ЗАДАЧИ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ – 2016

Решение каждой задачи нужно сдать на отдельном листе, указав на нём название команды и номер её телефона. Решения принимаются в понедельник, 29 февраля с 12:30 до 12:50 на кафедре математического анализа. Баллы начисляются отдельно за каждый пункт каждой задачи; количество этих баллов равно квадрату количества команд, оказавшихся не в состоянии решить задачу из данного пункта.

Предварительные результаты олимпиады будут выложены на странице `vk.com/matan_2016` в четверг, 3 марта; в этот же день в 17:30 в 501-м кабинете Института математики и механики УрО РАН (ул. Софьи Ковалевской, 16) состоится торжественная апелляция. Двадцать одна тысяча шестьсот пятьдесят рублей будут распределены в пятницу, 4 марта в 17:50 в аудитории 532 следующим образом: 20% получит команда, занявшая I место; 80% получат все[1] команды[2].

Ниже символами =, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ обозначены знак равенства и множества натуральных, рациональных, вещественных и комплексных чисел. Значения остальных символов уточняйте по телефону 8-902-274-01-86 у Глеба Дубосарского, по e-mail `gabdullin.mikhail@yandex.ru` у Михаила Габдуллина или по sms на номер 8-904-989-87-86 у Михаила Патракеева.

Задача 1. Можно ли вокруг каждой точки из $\mathbb{R}^2$ описать окружность, содержащую две различные точки из $\mathbb{Q}^2$?

Задача 2. Пусть $c \neq 0$ и $a_1, \ldots, a_{2k-1}$ — произвольные вещественные числа. Докажите, что среди них найдутся такие k чисел $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, что $a_{i_r} - a_{i_s} \neq c$ при $r, s \in \{1, \ldots, k\}$.

Задача 3. Докажите, что если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема и её преобразование Фурье равно 0 при $x \leqslant 0$, то f равна нулю почти всюду. Останется ли утверждение верным для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$?

Задача 4. Верно ли, что для любых $0 < a < b$ выполняется формула

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{ak}}{1 + e^{a+bk}} = 0\,?$$

[1] Включая команду-победителя.

[2] Пропорционально набранным баллам.

Задача 5. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу в точке* a, если
$$f(a) \leqslant \varliminf_{x\to a} f(x).$$
Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу*, если она полунепрерывна снизу в каждой точке.

(а) Постройте полунепрерывную снизу функцию, множество точек разрыва которой всюду плотно на вещественной прямой.

(б) Существует ли полунепрерывная снизу функция, множество точек разрыва которой имеет положительную меру?

(в) Может ли множество точек непрерывности полунепрерывной снизу функции иметь меру ноль?

(г) Верно ли, что каждая полунепрерывная снизу функция имеет точку непрерывности?

Задача 6. Является ли *уральский квадрат*[3] непрерывным образом вещественной прямой?

Задача 7. Пусть $x_0 > 0$ и $x_{n+1} := \ln(1 + x_n)$. Докажите следующую асимптотическую формулу:
$$x_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad n \to \infty\,.$$

Задача 8. Измеримо ли по Лебегу объединение произвольного семейства квадратов[4] ?

Задача 9. Пусть $a_k \geqslant 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k < \infty$. Докажите, что

(а) если последовательность $(ka_k)_k$ убывает, то $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{kn} = 0\,$;

(б) если $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} n^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{kn} = 0\,$.

Задача 10. Сколько попарно не пересекающихся букв τ можно нарисовать на плоскости, если под буквой τ понимать непрерывный инъективный образ буквы т ?

[3] то есть множество $[0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$

[4] то есть множеств вида $[x, x+a] \times [y, y+a] \subseteq \mathbb{R}^2$, где $a > 0$