (2, 3 курс).
2. Неравенства Маркова–Никольского (магистерская диссертация).

к. ф.-м. н. **К. Н. Гурьянова**

1. О некоторых методах, ускоряющих сходимость рядов. Использование их при численном решении обратных задач геофизики (2, 3 курс).
2. Составление электронных страниц учебника по истории математики и компьютерных наук (руководство совместно с центром компьютерных технологий): расширить содержание уже частично составленного учебника. К уже созданному инструментарию добавить тесты (2, 3 курс; выпускная, дипломная; для КН и МТ).
3. Комплексная проблема моментов: реферат (3–4 курсы).
4. Составление электронного пособия по математическому анализу (3, 4 курс; дипломная)

к. ф.-м. н. **М. В. Дейкалова**

Курсовые для 2–3 курса и выпускные работы бакалавров

1. Несколько взаимосвязанных экстремальных задач для алгебраических многочленов на отрезке и многомерной евклидовой сфере: приближение конкретных функций алгебраическими многочленами; точные неравенства между различными нормами алгебраических многочленов и др.
   Литература.
   1. Дейкалова М. В. Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
   2. Дейкалова М.В. Интегральное приближение характеристической функции сферической шапочки // Тр. Ин-та Мат. Мех. УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 144–155.
   3. Дейкалова М.В. Несколько экстремальных аппроксимационных задач для характеристической функции сферического слоя // Тр. Ин-та Мат. Мех. УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 122–135.

Магистерская диссертация

1. Неравенство Джексона – Никольского между равномерной и интегральной нормами алгебраических многочленов на отрезке.
   Литература.
   Дейкалова М. В. О точном неравенстве Джексона — Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 122–134.

к. ф.-м. н. **Л. Ф. Коркина**

1. Дробные степени замкнутых операторов (построение примеров) (2, 3 курс).

к. ф.-м. н. **А. В. Макаров**

1. Кратные несобственные интегралы. Критерий интегрируемости для $f(x) \ge 0$ (2курс).
   Литература.
   Зорич В. А. Математический анализ.
2. Эйлеровы интегралы. Доказательство основных формул (2 курс).
   Литература.
   Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.
3. Перестановки порядка интегрирования в случае, когда оба интеграла несобственные (2курс).
4. Теорема Котельникова о прохождении сигнала (ТФКП) (2 курс).
5. Обобщенные функции (2 курс).
   Литература.
   Шабунин М. И., Тер-Крикоров А. М. Курс математического анализа.
6. Преобразования Лапласа. Решение дифференциальных уравнений (3 курс).
7. Вычисление некоторых интегралов переходом в комплексную область (3курс).

к. ф.-м. н. **С. И. Новиков**

1. *Модифицированная проблема экстремальной интерполяции с минимальным значением нормы линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами на классе дифференцируемых периодических функций одной переменной.* Работа теоретического характера, предполагает предварительное ознакомление с теорией L-сплайнов, определяемых линейными дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами.
2. *Исследования свойств L-сплайнов, соответствующих некоторым линейным дифференциальным операторам с переменными коэффициентами, имеющим особенности.* Работа теоретического характера, возможно использование компьютера для проведения расчетов со сложными аналитическими выражениями.
3. *Исследование форм представления и нулей L-сплайнов Эйлера.* Работа предполагает знание ТФКП (вычеты, разложение в ряды), а также начальных понятий теории сплайнов.

к. ф.-м. н. **А. В. Осипов**

1. Исследование топологий, обладающих регулярной (вполне регулярной) аксиомой отделимости (2, 3 курс МТ).
2. Исследование свойств пространства непрерывных функций в множественно-открытой топологии (3 курс МТ).
3. Топологические свойства метрических пространств (2 курс МТ).

к. ф.-м. н. **М. А. Рекант**

1. Свойства сумм функциональных рядов в линейных нормированных пространствах (2 курс).
2. Кратные несобственные интегралы (2 курс).
3. Бесконечные произведения (2 курс).
4. Построение контрпримеров (2 курс).
5. Распространение интегральных теоремы и формулы Коши на несобственные комплексные криволинейные интегралы (3 курс).
6. Операторные функции (4 курс).
7. Несобственные интегралы (методическая разработка) (4 курс).

к. ф.-м. н. **Н. К. Шамгунов**

1. Свойства поточечных пределов последовательности непрерывных функций (2 курс).
2. Числовые ряды (2 курс).

В. В. Бояршинов

1. Исследование несобственных интегралов (2, 3 курс МТ, КН).
2. Вычисление сумм рядов (2 курс МТ, КН).

А. Н. Борбунов

1. Фрактальное сжатие изображений (выпускная работа).
2. Алгоритмы цифровой обработки сигналов (обзорная, 2 курс КН).
3. Модернизация сайта кафедры.

О. Ю. Хачай

1. Солитоны. Нелинейные уравнения математической физики (3 курс)
   Знакомство с так называемыми *эволюционными уравнениями математической физики* и методами поиска их решений. Такие уравнения обладают элементарными решениями специального вида, имеющими характер локализованных возмущений, или импульсов, и сохраняющими свою форму даже после взаимодействия друг с другом, т. е. ведущими себя в каком-то смысле *подобно частицам.* Такие локализованные возмущения стали известны под названием *солитонов.* Хотя дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие движения солитонов, нелинейны, они тесно связаны с задачами для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений типа Штурма–Лиувилля. Эту связь между солитонами и обыкновенными дифференциальными уравнениями можно лучше увидеть, если построить формулу, выражающую взаимодействие между двумя солитонами с помощью метода Баргмана. Несколько нестрого можно сказать, что аналитические выражения, описывающие многосолитонные решения, являются просто потенциалами Баргмана. Если рассмотреть это двухсолитонное решение, то становится очевидным сходство солитона с частицей.
   Курсовая работа будет заключаться в подробном изучении теоретического материала, и решении задач, позволяющих научиться поиску солитонных решений, различным преобразованиям дифференциальных уравнений и другим средствам аппарата современной математической физики.
2. Множества фрактальной размерности. Знакомство с ними, с их происхождением из различных задач математики и физики. Программирование построения примеров фрактальных множеств на плоскости (для 2 курса).