ЗАДАЧИ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Каждую задачу нужно сдать на отдельном листе бумаги, оставив на листе название команды и телефон для связи. Решения принимаются в понедельник, 8 декабря на кафедре математического анализа не позднее 12:50. Баллы начисляются отдельно за каждый подпункт каждой задачи. Стоимость одного подпункта равна квадрату количества команд, не решивших этот подпункт.

Далее символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ обозначены множества натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел; мы считаем, что $0 \in \mathbb{N}$. Вопросы по формулировкам задач вы можете задать Габдуллину Михаилу 8-950-648-78-65, Дубосарскому Глебу 8-902-274-01-86 или Патракееву Михаилу 8-904-989-87-86. Вопросы по подпункту B1 задачи 1 не принимаются, так как понимание формулировки является заданием на общую математическую грамотность.

Задача 0. Может ли быть несчётным множество точек разрыва первого рода функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Задача 1. Будем называть ***нижним спектром*** последовательности $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ множество

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{n_k} : \pi_{n_k} \text{ бесконечна и нестрого убывает} \right\} \subseteq \big(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\big),$$

где $\pi_n := \pi(n)$.

(A) Разминка. Существует ли последовательность $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, нижний спектр которой равен

- **(A1)** канторову множеству?
- **(A2)** $\{0\} \cup \big([1, +\infty) \cap \mathbb{Q}\big) \cup \{+\infty\}$?
- **(A3)** $\{0\} \cup (1, 2)$?
- **(A4)** $(1, 2) \cap \mathbb{Q}$?
- **(A5)** $(0, 1] \cup [2, 3]$?
- **(A6)** $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$?
- **(A7)** $\{0\} \cup \big((1, 2) \cap \mathbb{Q}\big)$?
- **(A8)** $(0, 1)$?

(B) Чуть посложнее. Последовательность, нижний спектр которой равен $(0, +\infty)$, назовём ***благородной***. Существует ли благородная последовательность $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что:

- **(B1)** $2 + 2 = 4$?
- **(B2)** для каждого натурального n справедливо $\pi_n \leqslant 1$?
- **(B3)** $\lim_{n\to\infty} \pi_n = 0$?
- **(B4)** замыкание множества $\{\pi_n : n \in \mathbb{N}\}$ несчётно?

(C) Существует ли бесконечное счётное множество $A \subseteq \mathbb{R}$ такое, что каждая биекция $\pi\colon \mathbb{N} \to A$ благородна?

(D) Существует ли последовательность $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, нижний спектр которой содержится в $\mathbb{R}$, счётен, бесконечен и содержит строго убывающую последовательность?

(E) Существует ли последовательность $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, нижний спектр которой несчётен и не пересекается с $\mathbb{Q}$?

(F) Для каждого ли открытого множества $U \subseteq (0, +\infty)$, содержащего сколь угодно близкие к нулю точки, существует последовательность $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, нижний спектр которой равен U?

Задача 2. Множество $F \subseteq [0, 1]$ обладает следующим свойством: для каждой точки x из $(0, 1)$ существует сколь угодно малый отрезок $\triangle$ такой, что $x \in \triangle$ и $\mu(F \bigcap \triangle) \geqslant (\mu\triangle)/2$, где μ — мера Лебега. Верно ли, что $\mu F = 1$?

Задача 3. Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***точечно периодическая***, если для каждого x существует ***период*** $T_x > 0$ такой, что $f(x) = f(x + kT_x)$ при всех целых k.

(A) Докажите, что если f — непрерывная точечно периодическая функция и при этом f не константа, то при любом выборе периодов $(T_x)_{x\in\mathbb{R}}$ справедливо $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} T_x > 0$.

(B) Останется ли предыдущее утверждение верным, если отказаться от условия непрерывности f?

(C) Приведите пример равномерно непрерывной точечно периодической функции, которая не является периодической.

(D) Докажите, что если f — равномерно непрерывная точечно периодическая функция и при этом f не константа, то для любых двух точек отношение любых их периодов рационально.

(E) Докажите, что для каждой равномерно непрерывной точечно периодической функции f существует всюду плотное множество интервалов, на каждом из которых она периодическая. То есть для каждого интервала I найдется вложенный в него интервал J такой, что для некоторого $T_J > 0$ справедливо

$$\forall x \in J \ \forall k \in \mathbb{Z} \ \Big[f(x) = f(x + kT_J) \Big].$$

Задача 4. Пусть A и B — вещественные симметричные положительно определенные матрицы одинакового размера. Докажите, что отношение квадратичных форм $x^T A\, x$ и $x^T B x$ максимально (минимально), когда x — собственный вектор матрицы $B^{-1}A$, соответствующий ее наибольшему (наименьшему) собственному значению.

Задача 5. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа и $1 \leqslant r \leqslant n$. Докажите неравенство

$$\sum_{1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_r \leqslant n} x_{m_1} x_{m_2} \cdot \ldots \cdot x_{m_r} \leqslant \frac{\Big(\sum_{k=1}^n x_k \Big)^r}{r!} \ .$$

Задача 6. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ справедливо

$$\int\limits_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| dx = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \ .$$

Задача 7. Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ строится по правилу

$$x_{n+1} = \frac{2}{x_n + x_{n-1}} \ .$$

Докажите, что эта последовательность сходится при любых положительных x_0 и x_1, и найдите её предел.