Программа курса

ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Автор – д. ф.-м. н., профессор И. В. Мельникова

Лекции 70 часов

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время огромный интерес вызывают модели, построенные с учетом случайных возмущений. Математически такие модели приводят к дифференциальным уравнениям со случайными процессами, называемым стохастическими дифференциальными уравнениями.

Задача курса – дать математические основы теории стохастических уравнений и познакомить студентов с их применением в финансовой математике, уделяя особое внимание экономико-математическим принципам, лежащим в основе построения моделей финансовой математики – безарбитражности, риск-нейтральности мер и мартингальности. С этой целью начинается курс с конструкции дискретных (биномиальных) моделей финансовой математики, важных как с точки зрения осознания указанных принципов, так и использования в качестве приближенных методов.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1. Определение первичных и производных ценных бумаг (акции, бонды, опционы разного рода).
2. Однопериодные биномиальные модели. Принцип безарбитражности.
3. Многопериодные биномиальные модели. Принцип риск-нейтральности. Мартингалы. Принцип мартингальности.
4. Примеры задач из биологии, экономики, физики и др. областей, приводящие к решению стохастических дифференциальных уравнений.
5. Предварительный материал из теории случайных величин и случайных процессов. Теорема Колмогорова. Броуновское движение. Основные свойства.
6. Интеграл Ито. Связь между интегралами Ито и Стратоновича.
7. Стохастические интегралы и Ито формула: одномерный и многомерный случаи, примеры.
8. Стохастические дифференциальные уравнения. Сильные и слабые решения. Модель роста популяции и другие примеры.
9. Теорема существования и единственности.
10. Примеры решения стохастических дифференциальных уравнений.
11. Броуновское движение как предел масштабированных случайных блужданий и геометрическое броуновское движение как предел решений, полученных в биномиальных моделях.
12. Уравнение Блэка – Шоулса – Мертона.
13. Задача фильтрации. Линейная задача фильтрации, разбитая по шагам. Фильтр Калмана – Бьюси.
14. Задача диффузии: основные свойства решений. Определение диффузии Ито. Марковское свойство.
15. Генератор диффузии, характеристический оператор. Формула Дынкина. Уравнения Колмогорова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир: АСТ, 2003. 408 с.
2. Melnikova I. V., Filinkov A. I., Anufrieva U. A. Abstract stochastic equations I: classical and distribution solutions. // J. of Math. Sciences, Functional Analysis. 2002. 111, № 2. P. 3430–3475.
3. Shreve Steven E. Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model. Springer Finance. 2005. C.187.
4. Shreve Steven E. Stochastic Calculus for Finance II. Continuous Asset Pricing Models. Springer Finance. 2006. C.340.