Программа курса

СОВРЕМЕННЫЕ ВОПРОСЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Автор – д. ф.-м. н. А. Р. Данилин

Лекции 72 часа

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Курс «Современные функционального анализа» читается на математико-механическом факультете магистрам в течение пятого(первого) курса. Он базируется на материале курсов «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Функциональный анализ», «Теория функций вещественного переменного» и «Теория функций комплексного переменного».

Цель этого курса – дать современное представление об основах анализа в бесконечномерных линейных пространствах, обобщающего как теорию линейных операторов в конечномерных пространствах, так и понятие предела последовательности и функций и других понятий, конечномерного анализа; показать применение основных понятий и методов функционального анализа к различным областям математики, таким как: интегральные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, вариационное исчисление, выпуклый анализ, оптимальное управление и др.; научить магистрантов основополагающим принципам и фактам функционального анализа, показать разнообразие конкретных реализаций общих конструкций, обеспечить возможность дальнейшего самостоятельного освоения и применения современных методов непрерывного анализа; расширить математический кругозор, поднять уровень математической культуры за счет работы с объектами более высокого уровня абстракции, по сравнению с конечномерным анализом.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Понятие о топологическом пространстве. Недостаточность понятия метрического пространства при описании различных видов сходимости в пространствах функций. Основные понятия топологии, предел и непрерывность в топологическом пространстве, аксиомы отделимости и счетности, сепарабельность; компактность: разные виды компактности, критерий компактности, связанный с центрированными множествами, необходимые условия сходимости. Описание топологии с помощью обобщенных последовательностей (подход Гейне).

Линейные топологические и нормированные пространства (л. т. п. и л. н. п.). Линейные топологические пространства, инвариантность открытости множества относительно операций сложения и умножения на скаляр, поглощающие множества, топология конечномерного отделимого н. п.; нормированные и евклидовы пространства, как л. т. п., критерий нормируемости л. т. п. (теорема А.Н. Колмогорова); выпуклые и абсолютно выпуклые множества, полунормы и функционал Минковского, локально выпуклые пространства (л. в. п.). Полнота локально выпуклых пространствах.

Линейные операторы и линейные функционалы в л. в. п. Критерии непрерывности линейного оператора в л. т. п., л. в. п. линейных ограниченных операторов (л. в. п. л. о. о.), равномерная и поточечная сходимость л. о. о., полнота л. в. п. л. о. о.; принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха – Штейнгауза) и его следствия; сопряженное пространство, сопряженные пространства к l_p, c, c_0, $C[a,b]$, $C^{(1)}[a,b]$,

$L_p(D)$; Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала в общем случае и ее следствия; рефлексивность, сепарабельность л. н. п., сопряженное к которому сепарабельно. Двойственность, слабая сходимость в л. в. п., критерий слабой сходимости, слабая сходимость в c_0, l_p, свойства слабо сходящихся последовательностей, слабая и *-слабая сходимости в сопряженном пространстве, *-слабая секвенциальная компактность замкнутого шара в сопряженном пространстве. Сопряженный оператор в л. в. п., ограниченность оператора, сопряженного к ограниченному оператору, теоремы Банаха об открытом отображении, о непрерывности обратного оператора, о замкнутом графике, о непрерывности оператора проектирования в общем случае, мера обусловленности л. о. о.; Пространства с базисом и сопряженные к ним. Компактные линейные операторы (к. л. о.) в л. в. п., равномерный предел к. л. о., достаточные условия компактности линейных операторов, к. л. о. в рефлексивных пространствах, компактность сопряженного оператора к к.л.о. (теорема Шаудера).

Линейные операторы в гильбертовых пространствах. Линейные неограниченные операторы в г. п. и сопряженные к ним. Симметричные и самосопряженные линейные операторы в г. п., самосопряженные расширения симметричных операторов, положительно определенные операторы; спектр самосопряженного л. о. о., спектральная теорема для неограниченных самосопряженных операторов, функциональное исчисление самосопряженных операторов; приведение оператора к виду умножения на функцию.

Пространства Соболева. Применение теоремы Гильберта – Шмидта к решению уравнений в частных производных, задача Штурма – Лиувилля, теорема Лакса – Мильграма и ее применение к доказательству разрешимости уравнений в частных производных; пространства Соболева, характеризация обобщенных производных, теорема о компактном вложении $H^1(a,b)$ в $C[a,b]$; Следы функций из пространств Соболева, теоремы о следах, теоремы вложения в общем случае.

Обобщенные функции. Пространства D и D', регулярные и сингулярные о. ф., локальные свойства о. ф., носитель о. ф., структурные теоремы, сингулярные о. ф. с конечным носителем; свертка основной и обобщенной функций, свойства свертки; свертка обобщенных функций, фундаментальное решение дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами; пространства S быстро убывающих функций и S' медленно растущих распределений, пространства E и E'.

Элементы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах. Сильная (по Фреше) и слабая (по Гато) дифференцируемость отображений в б. п., дифференциалы Фреше и Гато; полилинейные отображения, дифференцируемость, производные и дифференциалы высших порядков отображений в б. п., симметричность оператора второй производной, формула Тейлора, достаточные условия строгого локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в б. п., условия Лежандра и Якоби; теорема о неявной функции, условный экстремум вещественной дифференцируемой функции в б. п. и метод множителей Лагранжа.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с. (а также все издания с 1989 г.).
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
3. Рудин У. Функциональный анализ. СПб. 2005.
4. Садовничий В. А. Теория операторов. М.: Высшая школа, 1999. 368с.
5. Треногин В. А. Функциональный анализ: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 488 с.
6. Треногин В. А.. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 240 с.

7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. М.: Физико-математическая литература, 2000. 400 с.
8. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
9. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Добросвет, 2000. 412 с.
10. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
11. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984. 256 с.
12. Коркина Л. Ф. Нормированные пространства. Методические указания для практических занятий по функциональному анализу. Изд-во Урал. ун-та, 1985. 29 с.
13. Мельникова И. В., Ануфриева У. А. Линейные операторы. Учебно-методическое пособие по функциональному анализу. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2002. 63 с.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М .: Наука, 1977. 724 с.
2. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. шк., 1982. 271 с.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 357 с.
4. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.
5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ,1950.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1993. 440с.
7. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МНЦМО, 2004. 552 с.
8. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 1071 с.
9. Мельникова И. В., Коркина Л. Ф. Линейные операторы. Методические указания для практических занятий по функциональному анализу. Изд-во Урал. ун-та, 1989. 28 с.